数理解析研究所講究録
第530巻 1984年 71-90

斉次多項式が定める非線型方程式の解の分岐特異性

京大数理研
亀谷 睦 (Makoto Kametani)

序

複素 $(n+1)$ 次元空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ における原点の連結開近傍を Ω とする。Ω 上の正則函数全体の作る環 $\mathcal{O}(\Omega)$ から，Ω 上の ℓ 階のジェット束 $J^{\ell}(\Omega)$ を作る ($\ell\in\mathbb{N}$)。又，原点を通る Ω 内の非特異な解析的超曲面 S の定義方程式を $\varphi(z)=0$ とする：

$$S=\{z\in\Omega\ ;\ \varphi(z)=0\}\quad \text{かつ}\quad S\text{上で}\ d\varphi\neq 0.$$

さて，ジェット束 $J^{\ell}(\Omega)$ 上の正則函数 $a=a(z;(y_{\alpha})_{|\alpha|\leq\ell})$ に対して次のような ℓ 階の非線型方程式を考える。

$$(1)\qquad a(z;(\partial^{\alpha}u(z)))=\varphi^{\sigma}g\ .$$

a および S, σ, g に関して次の仮定 I～IV をおく (正確な定義は §1. で述べる)：

I. a はファイバー方向に m 次の斉次多項式函数である。

II. 超曲面 S は，a に関して非特性的である。

III. σは複素数であるが，mの負の整数倍ではない。
IV. gは原点に於ける正則函数芽であり，原点で消えない。
仮定IIIおよびIVから，方程式(1)の右辺$\varphi^\sigma g$は、原点のある近傍からSを除いた領域で定義された多価解析函数とみなされる。

このノートの目的は，方程式(1)が

$$(2) \qquad u = \varphi^{q} v \qquad q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \cdots, \ell-1\}$$

v；原点における正則函数芽で，$v|_S \neq 0$

の形の解をもつ為の必要十分条件を与えることにある。

このノートの構成を述べる。§1. では仮定I・IIの正確な定義を述べる。§2. で主定理を述べ，合わせてこのような問題設定に至った背景を説明する。§3. では，主定理の仮定をみたさない場合（即ち仮定IIIをみたさないσとか，$q \in \{0, \cdots, \ell-1\}$の場合）の様子をみる為，若干の例をあげる。最後に，§4. において主定理の証明を行なう。

§1. 準備的考察

序で予告したように，仮定I・IIの正確な定義を述べることから始める。

原点の連結開近傍Ω上のジェット束$J^\ell(\Omega)$はベクトル束だから各ファイバー$J^\ell_z(\Omega)$はベクトル空間，したがって「$J^\ell_z(\Omega)$

上の多項式函数」という概念が意味をもつ：

<u>定義1.1</u>　Eを$\mathbb{C}$上の有限次元ベクトル空間とする時，函数 $f: E \to \mathbb{C}$ がE上の多項式函数であるとは次のことをいう：Eの任意の基底 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ に対して，N変数の多項式 $F(X) \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_N]$ が存在して

$$(1.1) \qquad f\Big(\sum_{j=1}^{N} x_j e_j\Big) = F(x_1, \cdots, x_n)$$
$$\forall x_j \in \mathbb{C} \quad ; \quad j = 1, \cdots, N$$

がなりたつ。Fの次数 $\deg F$ を多項式函数 f の次数といい，$\deg f$ であらわす。

上の $\deg f$ の定義がEの基底のとり方に依らないことは容易にわかる。

<u>定義1.2</u>　ジェット束 $J^\ell(\Omega)$ 上の正則函数 a がファイバー方向に多項式函数であるとは，$\forall z \in \Omega$ に対して z 上のファイバー $J^\ell_z(\Omega)$ への制限 $a|_{J^\ell_z(\Omega)}$ が定義1.1の意味で多項式函数となることをいう。又，a の次数 $\deg a$ を次式で定義する：

$$(1.2) \qquad \deg a := \sup_{z \in \Omega} \deg\big(a|_{J^\ell_z(\Omega)}\big).$$

この定義が well-defined であることは：

<u>補題1.3.</u>　ファイバー方向に多項式函数であるような $a \in \mathcal{O}(J^\ell(\Omega))$ に対して，次がなりたつ。

$$(1.3) \qquad \sup_{z\in\Omega} \deg(a|_{J^\ell_z(\Omega)}) < +\infty .$$

証明：函数 $\alpha : \Omega \ni z \mapsto \deg(a|_{J^\ell_z(\Omega)}) \in \mathbb{N}$ は下半連続だから，$E_j := \{z\in\Omega;\ \alpha(z) \leqq j\}$ $(j\in\mathbb{N})$ はΩの閉集合。Ωにおける相対コンパクトな開集合Ω'をとり，$E_j' := E_j \cap \overline{\Omega'}$ $(j\in\mathbb{N})$ とおけば，$\overline{\Omega'} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j'$ がなりたつ。したがってBaireのカテゴリー定理から，あるmが存在してE_m'は$\overline{\Omega'}$の内点を含む。即ち，多項式函数 $a|_{J^\ell_z(\Omega)}$ の$(m+1)$次以上の係数（それらはzの正則函数である）はΩのある開集合の上で消える。Ωは連結だったから，解析接続の一意性を使えばそれらの係数はΩ全体で消えている。つまり，(1.3)の左辺はmでおさえられる。（終）

以上で，仮定Iでの言葉づかいのうち「aはファイバー方向にm次の多項式函数」の部分がハッキリした。つまり，$m = \deg a$ のとき，aはΩ上で

$$(1.4) \qquad a(z;y) = \sum_{|\beta|\leqq m} a_\beta(z) y^\beta$$

という表示をもつ。但し，ファイバー変数 $y = (y_\alpha)_{|\alpha|\leqq\ell}$ に対し

$$(1.5) \qquad \begin{cases} y^\beta = \prod_{|\alpha|\leqq\ell} y_\alpha^{\beta_\alpha} \\ \beta = (\beta_\alpha)_{|\alpha|\leqq\ell} \in \mathbb{N}^{\#\{\alpha:\,|\alpha|\leqq\ell\}}, \quad |\beta| = \sum_{|\alpha|\leqq\ell} \beta_\alpha \end{cases}$$

とおいた。a_β は Ω 上の正則函数である。

<u>定義1.4</u>　ファイバー方向に m 次の多項式函数であるような $a \in \mathcal{O}(J^\ell(\Omega))$ が m 次斉次であるとは，$\forall z \in \Omega$ および $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$(1.6) \qquad a(z;\lambda y) = \lambda^m a(z;y)$$

がなりたつことをいう。但し $(z;y) \longmapsto (z;\lambda y)$ は，ファイバー $J_z^\ell(\Omega)$ での複素数 λ をかけるという演算である。

次に仮定IIの説明に移る。a は仮定Iをみたす $\mathcal{O}(J^\ell(\Omega))$ の元だとする。

<u>定義1.5</u>　a の特性多項式 $p_a(z;\xi)$ を次で定義する：

$$(1.7) \qquad p_a(z;\xi) := a(z;y)\Big|_{y_\alpha = \begin{cases} 0 & (|\alpha| < \ell \text{ のとき}) \\ \xi^\alpha & (|\alpha| = \ell \text{ のとき}) \end{cases}}$$

ここで $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ は $z = (z_0, \cdots, z_n)$ の双対な変数であり，$\xi^\alpha = \xi_0^{\alpha_0} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^{n+1})$ とした。線型（即ち仮定Iで $m=1$）の場合と同様に，p_a は Ω の余接束 $T^*\Omega$ 上の函数として座標系 $(z;\xi)$ のとり方に依らない概念であり，各ファイバー $T_z^*\Omega$ 上で ξ に関して $m\ell$ 次の斉次多項式函数となる。

次に，S は原点を通る Ω 内の非特異な解析的超曲面だとし，その定義方程式を $\varphi(z) = 0$ とする。

定義1.6　SがΩにおいてaに関して非特性的であるとは，次がなりたつことをいう：

(1.8)　　$p_a(z;d\varphi(z)) \neq 0 \quad \forall z\in\Omega$

例1.7　$l=1$, $m=2$, $z=(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2$の時を考える：ジェット束$J^1(\Omega)$の座標系として

$$(z;y)=(z_0,z_1;y_{(0,0)},y_{(1,0)},y_{(0,1)})$$

がとれ，仮定Ⅰをみたす$a\in\mathcal{O}(J^1(\Omega))$は次の表示をもつ。

$$\begin{aligned} &a(z;y)\\ &= a_{(0,2,0)}y_{(1,0)}^2 + a_{(0,1,1)}y_{(1,0)}y_{(0,1)} + a_{(0,0,2)}y_{(0,1)}^2\\ &\quad +\{a_{(1,1,0)}y_{(1,0)} + a_{(1,0,1)}y_{(0,1)} + a_{(2,0,0)}y_{(0,0)}\}y_{(0,0)}\end{aligned}$$

したがって

$$p_a(z;\xi) = a_{(0,2,0)}\xi_0^2 + a_{(0,1,1)}\xi_0\xi_1 + a_{(0,0,2)}\xi_1^2$$

となる。とくに超曲面$\{z: z_0=0\}$がaに関して非特性的となる為の条件は，　$a_{(0,2,0)}(z)\neq 0$である。

§2.　主定理と問題設定の背景

仮定Ⅰ～Ⅳをみたす(a,S,σ,g)を与える。Sの定義方程式を$\varphi(z)=0$とする。以後，記号${}_{n+1}\mathcal{O}$で原点における正則函数芽の作る（局所）環をあらわすことにする。

次の方程式を考える。

$$(2.1)\qquad a(z;(\partial^\alpha[\varphi^q v])_{|\alpha|\leq l}) = \varphi^\sigma g$$

このとき，主定理は次の通り：

<u>定理 2.1.</u>　もし $q\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,\cdots,l-1\}$ であれば，次の3条件 [A] [B] [C] は同値となる。

[A]　方程式 (2.1) の解 $v\in{}_{n+1}\mathcal{O}$ で，$v|_S\not\equiv 0$ となるようなものが存在する。

[B]　q は

$$q=(\sigma/m)+l$$

をみたす。

[C]　方程式 (2.1) の解 $v_0\in{}_{n+1}\mathcal{O}$ で，次の2条件 (i) (ii) をみたすものが存在する：

(i)　v_0 の原点での値は次をみたす：

$$v_0(0)^m = \left\{\prod_{i=0}^{l-1}(q-i)\right\}^{-m} P_a(0;d\varphi(0))^{-1} g(0)$$

(ii)　方程式 (2.1) の ${}_{n+1}\mathcal{O}$ に属する解全体は

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}\bigcup_{k\in\{0,1,\cdots,m-1\}}\left\{e^{2\pi\sqrt{-1}(k+r\sigma)/m}\,v_0\right\}$$

と一致する。

さて，問題設定の背景 ― (2.1) の形の方程式をとりあげる理由 ― を説明する。

仮定 I・II をみたす (a, S) を与える。S は非特異だから，原点の近傍で適当な座標変換を施せば $S=\{z\in\Omega\,;\, z_0=0\}$ だと思ってよい。このとき，次の Cauchy 問題を考える。

$$(2.2)\quad \begin{cases} a(z\,;\,(\partial^\alpha u(z))_{|\alpha|\leq \ell}) = f \in {}_{n+1}\mathcal{O} \\ \partial_0^k u(0, z') \equiv 0 \qquad 0 \leq {}^\forall k \leq \ell-1 \end{cases}$$

初期値を零としているから

$$a(z\,;\,(\partial^\alpha u(z)))\Big|_{z_0=0} = p_a(0\,;1,0,\cdots,0)\,\{\partial_0^\ell u(0)\}^m = f(0)$$

がなりたつ。したがって，$p_a(0\,;1,0,\cdots,0)\neq 0$ (仮定 II) から，もし右辺 f が条件

$$(2.3)\qquad f(0)\neq 0$$

をみたせば，(2.2) は次のような正規形の問題に還元される：

$$(2.2)'_j\quad \begin{cases} \partial_0^\ell u = F_j(z\,;\,(\partial_0^k \partial_{z'}^{\alpha'} u(z))_{\substack{k<\ell \\ k+|\alpha'|\leq \ell}}) \\ \partial_0^k u(0, z') \equiv 0 \qquad 0 \leq {}^\forall k \leq \ell-1 \end{cases}$$

ここで F_j $(j=0,\cdots,m-1)$ は正則函数芽であって，$\mathbb{C}$ の有限部分集合 $\{F_j(0)\,;\ j=0,\cdots,m-1\}$ が $p_a(0\,;1,0,\cdots,0)^{-1}f(0)$ $(\neq 0)$

の m 乗根全体と一致するようにとる。各 $(2.2)'_j$ は，Cauchy-Kowalevsky の定理から唯ひとつの正則解をもち，もとの方程式 (2.2) はちょうど m 個の解 $u_0, \cdots, u_{m-1} \in {}_{n+1}\mathcal{O}$ をもつことがわかる。

そこで条件 (2.3) を否定してみる。即ち次を仮定する：

$$(2.4) \qquad f(0) = 0$$

このときには、もはや (2.2) の正則解の存在は一般に期待できない。たとえば，次のような例が直ちに作れる：

例 2.2　次のような Cauchy 問題を考える： $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍で

$$(2.5) \qquad \begin{cases} (\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2 = z_1^3 + \frac{9}{4} z_0^2 z_1 \\ u(0, z_1) \equiv 0 \end{cases}$$

の解として $u = z_0 z_1^{3/2}$ がとれる。この解は $S \setminus \{0\} = \{(0, z_1) ; z_1 \neq 0\}$ の各点の近傍で解析的な解を与えるが，原点までは正則に延びない。

上の例では，方程式 (2.5) の右辺 f は

$$f(z) = z_1 (z_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{-1}\, z_0)(z_1 - \tfrac{3}{2}\sqrt{-1}\, z_0)$$

であるから，f の零点集合は 3 つの既約成分が原点で重なったものになる。一般に、条件 (2.4) をみたす f の零点集合は

(原点において) Weierstrass の予備定理が教えるような特異性をもち得る。又，(2.4) をみたすだけなら $f \equiv 0$ であっても構わない。つまり，条件 (2.4) をみたす f は，f の零点集合の幾何学的な様相だけに着目して形式的に分類したとしても，次のように多種多様になる：

(i) $f \equiv 0$ の場合。

(ii) $\{z;\ f=0\} \ni 0$ が特異点の場合。

(iii) $\{z;\ f=0\} \ni 0$ が通常点で，$\{z;\ f=0\}$ が初期面 S と一致しない場合。

(iv) $\{z;\ f=0\} \ni 0$ が通常点で，$\{z;\ f=0\}$ が初期面 S と一致する場合。

そこで，以下の話を最も簡単だと（筆者には）思われる (iv) の場合に限定する。つまり f の形を

$$(2.6) \qquad f(z) = z_0^{\sigma} g \qquad \left(\begin{array}{l} \sigma \in \mathbb{N} \setminus 0 \\ g \in {}_{n+1}\mathcal{O} \text{ は原点で消えない} \end{array} \right)$$

であると仮定する。このとき，もし Cauchy 問題 (2.2) の正則解が存在すれば，それは

$$u = z_0^{q} v \qquad \left(\begin{array}{l} v \in {}_{n+1}\mathcal{O},\ v|_S \not\equiv 0 \\ q：\text{自然数で} \geqq l \end{array} \right)$$

という形をとらねばならないことが，初期条件からわかる。

こうして，右辺 f を (2.6) の形に限って Cauchy 問題の正則解を求めることが，次の方程式

$$(2.7) \qquad a(z;(\partial^\alpha[z_0^q v])_{|\alpha|\leq \ell}) = z_0^\sigma g$$

の解 v を，条件 $v|_S \neq 0$ の下で探すことに帰着される。

定理2.1の系として次が容易に得られる：

系2.3 Cauchy 問題(2.2)において，右辺 f は (2.6) の形をしているとする。この時 (2.2) の解が ${}_{n+1}\mathcal{O}$ の中に存在する為の条件は、σ が m でわりきれることである。又，そのような解は、存在するとしても 1 の m 乗根をかける任意性しか持たない。

以上のようにして、方程式(2.1)が設定される。以下では σ や q は、もはや自然数とは限らず，一般に複素数だと考える。即ち，(2.1) は超曲面 S 上に分岐をもつような多価解析函数についての方程式だとみなすことにする。

§3. 例外的な σ や q についての若干の考察

仮定Ⅲでは $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\{-m, -2m, \cdots\}$ と仮定されていた。又，定理2.1 の仮定は $q \in \mathbb{C}\setminus\{0, 1, \dots, \ell-1\}$ だった。この § で

はσやqが例外的な値をとる時には，定理2.1がなりたたないことを実例を通じて確める。

<u>例3.1</u>　$q \in \{0, 1, \cdots, l-1\}$とする。次の方程式

$$(3.1) \qquad (\partial_0^l [z_0^q v])^m - (\partial_0^q [z_0^q v])^m = z_0^\sigma g \qquad (\sigma \in \mathbb{N} \setminus 0)$$

は，${}^\forall c \in \mathbb{C} \setminus 0$に対して$v(0) = c$となる解をもつ。即ち，方程式(3.1)の解$v \in {}_{n+1}\mathcal{O}$は定理2.1の場合より多くなる。

実際，(3.1)を解くには次のような(v, w)についての連立方程式を解けばよい：

$$(3.2) \qquad \partial_0^q [z_0^q v] = w$$

$$(3.3) \qquad (\partial_0^{l-q} w)^m - w^m = z_0^\sigma g .$$

そこで，まず(3.3)を次の初期条件の下で解く。

$$(3.4) \qquad \partial_0^h w(0, z') = w_h \in {}_n\mathcal{O} \qquad 0 \leqq {}^\forall h \leqq l-q-1 .$$

もし$w_0(0) \neq 0$であれば，Cauchy問題(3.3)+(3.4)は，Cauchy-Kowalevskyの定理により解け，${}_{n+1}\mathcal{O}$内にm個の解をもつ。このwに対して，(3.2)をvについて解きたい。

次の関係式を思い出す：作用素の積として

$$(3.5) \qquad \partial_0^h \circ z_0^q = z_0^{q-h} \circ \prod_{i=0}^{h-1} (z_0 \partial_0 + q - i)$$
$$\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \cdots, h-1\}$$

がなりたつ。（この (3.5) は, $\partial_0 \circ z_0 = z_0 \circ \partial_0 + 1$ に注意すれば, k に関する帰納法で容易に示せる。）とくに (3.5) で $k = q$ とおけば, 方程式 (3.2) は

$$(3.2)' \qquad \Big\{\prod_{j=1}^{q} (z_0\partial_0 + j)\Big\} v = w$$

と同値。ところが作用素 $P(z_0\partial_0) := \prod_{j=1}^{q} (z_0\partial_0 + j)$ の特性根（即ち $P(\lambda)=0$ の根 λ）は $\mathbb{N}$ に属さないから, Fuchs型の常微分方程式論で良く知られているように (3.2)′ は解ける。とくに解 v は $q!\,v(0) = w(0)$ をみたし, $w(0) = w_0(0)$ は $\mathbb{C}\setminus 0$ の任意の値に指定できたから, $v(0)$ もそうである。(終)

次に $\sigma \in \{-m, -2m, \cdots\}$ の場合を考える：

<u>例3.2</u> 次の方程式

$$(3.6) \qquad (\partial_0^{\ell}[z_0^{q} v])^{m} = z_0^{-km} \qquad k \in \mathbb{N}\setminus 0$$

が解ける為には, (q, k, ℓ) および g の m 乗根 $\tilde{g} \in {}_{n+1}\mathcal{O}$ に関して次の条件 (3.7)・(3.8) が必要である：

$$(3.7) \qquad \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \ni q = -k + \ell \ \Big(\equiv \frac{-km}{m} + \ell\Big)$$

$$(3.8) \qquad \partial_0^{k-j}\tilde{g}(0, z') = 0 \in {}_{n}\mathcal{O} \qquad (\forall j = 1, \cdots, \ell)$$

即ち, 定理2.1の条件 [B]（今の場合は (3.7) に相当する）

および $g(0)\neq 0$ だけでは，方程式(3.6)は解けない。

実際，方程式(3.6)は g のある m 乗根 $\tilde{g}$ に対して

$$(3.6)' \qquad \partial_0^{\ell}[z_0^{q}v] = z_0^{-k}\tilde{g}$$

と同値。この右辺は1価で $z_0=0$ に特異性をもつから，$q\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ である。すると $\tilde{g}(0)\neq 0$ および $v(0,z')\neq 0$ から，$q=-k+\ell$ が必要なこと即ち(3.7)がわかる。

ところで，もし(3.8)がなりたたないと仮定すると，ある $j\in\{1,\dots,\ell\}$ があって $\partial_0^{k-j}\tilde{g}(0,z')\neq 0$．即ち(3.6)′の右辺において z_0^{-j} の係数は零でない。一方(3.6)′の左辺は，$z_0^{-k+\ell}v$ の ℓ 階微分だから，明らかに z_0^{-j} $(1\leq j\leq \ell)$ の項を含まない。これは矛盾である．（終）

§4. 主定理の証明

定理2.1の証明を述べる。[C] ⇒ [A] は明らかだから，[A] ⇒ [B] および [B] ⇒ [C] の2つをいえばよい。

以下の証明では，変数変換により $S=\{z\in\Omega;\ z_0=0\}$ となっているとしてよい。

[A] ⇒ [B]の証明： $\tilde{p}\in{}_{n+1}\mathcal{O}$ を $\tilde{p}(z):=p_a(z;1,0,\dots,0)$ で定めると，仮定IIから $\tilde{p}(0)\neq 0$．したがって $\tilde{p}$ による割り算ができて，$\tilde{p}^{-1}a\in\mathcal{O}(J^{\ell}(\Omega))$ は次の表示をもつ：

$$(4.1)\qquad \tilde{P}(z)^{-1}a(z;y) = y_{(\ell,0)}^{m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{m-j}(z;y')\, y_{(\ell,0)}^{j}\ .$$

但し，Ωの座標系 $z=(z_0, z')$ に応じて，ファイバー方向の変数 $y=(y_\alpha)_{|\alpha|\leqq \ell}$ を

$$y=(y_{(\ell,0)}, y')\ ,\quad y'=(y_{(h,\alpha')})_{h<\ell,\ h+|\alpha'|\leqq \ell}$$

と分けた。ここで b_{m-j} は $(z;y')$ に関して正則で，y'について $(m-j)$ 次斉次である。

さて，(4.1)の右辺に $y=(\partial^\alpha[z_0^{q}v])_{|\alpha|\leqq \ell}$ を代入する。関係式(3.5)を用いれば

$$\partial_0^{\ell}\circ z_0^{q} = z_0^{q-\ell}\circ\{\Pi_{i=0}^{\ell-1}(z_0\partial_0+q-i)\}$$

$$\partial_0^{h}\partial_{z'}^{\alpha'}\circ z_0^{q} = z_0^{q-\ell}\circ z_0^{\ell-h}\{\Pi_{i=0}^{h-1}(z_0\partial_0+q-i)\}\circ\partial_{z'}^{\alpha'}$$

である。そこで ℓ 階の線型および非線型作用素を次の形で導入する：（添字 q は「q 乗」の意ではなく，単に q に依存する意）

$$(4.2)\quad \begin{cases} Q^{q} := \Pi_{i=0}^{\ell-1}(z_0\partial_0+q-i) \\ B_{m-j}^{q}[v](z) := b_{m-j}\Big(z;\big(z_0^{\ell-h}\{\Pi_{i=0}^{h-1}(z_0\partial_0+q-i)\}\partial_{z'}^{\alpha'}v(z)\big)\Big) \\ \qquad\qquad j=0,1,\cdots,m-1 \end{cases}$$

b_{m-j} の斉次性から $z_0^{m(q-\ell)}$ をくくり出すと

$$\tilde{p}(z)^{-1} a(z; (\partial^\alpha [z_0^q v])_{|\alpha|\le \ell}) \tag{4.3}$$
$$= z_0^{m(q-\ell)} \Big[(Q^q v)^m + \sum_{j=0}^{m-1} B_{m-j}^q [v](z) (Q^q v)^j \Big]$$

という表示を得る。又，B_{m-j}^q の定義 (4.2) および $\ell - k \geqq 1$ から

$$B_{m-j}^q [v] \Big|_{z_0 = 0} = 0 \qquad \forall j = 0, \cdots, m-1 \tag{4.4}$$

もわかる。

さて、条件 [A] で存在する解 v および $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \cdots, \ell-1\}$ に対して $K_{q,v} \in {}_{n+1}\mathcal{O}$ を次で定める：

$$K_{q,v}(z) := (Q^q v)^m + \sum_{j=0}^{m-1} B_{m-j}^q [v](z) (Q^q v)^j .$$

表示 (4.3) を使えば，v が方程式 (2.1) の解であることと次とは同値：

$$z_0^{m(q-\ell)} K_{q,v} = z_0^{\sigma} \tilde{p}^{-1} g . \tag{4.5}$$

方程式 (4.5) から，まず

$$m(q-\ell) - \sigma \in \mathbb{Z} \tag{4.6}$$

を示そう。$\varepsilon > 0$ を十分小さく固定し，原点の近くで $S = \{z_0 = 0\}$ を 1 周する閉曲線 $\Gamma : [0,1] \ni \theta \longmapsto (\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}, 0) \in \Omega$ をとる。Γ に沿って (4.5) の両辺を解析接続すると

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\, m(q-\ell)} = e^{2\pi\sqrt{-1}\, \sigma}$$

がわかり，これから (4.6) がいえる。

次に定理 2.2 の条件 [B] を導こう．$x := m(q-\ell) - \sigma$ とおくとき，(4.5) がなりたつということは，

$$z_0^{x+\sigma} K_{q,v} = z_0^{\sigma} \tilde{p}^{-1} g$$

が多価解析函数としてなりたつということである。したがって，ある $r \in \mathbb{Z}$ が存在して，一価函数として

$$z_0^{x} K_{q,v} = \tilde{p}^{-1} g \, e^{2\pi\sqrt{-1}r\sigma}$$

がなりたつ。(4.4) および Q^q の定義 (4.2) から

$$K_{q,v}(0,z') = \left\{ \prod_{i=0}^{\ell-1} (q-i) \right\}^m v(0,z')^m \neq 0$$

となるから，$\tilde{p}^{-1}_{(0)} g(0) \neq 0$ とあわせて，$x = 0$ を得る。即ち，定理 2.1 の条件 [B] がなりたつ。　(終)

<u>[B] ⟹ [C] の証明</u>：　条件 [B] がなりたつから $q = (\sigma/m) + \ell$ である。記述の簡略化の為に，作用素 $Q^{(\frac{\sigma}{m}+\ell)}$ および $B_{m-j}^{(\frac{\sigma}{m}+\ell)}$ $(j=0,\cdots,m-1)$ をそれぞれ Q および B_{m-j} と書く。(定義 (4.2) を参照)

方程式 (2.1) を解くことは，ある $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(4.7)_r \qquad (Qv)^m + \sum_{j=0}^{m-1} B_{m-j}[v]\,(Qv)^j = \tilde{P}^{-1} g\, e^{2\pi\sqrt{-1}\,r\sigma}$$

をみたす $v \in {}_{n+1}\mathcal{O}$ をみつけることに帰着される。ところで条件 (4.4) から，$(4.7)_r$ は次のような正規形に還元される：m 個の正則函数芽 $F_k^{(r)}$ ($k=0,1,\dots,m-1$) が存在して，$(4.7)_r$ は次の m 個の方程式 $(4.8)_{r,k}$ ($k=0,1,\dots,m-1$) の何れかひとつと同等になる：

$$(4.8)_{r,k} \qquad Qv = F_k^{(r)}(z\,;\,(B_{m-j}[v](z))_{0\le j\le m-1}).$$

但し，$F_k^{(r)}$ は，$\mathbb{C}$ の有限部分集合 $\{F_0^{(r)}(0;0),\dots,F_{m-1}^{(r)}(0;0)\}$ が複素数 $\tilde{P}(0)^{-1}g(0)\,e^{2\pi\sqrt{-1}\,r\sigma}$ ($\neq 0$) の m 乗根全体と一致するようにとる。

ここで Baouendi - Goulaouic [1] の一般的結果を引用する。

$z=(z_0,z')\in\Omega$ などの記号は今までと同様とし，$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して

$$A(z',\lambda) := \lambda^l + \sum_{j=0}^{l-1} a_j(z')\,\lambda^j$$

$$a_j \in {}_n\mathcal{O} \qquad (j=0,\dots,l-1)$$

とおく。次の形の l 階の非線型方程式を考える。

$$(4.9) \qquad A(z',z_0\partial_0)\,v = G(z\,;\,((z_0\partial_0)^h\,\partial_{z'}^{\alpha'}[z_0 v])_{\substack{h<l\\ h+|\alpha'|\le l}})$$

ここで，Gはある正則函数芽だとする。

<u>定理4.1　(Baouendi－Goulaouic [1]　Theorem 3.1)</u>

もし　$A(0,\lambda)\neq 0$　$(\forall\lambda\in\mathbb{N})$ であれば，方程式(4.9)は $_{n+1}\mathcal{O}$ 内に唯ひとつの解vをもつ。

我々の方程式 $(4.8)_{r,k}$ は，(4.9)の形に直せる。このことを確めるには，B_{m-j} の定義に戻って次の関係式に注意すれば十分である：

$$(z_0\partial_0-1)^k\circ z_0 = z_0\circ(z_0\partial_0)^k \qquad (\forall k\in\mathbb{N}\setminus 0).$$

又，$(4.8)_{r,k}$ が定理4.1の仮定をみたすことも，σについての仮定Ⅲから次のようにしてわかる：作用素Qに対しては，

$$Q(\lambda) = \prod_{i=0}^{l-1}\left(\lambda+\frac{\sigma}{m}+l-i\right)$$

ととれる。もし，ある $\lambda_0\in\mathbb{N}$ に対して $Q(\lambda_0)=0$ となったとすれば，ある $i_0\in\{0,\cdots,l-1\}$ について

$$\lambda_0+\frac{\sigma}{m}+l-i_0=0$$

即ち

$$\frac{\sigma}{m} = i_0-l-\lambda_0\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$$

となって，仮定Ⅲに反する。

そこで定理4.1を使って方程式 $(4.8)_{0,0}$ を解き，その解を

v_0 とおく。v_0 は方程式 $(4.7)_0$ の解でもあるから，(4.4)に注意すれば

$$(Qv_0)(0)^m = \{\Pi_{i=0}^{l-1}(q-i)\}^m v_0(0)^m = \tilde{P}_{(0)}^{-1} g(0),$$

即ち，定理2.1の条件[C]の(i)がなりたつ。

(ii)をいう為，$(r, k) \in \mathbb{Z} \times \{0, \cdots, m-1\}$ に対して

$$w_{r,k} := e^{2\pi\sqrt{-1}(k+r\sigma)/m} v_0$$

とおく。$w_{r,k}$ が方程式 $(4.7)_r$ の解であることは，方程式の左辺が m 次斉次であることから明らか。しかも，$k \neq k'$ ならば $w_{r,k}(0) \neq w_{r,k'}(0)$ となる。したがって再び定理4.1を用いると，$(4.8)_{r,k}$ の解の一意性から，$\{w_{r,0}, \cdots, w_{r,m-1}\}$ が方程式 $(4.7)_r$ の解全体と一致することがわかる。$r \in \mathbb{Z}$ を動かせば，条件[C]の(ii)が得られる。　(終)

文献

[1] M.S. Baouendi - C. Goulaouic, Singular nonlinear Cauchy problems, J. Diff. Eq. 22, 268-291 (1976)