数理解析研究所講究録
第530巻 1984年 1-16

多角形領域におけるラプラシアンの固有値分布について

京大・理　大塚 研一 (Ken'ichi Otsuka)

§1. 結果

考える問題は、多角形領域におけるラプラシアンのディリクレ問題の固有値の漸近分布の第2項である。

Ω を、$\mathbb{R}^2$ の多角形領域とする。すなわち、Ω は有界領域で、境界 $\partial\Omega$ は、有限個の線分 B_k, $k=1,\cdots,\ell$ から成る。λ_j を、Ω における $-\Delta=-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ のディリクレ問題の固有値、$\{\varphi_j(x)\}$ を、その実固有函数から成る $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系とする。

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_j(x)=\lambda_j\varphi_j(x) \\ \varphi_j(x)\big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}, \quad 0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\cdots\nearrow\infty .$$

そこで、$N(\lambda)$ を、λ 以下の固有値の個数とすると、

定理

$$N(\lambda)=\frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda-\frac{|\partial\Omega|}{4\pi}\lambda^{\frac{1}{2}}+o(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\lambda\to+\infty)$$

ただし、$|\Omega|$ は Ω の面積、$|\partial\Omega|$ は $\partial\Omega$ の長さを表わす。

歴史を少しだけ述べておくと，多角形領域に対しては，$N(\lambda)=\frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda+O(\lambda^{\frac{1}{2}})$ を，Bailey-Brownell (1962)，Fedosov (1963) が示した。$\mathbb{R}^n$ の領域に対する同様の評価 $N(\lambda)=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}|\Omega|\lambda^{\frac{n}{2}}+O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ については，$\partial\Omega\in C^\infty$ のときに，Seeley (1978, $n=3$)，Pham The Lai (1981, $\forall n$) が示した。第２項を持つ評価

$$N(\lambda)=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}|\Omega|\cdot\lambda^{\frac{n}{2}}-\frac{\omega_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}}|\partial\Omega|\lambda^{\frac{n-1}{2}}+o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$$

($n\geqq 2$,　ω_k は $\mathbb{R}^k$ の単位球の体積)

については，「$S^*\Omega$ の周期点が測度 0」という条件のもとで，C^∞ リーマン多様体上の Laplace-Beltrami 作用素に対して，Duistermaat-Guillemin (1975，境界の無い場合，すなわち第２項 $=0$)，Ivrii (1980, $\partial\Omega\in C^\infty$)，Melrose (1980, $\partial\Omega\in C^\infty$，他の条件) が示した。また，特別の領域に対しては，Bérard (1980) の結果もある。

ここでは，Ivrii の論文に沿って定理を証明する。

$\boxed{\text{§2. cosine変換}}$

$$e(x,y,\lambda)=\sum_{\lambda_j\leqq\lambda}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$$

$$m(x,y,\tau)=e(x,y,\tau^2)\,\mathrm{sgn}\,\tau$$

$$N_1(\tau)=\int_\Omega m(y,y,\tau)\,dy$$

とおくと，

$N(\lambda)=N_1(\sqrt{\lambda})$　　となる。($\lambda\geqq 0$)

lemma 1 (Agmon)

$^{\exists}C>0$ s.t. $|m(x,y,\tau)| \leqq C\tau^2 \quad ({}^{\forall}\tau)$

Def. 2.

$\rho(\tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ を、次のように定める。

$$\begin{cases} \hat{\rho}(t)=\hat{\rho}(-t), \quad \mathrm{supp}\,\hat{\rho}(t) \subset \{|t|<1\} \\ \hat{\rho}(t) \equiv 1 \quad (|t| \leqq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$\rho_\varepsilon(\tau) \Leftarrow \varepsilon\rho(\varepsilon\tau)$ とおく。（ここで $\hat{f}(t) \Leftarrow \int e^{-it\tau} f(\tau)\,d\tau$）

この時、$\hat{\rho_\varepsilon}(t)=\hat{\rho}(\frac{t}{\varepsilon})$, $\mathrm{supp}\,\hat{\rho_\varepsilon} \subset \{|t|<\varepsilon\}$ となる。

Prop. 3

$^{\exists}\delta>0$ s.t. $^{\forall}f(y) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ に対し、

$$\rho_\delta * dN_f(\tau) = \frac{\tau}{2\pi}\int_\Omega f(y)\,dy - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} f(y)\,dS_y + O(\tau^{-\frac{1}{2}}) \quad (\tau \to \infty).$$

ここで $N_f(\tau) \Leftarrow \int_\Omega f(y)\, m(y,y,\tau)\,dy$.

（一般的に書くと、
$$\rho_\delta * dN_f(\tau) = \frac{n\omega_n}{(2\pi)^n}\int_\Omega f(y)\,dy \cdot \tau^{n-1} - \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}}\int_{\partial\Omega} f(y)\,dS_y \cdot \tau^{n-2} + o(\tau^{n-2})$$
）

証明

スペクトル函数のcosine変換を考える。すなわち

$$u(x,y,t) \Leftarrow \sum_{j=1}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda_j}\,t \cdot \varphi_j(x)\varphi_j(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}\,dm(x,y,\tau)$$

とおくと、

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)\,u(x,y,t)=0, \quad u(x,y,t)\big|_{x\in\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

$$\Big| \quad u(x,y,0)=\delta(x-y)\,, \quad \partial_t u(x,y,0)=0$$

を満たす。そこで

lemma 4

$^\exists \delta>0,\ ^\exists G'(x,y,t)$ s.t.

$$\text{(i)}\begin{cases} \left.\begin{aligned}(\partial_t^2-\Delta_x)\,G'(x,y,t)&=0\\ G'(x,y,t)|_{x\in\partial\Omega}&=0\end{aligned}\right)(|t|<\delta) \\ G'(x,y,0)=0\,, \quad \partial_t G'(x,y,0)=\delta(x-y)\end{cases}$$

(ii) $f(y)\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ に対し

$$M_f(\tau) \Leftarrow \int_\Omega f(y)\,\widehat{G}'(y,y,\tau)\,dy$$ とおくと、

$$M_f(\tau)=\frac{1}{2i}\left\{\int_\Omega f(y)\,dy-\frac{1}{2\tau}\int_{\partial\Omega} f(y)\,dS_y+O(|f|_2\tau^{-\frac{3}{2}})\right\} \quad (\tau\to\infty)$$

ここで、$\begin{cases}\widehat{G}' \text{ は、} t \text{ に関する Fourier 変換} \\ |f|_k \Leftarrow \sum_{|\alpha|\le k}\sup_{y\in\overline{\Omega}}|D^\alpha f(y)|\end{cases}$

（証明は、§3）

(i) より $|t|<\delta$ では $u(x,y,t)=\partial_t G'(x,y,t)$ だから、

$$\hat{\rho}_\delta(t)\,u(x,y,t)=\hat{\rho}_\delta(t)\,\partial_t G'(x,y,t) \qquad \forall t \quad 。$$

Fourier逆変換により

$$\frac{1}{2}\rho_\delta * dm(x,y,\tau)=\rho_\delta(\tau)*\left(\frac{i\tau}{2\pi}\,\widehat{G}'(x,y,\tau)\right)(\tau)\,,$$

したがって、

$$\rho_\delta * dN_f(\tau)=\rho_\delta*\left(\frac{2i}{2\pi}\tau M_f(\tau)\right)(\tau)$$

$$= \rho_\delta * \left\{ \frac{|\tau|}{2\pi} \int_\Omega f(y)\,dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} f(y)\,dS_y + O(|\tau|^{-\frac{1}{2}}) \right\}$$

を得る。$|\tau| \to \infty$ の時

$$\begin{cases} (\rho_\delta * |\tau|)(\tau) = |\tau| + O(|\tau|^{-N}) & \forall N \\ (\rho_\delta * 1)(\tau) \equiv 1 \\ (\rho_\delta * (|\tau|^{\frac{1}{2}}))(\tau) = O(|\tau|^{-\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

である事より，Prop. 3 が従う。　　証明終

§3. lemma 4の証明

Ωの頂点，辺をそれぞれ A_j, B_j ($j=1,\cdots,\ell$) とする。$\Omega_{\ell+j}$ を A_jの近傍でΩと一致する角領域，Ω_j を B_j の近傍でΩと一致する半平面，Ω_0 を全平面とし，各Ω_j における波動方程式のGreen函数を $G_j(x, y, t)$ ($j=0,\cdots,2\ell$) とする。Ωにおける単位分解を，次のようにとる。

$$\begin{cases} a_j(y) \in C^\infty(\bar\Omega), \quad 0 \leq a_j(y) \leq 1, \quad \sum_{j=0}^{2\ell} a_j(y) \equiv 1 \\ \left.\begin{array}{l} A_j \text{ の近傍で } \quad a_{\ell+j}(y) \equiv 1 \\ \operatorname{supp} a_{\ell+j}(y) \subset (A_j \text{ の近傍}) \\ \operatorname{supp} a_j(y) \subset (B_j \text{ の近傍}) \end{array}\right\} \quad j=1,\cdots,\ell \\ \operatorname{supp} a_0(y) \subset (\Omega \text{ の内部}) \end{cases}$$

A_j, B_j の近傍を適当に小さくとれば，$\delta > 0$があって，supp $a_j(y)$ の 2δ 近傍において，ΩとΩ_j が一致する ($j=0,\cdots, 2\ell$)。$b_j(x)$　$j=0,\cdots,2\ell$ を

$$\begin{cases} b_j(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \ , \ 0 \leqq b_j(x) \leqq 1 \\ b_j(x) \equiv 1 \quad (\operatorname{supp} a_j(x) \text{ の } \delta \text{ 近傍}) \\ \operatorname{supp} b_j(x) \subset (\operatorname{supp} a_j(x) \text{ の } 2\delta \text{ 近傍}) \end{cases}$$

とすると.

$$G'(x, y, t) = \sum_{j=0}^{2\ell} b_j(x)\, a_j(y)\, G_j(x, y, t)$$

は. $|t| < \delta$ において. Ω でのGreen 函数になる。

$$M_f(\tau) = \sum_{j=0}^{2\ell} \int_\Omega a_j(y)\, f(y)\, \hat{G}_j(y, y, \tau)\, dy$$

となるが, Δ は. 座標の回転や平行移動で不変だから, 次の3つの場合を調べれば良い。

(i) $\Omega_0 = \mathbb{R}^2$ での Green 函数 $G_0(x, y, t)$

(ii) $\Omega_+ = \{(x_1, x_2);\ x_1 > 0\}$ での. $G_+(x, y, t)$

(iii) $\Omega_{(\alpha)} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ 0 < \theta < \alpha\pi,\ 0 < r < \infty\}$ での. $G_{(\alpha)}(x, y, t)$ $\quad (0 < \alpha \leqq 2)$

各領域を D, Green函数を $g(x, y, t)$ と書くことにして、$v(x, y, \zeta)$ を. $\operatorname{Im} \zeta < 0$ で ζ について解析的な

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \zeta^2)\, v(x, y, \zeta) = \delta(x - y) \\ \qquad v(x, y, \zeta)\big|_{x \in \partial D} = 0 \\ \qquad v(x, y, i\eta) \longrightarrow 0 \quad (\eta \to -\infty,\ x \neq y) \end{cases}$$

の解とすると

$$\hat{g}(x, y, \tau) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{ v(x, y, \tau - i\varepsilon) - v(x, y, -\tau - i\varepsilon) \}$$

である。(変形)Bessel函数 $K_0(z)$, $J_0(z)$ を用いると

lemma 5 $(D=\Omega_0)$

$$V(x,y,\zeta)=\frac{1}{2\pi}K_0(i\zeta|x-y|)$$

$$2i\,\widehat{G_0}(x,y,\tau)=J_0(\tau|x-y|)$$

$$2i\,\widehat{G_0}(y,y,\tau)=1$$

$$2i\,M_f(\tau)=\int_D f(y)\,dy$$

lemma 6 $(D=\Omega_+)$

$x=(x_1,x_2)$ に対し, $\check{x}=(-x_1,x_2)$ とおくと,

$$V(x,y,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\left\{K_0(i\zeta|x-y|)-K_0(i\zeta|x-\check{y}|)\right\}$$

$$2i\,\widehat{G_+}(x,y,\tau)=J_0(\tau|x-y|)-J_0(\tau|x-\check{y}|)$$

$$2i\,\widehat{G_+}(y,y,\tau)=1-J_0(2\tau y_1)$$

$$2i\,M_f(\tau)=\int_{\Omega_+}f(y)\,dy-\frac{1}{2\tau}\int_{R^1}f(0,y_2)\,dy_2+O(|\partial_1 f|_0\,\tau^{-\frac{3}{2}})\quad(\tau\to\infty)$$

$\boxed{\text{Prop. 7}}$ $(D=\Omega_{(\alpha)})$

極座標 $x_1+ix_2=re^{i\theta}$ により, $x\longleftrightarrow(r,\theta)$, $y\longleftrightarrow(s,\omega)$ とすると,

$$V(r,\theta,s,\omega,\zeta)=\sum_{|\theta-\omega^{(j)}|\leq\pi}\frac{(-1)^j}{2\pi}K_0(i\zeta|x-y^{(j)}|)$$
$$+\frac{\beta}{4\pi^2}\sum_{j,k=0,1}(-1)^{j+k}\sin\beta\varphi_{j,k}\int_0^\infty\frac{K_0(i\zeta z)\,d\eta}{\cosh\beta\eta-\cos\beta\varphi_{j,k}}$$

$$2i\widehat{G_{(\alpha)}}(x,y,\tau) = \sum_{|\theta-\omega^{(j)}|\le\pi} (-1)^j J_0\left(\tau|x-y^{(j)}|\right) + \frac{\beta}{2\pi}\sum_{j,k=0,1}(-1)^{j+k}\sin\beta\varphi_{j,k}\int_0^\infty \frac{J_0(\tau Z)\,d\eta}{\cosh\beta\eta-\cos\beta\varphi_{j,k}}$$

$$2i\widehat{G_{(\alpha)}}(y,y,\tau) = 1 + \sum_{0<|\omega-\omega^{(j)}|\le\pi}(-1)^j J_0\left(2\tau s\sin\frac{|\omega-\omega^{(j)}|}{2}\right) + \frac{\beta}{2\pi}\sum_{j,k=0,1}(-1)^{j+k}\sin\beta\varphi_{j,k}\int_0^\infty \frac{J_0\left(2\tau s\cosh\frac{\eta}{2}\right)}{\cosh\beta\eta-\cos\beta\varphi_{j,k}}\,d\eta$$

ここで、
$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\alpha} \\ \begin{cases}\omega^{(2k-1)} = 2k\alpha\pi-\omega \\ \omega^{(2k)} = 2k\alpha\pi+\omega\end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z}) \qquad y^{(j)} \leftrightarrow (s,\ \omega^{(j)}) \quad \varphi_{j,k} = \theta+(-1)^j\omega+(-1)^k\pi \\ Z^2 = r^2+s^2+2rs\cosh\eta \\ |x-y^{(j)}|^2 = r^2+s^2-2rs\cos(\theta-\omega^{(j)}) \end{cases}$$

$$2i\,M_f(\tau) = \int_{\Omega_{(\alpha)}} f(y)\,dy - \frac{1}{2\tau}\int_{\partial\Omega_{(\alpha)}} f(y)\,dS_y + O\left(|f|_2\,\tau^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (\tau\to\infty)$$

証明　$M_f(\tau)$ の評価は、部分積分と Bessel 函数の性質から従う。Prop. 7 の $V(x,y,\zeta)$ についてだけ簡単に述べる。

$$\begin{cases} V(r,\theta,s,\omega,\zeta) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} V_m(r,s,\omega,\zeta)\sin m\beta\theta \\ \delta(x-y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \psi_m(r,s,\omega)\sin m\beta\theta \end{cases}$$

と展開し、各 V_m を求めると

$$V(r,\theta,s,\omega,\zeta) = \frac{\beta}{i}\sum_{j=1}^{\infty}\begin{cases} H^{(2)}_{m\beta}(\zeta s)J_{m\beta}(\zeta r) & 0<r<s \\ H^{(2)}_{m\beta}(\zeta r)J_{m\beta}(\zeta s) & r>s \end{cases} \sin m\beta\omega\,\sin m\beta\theta$$

が得られる。Bessel 函数の積分表示等を使うと、

$$v=-\frac{1}{4\pi}\int_{c-\infty i}^{0}2\beta\sum_{m=1}^{\infty}I_{m\beta}\left(\frac{\zeta^2 rs}{\xi}\right)\left\{\cos m\beta(\theta-\omega)-\cos m\beta(\theta+\omega)\right\}e^{\frac{\xi}{2}-\frac{\zeta^2(r^2+s^2)}{2\xi}}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{c-\infty i}^{0}e^{\frac{\xi}{2}-\frac{\zeta^2(r^2+s^2)}{2\xi}}\frac{d\xi}{\xi}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{\zeta^2 rs}{\xi}\cos\varphi}\left\{\cos m\beta(\varphi-\theta+\omega)-\cos m\beta(\varphi-\theta-\omega)\right\}d\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{2\beta}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\zeta^2 rs\cosh\eta}{\xi}}\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\beta\pi\left\{\cos m\beta(\theta-\omega)-\cos m\beta(\theta+\omega)\right\}e^{-m\beta\eta}d\eta\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{|\theta-\omega^{(j)}|\leq\pi}(-1)^{j}\int_{c-\infty i}^{0}e^{\frac{\zeta^2 rs\cos(\theta-\omega^{(j)})}{\xi}+\frac{\xi}{2}-\frac{\zeta^2(r^2+s^2)}{2\xi}}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$-\frac{\beta}{8\pi^2}\sum_{\substack{j,k\\=0,1}}(-1)^{j+k}\sin\beta\varphi_{jk}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{d\eta}{\cosh\beta\eta-\cos\beta\varphi_{jk}}\int_{c-\infty i}^{0}e^{-\frac{\zeta^2 rs\cosh\eta}{\xi}+\frac{\xi}{2}-\frac{\zeta^2(r^2+s^2)}{2\xi}}\frac{d\xi}{\xi}$$

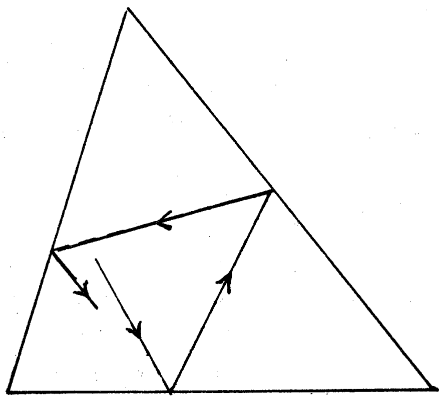
となるが、

$$\int_{c-\infty i}^{0}e^{\frac{\xi}{2}-\frac{z^2}{2\xi}}\frac{d\xi}{\xi}=-2K_0(iz)$$

より、Prop. の形が得られる。 (証明終)

§4. Geodesic billiard

$S^*(\overline{\Omega})=\{(x,\xi)\,;\,x\in\overline{\Omega},\ \xi\in S^1\}$ 内の曲線 $\gamma(s)=(x(s),\ \xi(s))$ が、Ω 内のいくつかの直線を境界での正反射によりつなげたものである時、これを geodesic billiard と呼ぶ。すなわち、或る $\cdots\cdots<s_{j-1}<s_j<s_{j+1}<\cdots$ に対し、



$$\begin{cases} x(s)\in\Omega\quad (s\neq s_j)\ ,\ x(s_j)\in\partial\Omega \\ \dfrac{d}{ds}\big(x(s),\xi(s)\big)=\big(\xi(s),\ 0\big)\qquad s_j<s<s_{j+1} \\ \xi(s_j-0)-\xi(s_j+0)=k_j\ n(x(s_j)) \\ \quad(n\text{ は }\partial\Omega\text{ の法線},\ {}^{\exists}k_j\neq 0)\ 。\end{cases}$$

$(x,\xi)\in S^*(\Omega)$ を通るgeodesicは、一意的に定まり、境界に達した時にtransversalであれば、billiardが定義できる。

$(x,\xi)\in S^*(\Omega)$ が、周期 $p\,(>0)$ の周期点であるとは、$\gamma(p)=\gamma(0)=(x,\xi)$ となるgeodesic billiardが存在する事である。

$$\Lambda_T \Leftarrow S^*(\Omega)\setminus\left\{(x,\xi)\in S^*(\Omega);\ \begin{array}{l}\gamma(0)=(x,\xi)\ \text{となる geodesic billiard}\ \gamma(s)\ \text{が}\ |s|\leqq T\ \text{まで}\\ \text{存在して、}\ 0<|s|\leqq T\ \text{では}\\ \quad\gamma(s)\neq(x,\xi)\end{array}\right\}$$

とおく。

Prop. 8

$^\forall\varepsilon>0$ に対し、$T\Leftarrow\frac{1}{\varepsilon}$ とおくと、$^\exists V_1, V_2$: open $\subset S^*(\Omega)$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\text{meas.}\ V_1\leqq\varepsilon^2\\ \mathrm{dist}\,(V_2,\Lambda_T)>0\\ V_1\cup V_2\supset\{(x,\xi)\in S^*(\Omega)\ ;\ \mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega)\geqq\varepsilon\}\end{cases}$$

すなわち、Λ_T は $S^*(\Omega)$ の中で十分小さい。

証明　Ω を各辺 B_j で次々に折り返す事を考えると、Ω を通る $\mathbb{R}^2$ の直線と、Ω のgeodesic billiardとの間に自然な対応がつく。geodesic billiardが延長できないのは、$\mathbb{R}^2$ で考えた時 Ω（を折り返した多角形）の頂点に達した時だけであり、

また周期的になるのは．丁度 Ω の平行移動になっている折り返し多角形を通る時である。これらの頂点，多角形で Ω からの距離が T 以下のものは有限個であり，対応する $S^*(\Omega)$ の点の集合は．それぞれ滑らかな超曲面（の一部）となる。

（証明終）

§5．定理の証明

「 $\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\tau_0>0$ s.t.

$$\left|N_1(\tau)-\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}|\Omega|\tau^n+\frac{\omega_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}}|\partial\Omega|\tau^{n-1}\right|\leqq\varepsilon\tau^{n-1}\quad(\tau\geqq\tau_0)$$ 」

を示す。

lemma. 9　Tauber型定理（Ivrii）

Def. 2 の $\rho(\tau)$ を考えると．$\forall n=2,3,4,\cdots$ に対し $\exists C>0$ s.t.

「 $m(\tau)$：高々多項式増大の単調非減少奇函数

$$(\rho_\varepsilon * dm)(\tau)=n\,a_0\tau^{n-1}+(n-1)\,a_1\tau^{n-2}+o(\tau^{n-2})\quad(\tau\to\infty)$$

$$\Longrightarrow\quad\left|m(\tau)-a_0\tau^n-a_1\tau^{n-1}\right|\leqq\frac{Ca_0}{\varepsilon}\tau^{n-1}+o(\tau^{n-1})\quad(\tau\to\infty)$$ 」

証明　　両辺を $-\tau$ から τ まで積分すると．

$$(\rho_\varepsilon * m)(\tau)=a_0\tau^n+a_1\tau^{n-1}+o(\tau^{n-1})\qquad(\tau\to\infty)$$

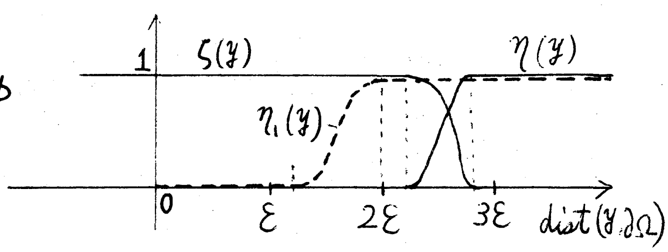
となるが，$\hat{\rho}(t)\equiv1$ $(|t|\leqq\frac{1}{2})$ を考えると．Seeley と同様に．

$$\left|m(\tau)-\rho_\varepsilon * m(\tau)\right| \leqq \frac{Ca_0}{\varepsilon}\tau^{n-1}+O(\tau^{n-2}) \qquad \tau\to\infty$$

を得る。 証明終

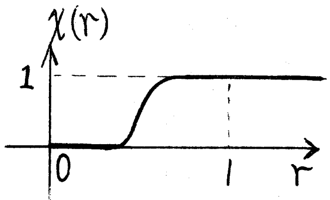
さて、$\varepsilon>0$（十分小）に対し $T=\frac{1}{\varepsilon}$ とおき、Prop. 8 の V_k をとる。 $\Omega_\varepsilon=\{y\in\Omega\,;\, dist(y,\partial\Omega)>\varepsilon\}$ とおき、
非負の函数 $\zeta(y),\ \eta(y),\ \eta_1(y)\in C^\infty(R^n)$, $\tilde{g}^k(y,\omega)\in C_0^\infty(V_k)$ $k=1,2$
を、

$$\begin{cases}\zeta(y)^2+\eta(y)^2\equiv 1\\ supp\ \eta(y)\subset\Omega_{2\varepsilon}\\ supp\ \zeta(y)\cap\overline{\Omega_{3\varepsilon}}=\phi\end{cases}$$



$$\begin{cases}\eta_1(y)\equiv 1 \quad in\ \Omega_{2\varepsilon}\\ supp\ \eta_1(y)\subset\Omega_\varepsilon\end{cases}$$

$$\tilde{g}^1(y,\omega)^2+\tilde{g}^2(y,\omega)^2\equiv 1 \quad (y\in\Omega_\varepsilon)$$



ととる。さらに、

$$\left(\begin{array}{l} g^k(y,\xi)=\eta_1(y)\,\tilde{g}^k\!\left(y,\frac{\xi}{|\xi|}\right)\chi(|\xi|)\\ Q^k(y,D_y)=g^k(y,D_y)\circ\eta(y)\\ P^k(y,D_y)=Q^k(y,D_y)^*\circ Q^k(y,D_y)\end{array}\right) k=1,2$$

$$\begin{cases} m^k(x,y,\tau)=\begin{cases}\zeta(y)^2 m(x,y,\tau) & k=0\\ P^k(y,D_y)\,m(x,y,\tau) & k=1,2\end{cases}\\ N^k(\tau)=\int_\Omega m^k(y,y,\tau)\,dy\end{cases}$$

とおくと、

lemma. 10

(1) 各 $N^k(\tau)$ は、高々多項式増大の非減少奇関数

(2) $$N_1(\tau)-\sum_{k=0}^{2} N^k(\tau)=\begin{cases} O(\tau^{n-2}) & n\geqq 3 \\ O(\log\tau) & n=2 \end{cases} \quad (\tau\to\infty)$$

(3) $P^k(y,\xi)\sim\sum_{j\geqq 0} P^k_{-j}(y,\xi)$ とすると（P^k_{-j} は $-j$ 次正斉次）

$$\begin{cases} P^k_0(y,\xi)=\tilde{g}^k(y,\frac{\xi}{|\xi|})\,\eta(y) \\ P^1_0(y,\xi)+P^2_0(y,\xi)=\eta(y)^2 \\ P^1_{-1}(y,\xi)+P^2_{-1}(y,\xi)=0 \end{cases}$$

まず、$N^0(\tau)$ については、Prop.3 と lemma 9 より

① $$\begin{cases} |N^0(\tau)-a^0_0\tau^n-a^0_1\tau^{n-1}|\leqq \frac{C|\partial\Omega|}{\delta}\varepsilon\tau^{n-1}+o(\tau^{n-1}) \quad (\tau\to\infty) \\ a^0_0=(2\pi)^{-n}\omega_n\int_\Omega \zeta(y)^2dy \quad (\leqq C'|\partial\Omega|\varepsilon) \\ a^0_1=-4^{-1}(2\pi)^{1-n}\omega_{n-1}|\partial\Omega| \end{cases}$$

$N^1(\tau)$, $N^2(\tau)$ については、§2 と同様に

$$u^k(x,y,t)=\frac{1}{2}\mathcal{F}[dm^k(x,y,\tau)](t)$$

とおくと、

$$u^k(x,y,t)=P^k(y,D_y)\,u(x,y,t)$$

となる。$P^k(y,D_y)$ の形より、

$$u^k(x,y,t)=P^k(y,D_y)\,u_0(x,y,t) \qquad |t|\leqq\varepsilon \text{。}$$

ここで，$u_0(x,y,t)$ は，全空間 $\mathbb{R}^n$ での基本解である。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)\, u_0(x,y,t) = 0 \\ u_0(x,y,0) = \delta(x-y) \ , \quad \partial_t u_0(x,y,0) = 0 \end{cases} .$$

lemma 11.　$l = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対し

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{P}_\varepsilon(t) P^k(y, D_y) u_0(x,y,t)\right](\tau)\Big|_{x=y} = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\tau^{n-1-j}}{2(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} P_{-j}(y,\omega)\, d\omega + O(\tau^{n-1-l}) \quad (\tau \to \infty)$$

したがって

$$② \quad \begin{cases} P_\varepsilon * dN^k(\tau) = n\, a_0^k\, \tau^{n-1} + (n-1)\, a_1^k\, \tau^{n-2} + O(\tau^{n-3}) \quad (\tau \to \infty) \\ a_j^k = \frac{1}{n-j} (2\pi)^{-n} \int_{\Omega \times S^{n-1}} P_{-j}^k(y,\omega)\, d\omega\, dy \end{cases}$$

となる。

lemma 10-(3) より

$$a_0^1 \leqq C\varepsilon^2 , \quad a_0^2 \leqq C|\Omega|$$

であるから，

$$③ \quad \left| N^1(\tau) - a_0^1 \tau^n - a_1^1 \tau^{n-1} \right| \leqq C\varepsilon\tau^{n-1} + o(\tau^{n-1}) \quad (\tau \to \infty) .$$

lemma 12

$$\left(\text{sing. supp.} \int_\Omega U^2(y,y,t)\, dy\right) \cap \{|t| < T\} = \{0\}$$

証明 $$\mathrm{WF}\int_{\Omega} u^2(y,y,t)\,dy \subset \left\{(t,\pm 1)\,;\ \begin{array}{l} {}^{\exists}(y,\eta)\in S^*(\Omega) \\ (y,y,t\,;\,\eta,-\eta,\pm 1)\in \mathrm{WF}\,u^2 \end{array}\right\}$$

であるが、V_2 の定義と WF の伝播 (Nirenberg §9) により、$t \neq 0$ ではこの形の WF $u^2(x,y,t)$ は無い。　　証明終

このLemmaにより、$P_\varepsilon(\tau)$ を $P_T(\tau)$ で置き換えても ② と同様の評価を得る。したがって

④ $$\left| N^2(\tau) - a_0^2\tau^n - a_1^2\tau^{n-1} \right| \leqq C|\Omega|\varepsilon\tau^{n-1} + o(\tau^{n-1}) \quad (\tau\to\infty).$$

①, ③, ④ と lemma. 10-(2) より

$$\left| N_1(\tau) - \sum_{k=0}^{2} a_0^k\tau^n - \sum_{k=0}^{2} a_1^k\tau^{n-1} \right| \leqq C_\Omega\varepsilon\tau^{n-1} + o(\tau^{n-1}) \quad (\tau\to\infty).$$

lemma 10-(3) より

$$\sum_{k=0}^{2} a_0^k = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}|\Omega|\ ,\quad \sum_{k=0}^{2} a_1^k = -\frac{\omega_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}}|\partial\Omega|$$

となっている。　　証明終

参考文献

AGMON, S., Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. Arch. Rational Mech. Anal. 28(1968), 165-183.

BAILEY, P.B.--BROWNELL, F.H., Removal of the log factor in the asymptotic estimates of polygonal membrane eigenvalues. J.Math. Anal. Appl. 4 (1962), 212-239.

BÉRARD, P.H., Spectres et groupes cristallographiques I: domaines euclidiens. Invent. Math. 58(1980), 179-199.

DUISTERMAAT, J.J.--GUILLEMIN, V., The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. Math. 29(1975), 39-79.

FEDOSOV, B.V., Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplacian in the case of a polygonal region. Dokl. Akad. Nauk SSSR 151(1963), 786-789 =Soviet Math. Dokl. 4, 1092-1096.

IVRII, V. YA., Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. Funkts. Anal. Prilozhen. 14-2 (1980), 25-34 (98-106 in English transl.).

MELROSE, R.B., Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary. GEOMETRY OF THE LAPLACE OPERATOR (Proceedings of Symposia in Pure Math. 36), Amer. Math. Society, Providence, R. I., (1980), 257-274.

NIRENBERG, L., Lectures on linear partial differencial equations. (Regional conference series in math. no.17), Amer. Math. Society, Providence, R. I., 1973.

PHAM THE LAI, Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres relatifs au Laplacien. Math. Scand. 48 (1981), 5-38.

SEELEY, R., A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$. Adv. in Math. 29 (1978), 244-269.