数理解析研究所講究録
第 530 巻 1984 年 91-100

逆Sturm-Liouville問題について

学習院大理　水谷　明 (Akira Mizutani)

Sturm-Liouville型の固有値問題

$$E(q(x);h,H)\begin{cases} y''(x)+(\lambda-q(x))y(x)=0, & 0<x<\pi \\ y'(0)-hy(0)=0, \; y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \end{cases}$$

を考える。ここで $q(x)$ は $0\le x\le\pi$ で定義された実数値連続関数、h, H は実の定数，λ は実のパラメータとする。

固有値問題 $E(q(x);h,H)$ の固有値を $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots)$ 対応する固有関数を $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ $(\varphi(0,\lambda_n)=1$ と正規化する$)$ とする。正規化定数 ρ_n を　$\rho_n=\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)^2\,dx$，により定めたとき、$\{\lambda_n,\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $E(q(x);h,H)$ の spectral characteristics と呼ぶことにする。

$q(x)$ が $0\le x\le\pi$ で２回連続微分可能で，$q''(x)$ が絶対連続ならば，$\{\lambda_n,\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，漸近式

$$
\begin{cases}
\sqrt{\lambda_n} = n + \dfrac{a_0}{n} + \dfrac{a_1}{n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right), & (1) \\
\quad (\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty) & \\
\rho_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{b_0}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right), \quad \rho_n > 0 & (2) \\
\quad (a_0, a_1, b_0 \text{ は定数}) &
\end{cases}
$$

が成り立つ。

逆 Sturm-Liouville 問題とは，$E(q(x); h, H)$ の固有値 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ などを知って、未知関数 $q(x)$ を求める問題であり、次の Gel'fand-Levitan の定理が基本的である。

<u>Gel'fand-Levitan の定理</u>

漸近式 (1), (2) を満たす $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられたとき、それを spectral characteristics とする固有値問題 $E(q(x); h, H)$ が一意的に存在する。ここで $q(x) \in C^1[0, \pi]$, $h, H \in \mathbb{R}$ である。 □

<u>注意</u>　最小固有値 λ_0 が $\lambda_0 \geq 1$ としても一般性を失なわないので、以下はそのように仮定する。

この小論では，

(I)　上の定理を解くためのよく知られた Gel'fand-Levitan のアルゴリズムを一部変更すること。および，

(II)　spectral characteristics の小摂動に関して，逆問題が

安定であることを示すこと。

の2つを目標とする。

(I) アルゴリズムの変更

次のアルゴリズムによって、上の定理が示される。

(A-1) 実数 α, β, J を適当に定めることにより、固有値問題 $E(\alpha+\beta\cos 2x\,;\,0, J)$ の spectral characteristics $\{\nu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ が (1), (2) と同じ漸近式，すなわち，

$$\sqrt{\nu_n} = \sqrt{\lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \tau_n = \rho_n + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

を満たすようにできる。

(A-2) $r(x) = \alpha + \beta\cos 2x$ とおく。

$\omega(x, \lambda)$ を初期値問題

$$\begin{cases} y''(x) + (\lambda - r(x))\,y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

の解とし，

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\omega(x,\lambda_n)\,\omega(s,\lambda_n)}{\rho_n} - \frac{\omega(x,\nu_n)\,\omega(s,\nu_n)}{\tau_n}\right\}$$

とおく。このとき $F(x, s)$ は $0 \le x, s \le \pi$ で2回連続微分可能である。

(A-3) 任意に $x\ (\le \pi)$ を固定したとき，積分方程式

$$K(x,s)+\int_0^x K(x,t)F(t,s)\,dt+F(x,s)=0 \quad (0\leq s\leq x)$$

の解 $K(x,s)$ $(0\leq s\leq x)$ は一意的に存在する。

更に，$K(x,s)$ は $0\leq s\leq x\leq \pi$ で 2 回連続微分可能である。

(A−4) $\varphi(x,\lambda)$, $q(x)$, h を

$$\varphi(x,\lambda)=\omega(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\,\omega(s,\lambda)\,ds \quad (0\leq x\leq \pi)$$

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x,x)+r(x) \quad (0\leq x\leq \pi)$$

$$h=K(0,0)$$

と定めると，次の (i)—(iii) が成り立つ。

(i) $\varphi(x,\lambda)$ は，

$$\varphi''(x,\lambda)+(\lambda-q(x))\varphi(x,\lambda)=0, \quad (0<x<\pi)$$

$$\varphi(0;\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h$$

を満足する。

(ii) $-\dfrac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}=H$ は、$n=0,1,2,\cdots$, に無関係な定数である。

(iii) $\rho_n=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)^2\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つ。 □

(A−4) から，求めた Sturm−Liouville 問題 $E(q(x);h,H)$

は，はじめに与えられた$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$を spectral characteristics としてもつことがわかる。

Gel'fand - Levitan のアルゴリズムでは「出発近似」として固定した$E(0;0,0)$を考えている。我々のアルゴリズムによれば$g(x)$の連続微分可能性を容易に確かめることができる。

ここでは(A-1)のみを確かめることにする。

<u>補題</u>　一般に$r(x)$を$0 \leq x \leq \pi$で2回連続微分可能で，$r''(x)$が絶対連続と仮定すると，固有値問題$E(r(x); \mathfrak{z}, J)$の spectral characteristics $\{\mu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$に対して，漸近式

$$\begin{cases} \sqrt{\mu_n} = n + \dfrac{a_0^*}{n} + \dfrac{a_1^*}{n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right) \\ \tau_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{b_0^*}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right) \end{cases}$$

が成り立つ。　ただし，

$$a_0^* = \frac{1}{\pi}\left(\mathfrak{z} + J + \frac{1}{2}R\right), \qquad R = \int_0^{\pi} r(t)\,dt,$$

$$b_0^* = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{z} + J + \frac{1}{2}R + \pi\left(\mathfrak{z}^2 - \frac{1}{2}r(0)\right)\right\},$$

$$a_1^* = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{8}\left(r'(\pi) - r'(0) + \int_0^{\pi} r^2(t)\,dt\right) + \frac{1}{2}\left(J r(\pi) + \mathfrak{z} r(0)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mathfrak{z}^3 + J^3}{3} - \frac{1}{\pi}\left(\mathfrak{z} + J + \frac{1}{2}R\right)^2\right\}$$

である。　□

上の補題で，$r(x) = \alpha + \beta \cos 2x$，$\mathfrak{z} = 0$とおくと，

5

$$a_0^* \equiv \frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2}, \quad b_0^* \equiv \frac{J}{2} - \frac{\pi}{4}\beta,$$

$$a_1^* \equiv \frac{1}{8}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + \frac{J}{2\pi}(\alpha+\beta) - \frac{J^3}{3\pi} - \left(\frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

となる。従って任意の $a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}$ に対し、$a_0^* = a_0$, $b_0^* = b_0$, $a_1^* = a_1$ が成り立つような実数 α, β, J が存在する。

///

（II） <u>逆問題の安定性</u>

Sturm-Liouville 問題 $E(q(x); h, H)$ ($q(x) \in C^1[0,\pi]$) およびその spectral characteristics $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ を既知とする。

境界条件が同一である他の Sturm-Liouville 問題 $E(p(x); h, H)$ ($p(x) \in C^1[0,\pi]$ は未知とする）を考え、その spectral characteristics $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられるものとする。このとき $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ にある意味で近ければ、差 $|p(x) - q(x)|$ が小であることを示す。

<u>定理1.</u>

$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{\sqrt{\lambda_n}\,|\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n|\}$ が十分小ならば、

$$\max_{0 \le x \le \pi} |p(x) - q(x)| \le C_1 \cdot A$$

が成り立つ。ここで、$C_1 > 0$ は、$q(x), h, H$ にのみ依存する定数である。 □

$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、漸近式

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

が成り立つ。ここで定数 a_0, b_0 は、

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right),$$

$$b_0 = \frac{1}{2}\left\{h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt + \pi\left(h^2 - \frac{1}{2}q(0)\right)\right\}$$

により与えられる。

$\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対しても同様な漸近式が成り立つので、$A < +\infty$ のとき、必然的に、

$$p(0) = q(0) \quad かつ \quad \int_0^{\pi} p(t)dt = \int_0^{\pi} q(t)dt \text{ , となる。}$$

定理１の一般化を行うため，$q(x)$ の仮定を強め，$q'(x)$ が絶対連続と仮定すると，$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、漸近式

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

が成り立つ。

<u>定理２.</u>

与えられた $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸近式

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \sigma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0'}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

（a_0', b_0' は定数）

を満足するものとする。このとき，

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{\lambda_n}\left|\sigma_n-\rho_n-\frac{b_0'-b_0}{n^2}\right|+\left|\mu_n-\lambda_n-2(a_0'-a_0)\right|\right\}+$$

$$+|\sigma_0-\rho_0|+|\mu_0-\lambda_0|+|a_0'-a_0|+|b_0'-b_0|$$

が十分小ならば，

$$\max_{0\le x\le\pi}|p(x)-q(x)| \le C_2\cdot B$$

が成り立つ。ここで，$C_2>0$ は $q(x)$，h，H にのみ依存する定数である。 □

<u>定理１の証明の方針</u>

$\varphi(x,\lambda)$ $(0\le x\le\pi,\ \lambda>0)$ を，

$$\begin{cases} y''+(\lambda-q(x))y=0 \\ y(0)=1,\quad y'(0)=h \end{cases}$$

の解，$F(x,s)$ $(0\le s,\ x\le\pi)$ を，

$$F(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\varphi(x,\mu_n)\varphi(s,\mu_n)}{\sigma_n}-\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(s,\lambda_n)}{\rho_n}\right\}$$

とおく。

また，$\psi(x,\lambda)$ $(0\le x\le\pi,\ \lambda>0)$ を，

$$\begin{cases} y''+(\lambda-p(x))y=0 \\ y(0)=1,\quad y'(0)=h \end{cases}$$

の解、$K(x,s)$ $(0\le s\le x\le\pi)$ を、

$$\begin{cases} K_{xx}-p(x)K=K_{ss}-q(s)K & (0<s<x<\pi) \\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x(p(t)-q(t))dt & (0\le x\le\pi) \quad (3) \\ K_s(x,0)-hK(x,0)=0 & (0\le x\le\pi) \end{cases}$$

の解とすると、鈴木[3]の「才1変形公式」により、

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s,\lambda)ds,$$

の関係がある。

(3)より、

$$p(x)-q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x) \qquad (4)$$

一方、$F(x,s)$ と $K(x,s)$ には、関係式、

$$K(x,s)+\int_0^x K(x,t)F(t,s)dt+F(x,s)=0 \qquad (5)$$
$$(0\le s\le x\le\pi)$$

が成り立つ。$F(t,s)$ が、

$$\int_0^\pi\int_0^\pi |F(t,s)|^2dt\,ds<1 \qquad (6)$$

を満足するとき、(5), (4) より、

$$\frac{1}{2}(q(x)-p(x))=\frac{d}{dx}F(x,x)-K(x,x)^2+2\int_0^x F_x(x,u)K(x,u)du, \quad (7)$$
$$(0\le x\le\pi)$$

と計算される。(6),(7) より定理1の評価が得られる。///

定理2の証明の方針

$$\gamma(x) = q(x) + 2(a_0' - a_0) + \frac{8}{\pi^2}(b_0' - b_0)(x - \frac{\pi}{2})$$

とおくと，$E(\gamma(x); h, H)$ の spectral characteristics $\{\lambda_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，漸近式

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\mu_n} + O(\frac{1}{n^3}) \quad , \quad \tau_n = \sigma_n + O(\frac{1}{n^3})$$

が成り立つので，$|\gamma(x) - p(x)|$ の評価は定理1に帰着される。

///

参考文献

[1] I.M. Gel'fand – B.M. Levitan, On the determination of a differential equation by its spectral function (英訳: AMS transl. Ser. 2, 1 (1955), 253–304)

[2] B.M. Levitan – M.G. Gasymov, Determination of a differential equations by two of its spectra, Russian Math. Survey, 19–2 (1964), 1–63.

[3] T. Suzuki, Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, to appear in J. Diff. Eq.

[4] 吉田耕作，積分方程式論（第2版）岩波書店 1978.