数理解析研究所講究録
第 526 巻 1984 年 96-104

ブロック効果をもつ分解能 $(2\ell+1)^*$ の釣合い型一部実施 2^m 要因計画について

広島大·総合　来田正秀

§1. 序

強さ 2ℓ，大きさ N，因子数 m，水準数 2，指標集合 $\{\mu_0, \mu_1, \cdots \mu_{2\ell}\}$ の均斉配列 $(BA(N, m, 2, 2\ell)\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2\ell}\})$ と分解能 $(2\ell+1)$ の釣合い型一部実施 2^m 要因計画 (2^m-BFFD) の関係は，山本,白倉,来田 [4] によって求められた。また三角型多次元部分釣合い (TM-DPB) アソシエーションスキームとその代数を用いて，分解能 $(2\ell+1)$ の 2^m-BFFD に基く情報行列の固有多項式が，高さ $(\ell+1)$ 次の行列式の積で求められた [5]。現在，奇数あるいは偶数分解能の BFFD についての多くの研究がなされている。

本稿では，計画 T が $T' = [T_1'; \cdots; T_r']$ である場合について考える。ただし，T_k $(k=1, 2, \cdots, r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$ であり，A' は行列 A の転置を示す。

§2. ブロック効果をもつ 2^m-BFFD

N 個の処理組合せをもつ計画 T を $T' = [T_1'; \cdots; T_r']$ とする。ただし，T_k $(k=1, 2, \cdots, r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$

である。このときTは明らかに$BA(N, m, 2, 2\ell)\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2\ell}\}$となる。ただし，$N=\sum_{k=1}^{r} N_k$，$\mu_i=\sum_{k=1}^{r}\mu_i^{(k)}$ $(i=0,1,\cdots,2\ell)$である。

Tに基くつぎの模型を考える：

(2.1) $\quad \underline{y}(T)=E_T\underline{\theta}+\Phi\underline{b}+\underline{e}_T$,

ただし，$\underline{y}(T)'=(\underline{y}(T_1)', \cdots, \underline{y}(T_r)')$，$E_T'=[E_1'; \cdots; E_r']$，$\underline{\theta}'=(\theta_\phi; \{\theta_t\}; \cdots; \{\theta_{t_1\cdots t_\ell}\})$ $(=(\theta_\phi, \underline{\theta}^{*\prime}))$，$\Phi=\mathrm{diag}[\underline{j}_{N_1}; \cdots; \underline{j}_{N_r}]$，$\underline{b}'=(b_1, \cdots, b_r)$，$\underline{e}_T'=(\underline{e}_1', \cdots, \underline{e}_r')$である。ここで，$\underline{y}(T_k)$，$E_k$，$b_k$，$\underline{e}_k$ $(k=1,2,\cdots,r)$は各々T_kに基く$N_k\times 1$の観測値ベクトル，$N_k\times\nu_\ell$の計画行列，ブロック効果，$N_k\times 1$の誤差ベクトル，$\nu_\ell=1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{\ell}$である。さらに誤差ベクトル$\underline{e}_T$について，$\mathcal{E}[\underline{e}_T]=\underline{0}$，$\mathrm{Var}[\underline{e}_T]=\sigma^2\times\mathrm{diag}[(1/\tau_1)I_{N_1}; \cdots; (1/\tau_r)I_{N_r}]$ $(=\sigma^2 D_\tau^{-1})$で，σ^2は未知であるが，$\tau_k\,(>0)$は既知と仮定する。

<u>定義.</u> $\quad\underline{\theta}^*$が推定可能な計画を分解能$(2\ell+1)^*$という．

ブロック効果を除去して得られる$\underline{\theta}^*$を推定するための正規方程式は

(2.2) $$\begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & M_T^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\theta}_\phi \\ \underline{\theta}^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}^*(T) \end{bmatrix}$$

で与えられる。ただし

$$M_T^*=E_T^{*\prime}D_\tau^{1/2}\{I_N-\Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\}D_\tau^{1/2}E_T^*$$

$$= \sum_{k=1}^{r} [\tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} E_k^{*}] ,$$

$$(2.3) \qquad \underline{y}^{*}(T) = E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2} \{ I_N - \Phi (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' \} D_\tau^{1/2} \underline{y}(T)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} [\tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \underline{y}(T_k)]$$

である。ここで $D_\tau^{1/2} = diag\, [\sqrt{\tau_1} I_{N_1} ; \cdots ; \sqrt{\tau_r} I_{N_r}]$ で，E_T^{*}, E_k^{*} は各々 E_T, E_k の才１列を取り除いた $N \times (\nu_\ell - 1)$, $N_k \times (\nu_\ell - 1)$ の行列である。

(2.2) において，M_T^{*} が正則であるならば，$\underline{\theta}^{*}$ の推定値 $\hat{\underline{\theta}}^{*}$ は

$$(2.4) \qquad \hat{\underline{\theta}}^{*} = V_T^{*} \underline{y}^{*}(T)$$

で与えられる。ただし，$V_T^{*} = (M_T^{*})^{-1}$ である。

定理 2.1.　$T' = [T_1' ; \cdots ; T_r']$ を分解能 $(2\ell+1)^{*}$ の 2^m-BFFD とする。ただし T_k $(k=1, 2, \cdots, r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)$ $\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$ である。このとき，$\underline{\theta}^{*}$ の推定値 $\hat{\underline{\theta}}^{*}$ について

$$\mathcal{E}[\hat{\underline{\theta}}^{*}] = \underline{\theta}^{*} , \quad Var[\hat{\underline{\theta}}^{*}] = \sigma^2 V_T^{*}$$

となる。

証明.　$\{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \underline{j}_{N_k} = \underline{0}$ なので，

$$\mathcal{E}[\hat{\underline{\theta}}^{*}]$$

$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \{ \mathcal{E}[\underline{y}(T_k)] \}]$$

$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \{ [\underline{j}_{N_k} ; E_k^{*}] \begin{bmatrix} \theta_\phi \\ \underline{\theta}^{*} \end{bmatrix} + b_k \underline{j}_{N_k} \}]$$

$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} E_k^{*}] \underline{\theta}^{*}$$

$$= \underline{\theta}^{*}$$

となる。また$\{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\}$は巾等行列なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[\hat{\theta}^*] \\
&= V_T^* \, \mathrm{Var}[y^*(T)] \, V_T^* \\
&= V_T^* [E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2} \{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\} D_\tau^{1/2}] \, \mathrm{Var}[y(T)] \\
&\quad \times [D_\tau^{1/2} \{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\} D_\tau^{1/2} E_T^*] V_T^* \\
&= \sigma^2 V_T^* [E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2} \{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\} D_\tau^{1/2} D_\tau^{-1} D_\tau^{1/2} \\
&\quad \times \{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\} D_\tau^{1/2} E_T^*] V_T^* \\
&= \sigma^2 V_T^* [E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2} \{I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\} D_\tau^{1/2} E_T^*] V_T^* \\
&= \sigma^2 V_T^*
\end{aligned}
$$

となる。

系 定理2.1の計画Tについて，$\tau_1 = \cdots = \tau_r \,(=1)$ ならば

$$\mathrm{Var}[\hat{\theta}^*] = \sigma^2 \Big[\sum_{k=1}^{r} E_k^{*\prime} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^*\Big]^{-1}$$

である。

§3. 共分散行列の固有多項式

この章では，計画Tに基くθ^*の推定値$\hat{\theta}^*$の共分散行列の固有多項式を求める。

補題3.1. 計画T_k $(k=1,2,\cdots,r)$を$BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$とする。このとき

$$L^{*\prime}[E_k^{*\prime}\{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^*] L^*$$

$$= \mathrm{diag}\,[K_0^*(k); \underbrace{K_1^*(k), \cdots, K_1^*(k)}_{\phi_1}; \cdots; \underbrace{K_\ell^*(k), \cdots, K_\ell^*(k)}_{\phi_\ell}]$$

なる $(\nu_\ell-1)\times(\nu_\ell-1)$ の直交行列 L^* が存在する。ただし，$K_0^*(k) = \|\kappa_0^{*i,j}(k)\|$ $(\ell\times\ell)$，$K_\gamma^*(k) = \|\kappa_\gamma^{*u,v}(k)\|$ $(\ell-\gamma+1)\times(\ell-\gamma+1)$ で

$$\kappa_0^{*i,j}(k) = \sum_{\alpha=0}^{i} \gamma_{j-i+2\alpha}^{(k)} z_{0\alpha}^{(i,j)} - \sqrt{\binom{m}{i}\binom{m}{j}}\,\gamma_i^{(k)}\gamma_j^{(k)} \Big/ \gamma_0^{(k)}$$

(3.1) $(1 \leqq i \leqq j \leqq \ell)$,

$$\kappa_\gamma^{*u,v}(k) = \sum_{\alpha=0}^{\gamma+u} \gamma_{v-u+2\alpha}^{(k)} z_{\gamma\alpha}^{(\gamma+u,\gamma+v)}$$

$(0 \leqq u \leqq v \leqq \ell-\gamma;\ \gamma = 1, 2, \cdots, \ell)$.

であり

$$\gamma_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{2\ell}\sum_{p=0}^{i} (-1)^p \binom{i}{p}\binom{2\ell-i}{j-i+p}\mu_j^{(k)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, 2\ell),$$

(3.2)

$$z_{\beta\alpha}^{(u,v)} = \sum_{b=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-b} \frac{\binom{u-\beta}{b}\binom{u-b}{u-\alpha}\binom{m-u-\beta+b}{b}\left\{\binom{m-u-\beta}{v-u}\binom{v-\beta}{v-u}\right\}^{1/2}}{\binom{v-u+b}{b}}$$

$(0 \leqq \alpha, \beta \leqq u \leqq v \leqq \ell)$,

$$\phi_\beta = \binom{m}{\beta} - \binom{m}{\beta-1} \qquad (\beta = 0, 1, \cdots, \ell)$$

である。

<u>証明</u>. 一般平均 Φ を除いた ℓ-因子交互作用までの要因効果の間に定義されるTMDPBアソシエーション代数を用いて容易に証明できる。

<u>定理3.1.</u> 分解能 $(2\ell+1)^*$ の 2^m-BFFD, $T = [T_1'; \cdots; T_r']$ に基く V_T^* の固有多項式 $\psi(x)$ は

(3.3) $$\psi(x) = [\det\{(K_0^*)^{-1} - xI_\ell\}] \prod_{\gamma=1}^{\ell} [\det\{(K_\gamma^*)^{-1} - xI_{\ell-\gamma+1}\}]^{\phi_\gamma}$$

で与えられる。ただし，T_k は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$

で，$K_\beta^* = \sum_{k=1}^{r} \{\tau_k K_\beta^*(k)\}$ $(\beta = 0, 1, \cdots, l)$ である．

証明　(2.3) と補題3.1より容易に求まる．

系　定理3.1の計画 T について，$\tau_1 = \cdots = \tau_r\ (=1)$ ならば，V_T^* の固有多項式 $\xi(x)$ は

$$\xi(x) = [\det\{(K_0^{**})^{-1} - xI_l\}] \prod_{\gamma=1}^{l} [\det\{(K_\gamma^{**})^{-1} - xI_{l-\gamma+1}\}]^{\phi_\gamma}$$

で与えられる。ただし，$K_\beta^{**} = \sum_{k=1}^{r} K_\beta^*(k)$ $(\beta = 0, 1, \cdots, l)$ である．

定理3.2　定理3.1の計画 T に対して，

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(V_T^*) = \sum_{\beta=0}^{l} \phi_\beta [\mathrm{tr}\{(K_\beta^*)^{-1}\}], \\ (3.4)\qquad &\det(V_T^*) = \prod_{\beta=0}^{l} [\det\{(K_\beta^*)^{-1}\}]^{\phi_\beta} \end{aligned}$$

である。

系　定理3.1の計画 T について，$\tau_1 = \cdots = \tau_r\ (=1)$ ならば

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(V_T^*) = \sum_{\beta=0}^{l} \phi_\beta [\mathrm{tr}\{(K_\beta^{**})^{-1}\}], \\ (3.5)\qquad &\det(V_T^*) = \prod_{\beta=0}^{l} [\det\{(K_\beta^{**})^{-1}\}]^{\phi_\beta} \end{aligned}$$

である。

例　T_1 を BA(9,4,2,4){0,1,0,1,1}，T_2 を BA(11,4,2,4){1,0,1,1,0} とする。この T_1，T_2 は各々分解能 IV，V の 2^4-BFFD である（白倉 [1], Srivastava & Chopra [3]）。(3.2) より $\gamma_0^{(1)} = 9$, $\gamma_1^{(1)} = \gamma_2^{(1)} = \gamma_3^{(1)} = 1$, $\gamma_4^{(1)} = -7$, $\gamma_0^{(2)} = 11$, $\gamma_1^{(2)} = 1$, $\gamma_2^{(2)} = -1$, $\gamma_3^{(2)} = -3$, $\gamma_4^{(2)} = 3$ となる。ここで $\tau_1 = \tau_2 = 1$ とすると

$$K_0^{**}=\begin{bmatrix}\frac{1900}{99} & -\frac{4\sqrt{6}}{99}\\ * & \frac{1464}{99}\end{bmatrix},\quad K_1^{**}=\begin{bmatrix}20 & 4\sqrt{2}\\ * & 24\end{bmatrix},\quad K_2^{**}=[16]$$

なので，$(K_0^{**})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{366}{7024} & \frac{\sqrt{6}}{7024}\\ * & \frac{475}{7024}\end{bmatrix}$, $(K_1^{**})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{6}{112} & -\frac{\sqrt{2}}{112}\\ * & \frac{5}{112}\end{bmatrix}$, $(K_2^{**})^{-1}=\left[\frac{1}{16}\right]$

となる。よって(3.5)より

$$\mathrm{tr}(V_T^*)=\frac{39981}{77264}\fallingdotseq 0.51746$$

$$\det(V_T^*)=\frac{1355193}{(7024)^2\times(11)^{11}}\fallingdotseq 0.96275\times 10^{-13}$$

となる。

§4. 2^m-BFFDの存在条件.

Tを$BA(N,m,2,2\ell)\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2\ell}\}$とするとき，分解能$(2\ell+1)$の$2^m$-BFFDが存在するための必要条件は，白倉,来田[2]によって与えられている。ここでは分解能$(2\ell+1)^*$の2^m-BFFD，$T'=[T_1';\cdots;T_r']$の存在条件を求める。

<u>定理4.1.</u>　$T'=[T_1';\cdots;T_r']$を$BA(N,m,2,2\ell)\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2\ell}\}$とする。ただし，$T_k$は$BA(N_k,m,2,2\ell)\{\mu_0^{(k)},\mu_1^{(k)},\cdots,\mu_{2\ell}^{(k)}\}$で，$N=\sum_{k=1}^{r}N_k$，$\mu_i=\sum_{k=1}^{r}\mu_i^{(k)}$ $(i=0,1,\cdots,2\ell)$である。このとき計画Tが存在するための必要条件は，K_β^* $(\beta=0,1,\cdots,\ell)$が半正値行列になることである。

<u>定理4.2.</u>　定理4.1の配列Tについて，Tが分解能$(2\ell+1)^*$になるための必要十分条件は，K_β^* $(\beta=0,1,\cdots,\ell)$が正値

行列になることである。

(3.1)と定理4.2より次の定理が成立つ(e.g., 白倉,桒田[2]):

定理4.3. Tを定理4.1で与えられる配列とする。このとき,Tが分解能$(2l+1)^*$の2^m-BFFDになるための必要条件は次の不等式を満たすことである:

$$\sum_{k=1}^{r} \mu_l^{(k)} > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \{(m-2l+2)(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)}) - 2(m-2l)\mu_l^{(k)}\} > 0 \qquad (l \geqq 2),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \{(m-2l+4)(\mu_{l-2}^{(k)}+\mu_{l+2}^{(k)}) + 4(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)}) - 2(m-2l)\mu_l^{(k)}\} > 0 \qquad (l \geqq 3),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[\binom{m-2l+4}{2}(\mu_{l-2}^{(k)}+\mu_{l+2}^{(k)}) - 2(m-2l)(m-2l+3)(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)})$$
$$+ \{3(m-2l)^2 + 5(m-2l) + 4\}\mu_l^{(k)}\Big] > 0 \qquad (l \geqq 3),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \{(m-2l+6)(\mu_{l-3}^{(k)}+\mu_{l+3}^{(k)}) + 2(m-2l+8)(\mu_{l-2}^{(k)}+\mu_{l+2}^{(k)})$$
$$-(m-2l-10)(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)}) - 4(m-2l)\mu_l^{(k)}\} > 0 \qquad (l \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[2\binom{m-2l+6}{2}(\mu_{l-3}^{(k)}+\mu_{l+3}^{(k)}) - 2(m-2l+5)(m-2l-2)(\mu_{l-2}^{(k)}+\mu_{l+2}^{(k)})$$
$$-\{(m-2l)^2+11(m-2l)-2\}(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)}) + 4\{(m-2l)^2+3(m-2l)$$
$$+6\}\mu_l^{(k)}\Big] > 0 \qquad (l \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[6\binom{m-2l+6}{3}(\mu_{l-3}^{(k)}+\mu_{l+3}^{(k)}) - 6(m-2l)(m-2l+4)(m-2l+5)$$
$$\times(\mu_{l-2}^{(k)}+\mu_{l+2}^{(k)}) + 3(m-2l+4)\{5(m-2l)^2+7(m-2l)+6\}(\mu_{l-1}^{(k)}+\mu_{l+1}^{(k)})$$
$$-4(m-2l)\{5(m-2l)^2+21(m-2l)+28\}\mu_l^{(k)}\Big] > 0 \qquad (l \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[\sum_{j=0}^{2l} \Big\{\sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{p=0}^{2\alpha} (-1)^p N_k \binom{2\alpha}{p}\binom{2l-2\alpha}{j-2\alpha+p}\binom{i}{\alpha}\binom{m-i}{\alpha}\Big\}\mu_j^{(k)}$$
$$-\binom{m}{i}\Big\{\sum_{j=0}^{2l}\sum_{p=0}^{i} (-1)^p \binom{i}{p}\binom{2l-i}{j-i+p}\mu_j^{(k)}\Big\}^2\Big] > 0 \qquad (1 \leqq i \leqq l).$$

REFERENCES

[1] Shirakura, T. (1979). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution IV derived from balanced arrays of strength four. *J. Japan Statist. Soc.* 9, 19-27.

[2] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 377-386.

[3] Srivastava, J.N. and Chopra, D.V. (1971). Balanced optimal 2^m fractional factorial designs of resolution V, $m \leq 6$. *Technometrics* 13, 257-269.

[4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 143-157.

[5] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. *"Essays in Probability and Statistics"* (S. Ikeda et al., Eds.), birthday volume in honor of Professor J. Ogawa, Shinko Tsusho Co. Ltd., Tokyo, 73-94.