数理解析研究所講究録
第 530 巻 1984 年 17-23

楕円型作用素のスペクトラル関数に対する漸近評価とその応用

大阪大学理学部　辻本順一（Jun-ichi Tsujimoto）

ここで得られた結果は，著者の論文［1］のある種の拡長であって，それを§1において述べる。又，§2において
その応用を述べる。

§1

Ω を R^n の中の開集合とする。$\{A^\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<1)$ を $L^2(\Omega)$ 上の正定値自己共役作用素の族とする。ここで $\{A^\varepsilon\}$ に対して次のような仮定をおく。

(1) $\mathcal{D}(A^\varepsilon) \supset C_0^\infty(\Omega)$ であって，$u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対しては

$$A^\varepsilon u = A^\varepsilon(x,D)\,u$$

ここで，$A^\varepsilon(x,D)$ は $2m$ 階の楕円型偏微分作用素である

$$A^\varepsilon(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^\varepsilon(x)\, D^\alpha$$

$$a_\alpha^\varepsilon \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$$

又，ε によらず一様に楕円型であるとする，つまり

$$A_{2m}^{\varepsilon}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha}^{\varepsilon}(x)\,\xi^{\alpha} \geqq C|\xi|^{2m}$$

（ C は ε によらない ）

(ii) A^{ε} の Green 関数 $G_{\lambda}^{\varepsilon}(x,y)$ に対して，ε によらず次の評価が成立する。

$$|G_{\lambda}^{\varepsilon}(x,y)| \leqq \begin{cases} C_1 |\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} \exp(-C_2 |x-y|\,|\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m>n) \\ C_1 |x-y|^{2m-n} \exp(-C_2 |x-y|\,|\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m<n) \\ C_1 \{1+\log^{+}(|\lambda|^{-1/2m} |x-y|^{-1})\} & \\ \quad \times \exp(-C_2 |x-y|\,|\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m=n) \end{cases}$$

$\forall x, y \in \Omega$,

$\forall \lambda \in \Lambda = \{ z : \theta \leqq \arg z \leqq 2\pi - \theta,\ |\lambda| \geqq C_3,$

$\theta \in (0, \pi/2),\ C_3 > 0 \}$

さらに，$A^{\varepsilon}(x,D)$ の係数に対して，次の仮定をおく。

(iii) $|D_x^{\beta} a_{\alpha}^{\varepsilon}(x)| \leqq C_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{-2m+|\alpha|-|\beta|}$

以上の３つの仮定のもとに，A^{ε} のスペクトラル関数 $e^{\varepsilon}(x, y, t)$ に対して，次の定理を得る。

定理１

スペクトラル関数 $e^{\varepsilon}(x,x,t)$ に対して，次の評価が成立

する。

$$| e^{\varepsilon}(x,x,t) - c^{\varepsilon}(x)\, t^{\frac{n}{2m}} | \leqq C(\varepsilon \wedge \delta(x))^{-1}\, t^{\frac{n-1}{2m}}$$

ここで

$$c^{\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{A_{2m}^{\varepsilon}(x,\xi)<1} d\xi$$

$$\delta(x) = \min\{1,\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)\}$$

上の定理を証明するさいの基本的アイデアは[1]と同じである。つまり，双曲型方程式 $D_t + (A^{\varepsilon})^{\frac{1}{2m}}$ の基本解をフーリエ積分で表現することである。つまり，基本解を $\hat{E}^{\varepsilon}(t)$ とすると．

$$\hat{E}^{\varepsilon}(t)u \sim \iint g^{\varepsilon}(t,x,y,\xi)\, e^{i\varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi) - it\, a^{\varepsilon}(y,\xi)}\, u(y)\, dy\, đ\xi 。$$

ここで

$$a^{\varepsilon}(y,\xi) = (A_{2m}^{\varepsilon}(y,\xi))^{1/2m}, \quad đ\xi = (2\pi)^{-n} d\xi .$$

又，Phase function $\varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi)$ は次の条件を満足するものである．

(1) $a^{\varepsilon}(x, \nabla_x \varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi)) = a^{\varepsilon}(y,\xi)$

(2) $\varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi) = 0$ when $\langle x-y, \xi\rangle = 0$

(3) $\nabla_x \varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi)|_{x=y} = \xi$

(4) $\varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi) = |\xi|\, \varphi^{\varepsilon}(x,y,\xi/|\xi|)$ 。

よって，定理1の証明には，次の補題が重要になる．

補題 1

$^\forall x_0 \in \Omega$ に対して、

$$B^{\varepsilon}(x_0) = \{ x : |x - x_0| < d(\delta(x_0) \wedge \varepsilon) \}$$

とする。d を適当にとると、(1)〜(5) を満足する φ^{ε} が $C^{\infty}(B^{\varepsilon}(x_0) \times B^{\varepsilon}(x_0) \times (R^n - \{0\}))$ で存在して、次の評価を満足する。

$$|D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \varphi^{\varepsilon}(x, y, \xi)| \leqq C_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{(1-|\alpha|)} |\xi|^{1-|\beta|}$$

$$^\forall x, y \in B^{\varepsilon}(x_0), \quad ^\forall \xi \in R^n - \{0\}.$$

§ 2

ここでは、Ω は限定円錐条件をもつ有界領域とする。

Ω 上で、対称な 2 次形式

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v}\, dx$$

$$(2m > n, \quad a_{\alpha\beta} \text{ は有界可測 })$$

を考える。B に対して、次の仮定をおく。

$$B[u, u] \geqq \delta \|u\|_m^2 \qquad (\delta > 0)$$

$$^\forall u \in V$$

ここで、V は $\mathring{H}_m(\Omega) \subset V \subset H_m(\Omega)$ を満足する、$H_m(\Omega)$ の閉部分空間である。

そして、B より生成される $L^2(\Omega)$ 上の正定値自己共役作用

素をAとする。研究の目的は、Bの最高階の係数にのみ、なめらかさの仮定をして、Aの固有値の漸近分布のremainder estimateを出すことである。

$0<\tau<\infty$ に対して、$\mathcal{B}^{\tau}(\Omega)$ なる関数空間を次のように定義する。

$f \in \mathcal{B}^{\tau}(\Omega) \Longleftrightarrow {}^{\forall}\alpha,\ |\alpha| \leqq [\tau]$　$\partial_x^{\alpha} f$ は Ω で有界連続

$\dot{\tau} = \tau - [\tau] > 0$ のときは $|\alpha| = [\tau]$ なる α に対して、

$|\partial_x^{\alpha} f(x) - \partial_x^{\alpha} f(y)| \leqq C\,|x-y|^{\dot{\tau}}$

が成立する。

<u>Bの係数に対する仮定</u>

${}^{\exists}\Omega_1 \supset \bar{\Omega}$

$|\alpha| = |\beta| = m,\qquad a_{\alpha\beta} \in \mathcal{B}^{\tau}(\Omega_1)$

Aの固有値全体を $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ とし、$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqq t} 1$ とする。その時、次の定理をうる。

定理2

$t \to \infty$ のとき、$0 < \theta < \tau/(\tau+1)$ なる θ に対して、次の漸近公式をうる。

$$N(t) = c_0\, t^{\frac{n}{2m}} + O\left(t^{\frac{n-\theta}{2m}}\right)$$

注. ここでの結果は [2] の評価より, よくなっている.

この定理の証明方法は, 定理1を応用することである.

ρ_ε を軟化子として

$$a_{\alpha\beta}^{\varepsilon} = a_{\alpha\beta} * \rho_\varepsilon \quad とする。$$

そのとき

$$B^{\varepsilon}[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(x) D^{\alpha}u \overline{D^{\beta}v} \, dx$$

なる対称な2次形式を考える。

B^{ε} より生成される自己共役作用素を A^{ε} とする. A^{ε} の Green 関数を $G_{\lambda}^{\varepsilon}(x, y)$ とすると, [2] の補題5.1の証明と同様にすれば, 次の評価をえる.

$$(2.1) \quad |G_{\lambda}^{\varepsilon}(x, y)| \leqq C|\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} \exp(-C_2|x-y||\lambda|^{\frac{1}{2m}})$$

A^{ε} のスペクトル関数を $e^{\varepsilon}(x, y, t)$ とすると, 定理1を応用することによって, 次の評価をえる。

$$(2.2) \quad |e^{\varepsilon}(x, x, t) - C^{\varepsilon}(x) t^{\frac{n}{2m}}| \leqq C(\varepsilon \wedge \delta(x))^{-1} t^{\frac{n-1}{2m}}$$

A の Green 関数を $G_{\lambda}(x, y)$ とすると, 次の補題が成立する.

補題2

$\forall p > 0$ に対して, C_p が存在して

$$|G_\lambda(x,x) - G_\lambda^\varepsilon(x,x)|$$
$$\leq C_p\left\{ \frac{|\lambda|^{\frac{n}{2m}}}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{\delta(x)\ d(\lambda)} \right)^p + \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2 \left[\varepsilon^\tau |\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} + |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \right] \right\}$$

ここで $d(\lambda) = \mathrm{dist}(\lambda, \mathbb{R}_+)$

(2.2) と補題2を使って，定理2をえる方法は，[2] と同じである。

文献

[1] J. Tsujimoto, On the asymptotic behavior of spectral functions of elliptic operators, Japan. J. Math. Vol. 8, (1982) 177–210.

[2] J. Tsujimoto, On the remainder estimates of asymptotic formula for eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 557–569.