数理解析研究所講究録
第 531 巻 1984 年 1-17

コーシー問題の適切性の必要条件について
（空間方向の退化を扱う試み）

Necessary conditions for the well-posedness of Cauchy problems
-- A try to treat the degeneracy w.r.t. space variables --

京大数理研　万代　武史
(Takeshi Mandai)

§1．序

$\mathbb{R}^{n+1}$に座標$(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n)$を入れ、$t=0$を初期面とする次のコーシー問題を原点の近傍Ωで考える。（実際はあとでみるように初期面を$t=t_0$の形で動かして考える。）

$$(1\text{-}1)\quad \begin{cases} Pu=f & \text{in}\quad \Omega\cap\{t\geqq 0\} \\ \partial_t^j u|_{t=0}=g_j \quad (0\leqq j\leqq m-1) & \text{in}\quad \Omega\cap\{t=0\} \end{cases}$$

但し、$P=\sum_{j+|\alpha|\leqq m} a_{j,\alpha}(t,x)D_t^j D_x^\alpha$, $a_{j,\alpha}\in C^\infty(\Omega)$, $a_{m,0}\equiv 1$.

Lax-Mizohata の定理により、このコーシー問題が（一様に）適切（正確な定義は§2で与える）ならば、Pは双曲型でなければならない。すなわち、$p_m(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha=0$ をての方程式とみるとき、任意の$(t,x)\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$に対し

て、実根のみをもつ。さらに、Mizohata－Ohya [1], Flaschka－Strang [2], Ivrii－Petkov [3] によって、低階項が次のレビ条件をみたす必要のあることが示されている。

「$p_k(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|=k} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha$ とし、$e_n=(0,\cdots,0,1)\in\mathbb{R}^n$ とする。$p_m(t,x;\tau,e_n)=\tau^m+A_{m-1}(t,x)\tau^{m-1}+\cdots+A_0(t,x)$ において、$A_0(t,x)=\cdots=A_{r-1}(t,x)=0$ on Ω（……①）と仮定すると、

$p_{m-k}(t,x;\tau,e_n)=A^{(k)}_{m-k}(t,x)\tau^{m-k}+\cdots+A^{(k)}_0(t,x)$ において、$A^{(k)}_0(t,x)=\cdots=A^{(k)}_{r-k-1}(t,x)=0$ on Ω が $k=1,\cdots,r-1$ に対して、成立する。」

これは、[1], [2] で述べられている形とはちがい、$\xi=e_n$ 方向のみに着目し、さらに $\tau=0$ という特性根についてのみ着目したときのレビ条件である。（$p_m(t,x;\tau,e_n)=0$ を τ の方程式とみたとき、①式は $\tau=0$ がすべての (t,x) について少なくとも r 重根になっているということである。）その意味で、"micro-local Levi condition with respect to the characteristic root 0" とでも呼ぶべきものであろう。しかし、t 変数を変えない座標変換によって、他の ξ 方向，$\tau=0$ 以外の特性根についてもこの条件を適用することができる。Pの特性根の多重度が一定の場合には、これらの条件を統合すると、丁度ふつうのレビ条件が得られ、これがコーシー問題が適切

なための必要十分条件になる。

この講演の目標は、上のようなmicro-localな形で、特性根の多重度が変わる場合にも、同様の低階項への条件を得ることである。この際、ある程度"よい"作用素に適用すると、丁度必要十分条件になるようなものがほしい。 t方向の退化に関しては、すでに結果がでている。(Mandai [4], [5]) ここではx方向の退化も扱うための1つの試みを述べたい。

§2. 定義と結果(定理1)

まず、コーシー問題が(一様に)適切ということの定義を与えよう。

定義 2.1.

コーシー問題(1-1)が$\Omega\cap\{t\geqq 0\}$において適切とは、次の2条件が成立することである。

1) 任意の$f\in C^\infty(\Omega)$, $f=0$ for $t\leqq 0$ に対して、$u\in C^\infty(\Omega)$が存在して、$u=0$ for $t\leqq 0$, $Pu=f$ in Ωが成立する。

2) 任意の$u\in C^\infty(\Omega)$, $u=0$ for $t\leqq 0$ と、任意の$t_0\geqq 0$に対して、もし$Pu=0$ for $t\leqq t_0$が成立するならば、$u=0$ for $t\leqq t_0$が成立する。

注意 2.2.

上の1), 2)は次の3)と同値である。

3) 任意の $t_0 \geq 0$ と任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ と任意の $g_j \in C^\infty(\Omega \cap \{t=t_0\})$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$ に対して、$u \in C^\infty(\Omega)$ が一意的に存在して、

$$\begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \cap \{t \geq t_0\} \\ \partial_t^j u_{|t=t_0} = g_j & \text{on } \Omega \cap \{t=t_0\} \quad (j=0,1,\cdots,m-1) \end{cases}$$

が成立する。

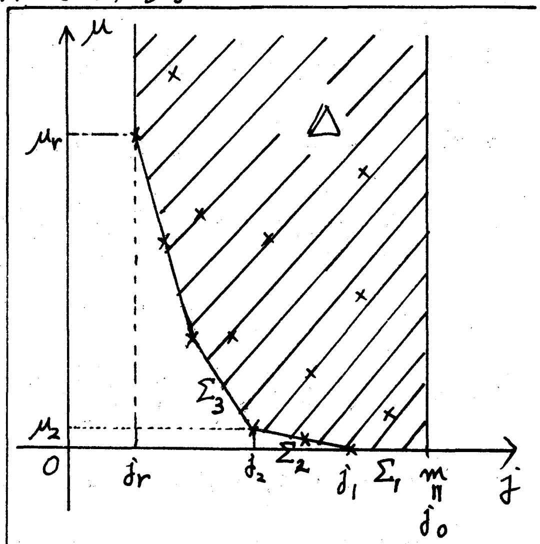
この意味で、上の定義は"一様に適切"というべきものであるが以下では単に"適切"と呼ぶことにする。なお、3)のほうが1),2)よりも自然なのに、なぜ1),2)のほうを主にするのかと思われるであろうが、実はこの講演で述べた結果は、C^∞-係数の非特性初期値問題のみでなく、Fuchs型の方程式を含むsingularな方程式についても成立するものであり、それらに対しては、3)のような定義は意味がないが、1),2)の形(これは"フラット・コーシー問題の適切性"とでもいうべきもの)なら、自然な意味があるからである。([4],[5]参照) なお、蛇足だが、Pの係数がすべてreal-analyticなら、Holmgrenの定理によって、上の2)はいつでもみたされている。

さて、定理1を述べよう。以下、p_mは双曲型とする。

$(n+1)$個の有理数 δ_j $(j=0,1,\cdots,n)$ をとる。(任意に固定する。)

$(\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\tau^j p_m)(0,0:0,e_n) \neq 0$ なる (k,β,j) に対して、(δ,μ)-

平面に、点$(j,\ g_0 k+\langle g,\beta\rangle)$をとる。$(\langle g,\beta\rangle=g_1\beta_1+\cdots+g_n\beta_n)$
これらの点から、<u>ニュートン図形Δ</u>を描く。つまり、上の点全体を$\mathbb{P}$とするとき、Δは$\{(j,\mu)\ ;\ \mu\geq\mu' \text{ for some } (j,\mu')\in\mathbb{P}\}$の closed convex hull である。



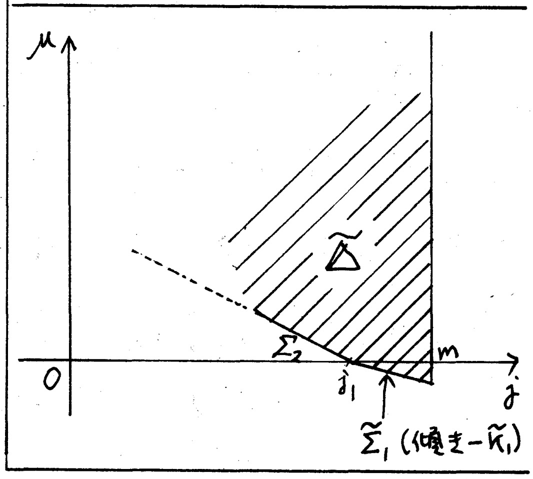
Δの下辺は有限個の線分$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_r$からなる。Σ_iの両端を(j_i,μ_i)と(j_{i-1},μ_{i-1}) $(j_i<j_{i-1})$とすると、

$$\begin{cases} 0\leq j_r<j_{r-1}<\cdots<j_1<j_0=m \\ \mu_r>\mu_{r-1}>\cdots>\mu_1\geq\mu_0=0 \end{cases}$$

又、Σ_iの傾きを$-\kappa_i$とすると、

$\kappa_r>\kappa_{r-1}>\cdots>\kappa_1\geq 0$ となる。

さて、$\kappa_1=0$のときは、$0\leq\tilde{\kappa}_1\leq\kappa_2$なる$\tilde{\kappa}_1$をとって、$\Delta$を右図のように修正する。つまり、$\Sigma_1$のかわりに、2点$(j_1,0)$, $(m,-\tilde{\kappa}_1(m-j_1))$を両端とする線分$\tilde{\Sigma}_1$をとり、$\Sigma_1$のかわりに$\tilde{\Sigma}_1$としたものを<u>$\tilde{\Delta}$</u>とする。$\kappa_1>0$のときは、修正せずに、$\tilde{\kappa}_1=\kappa_1$, $\tilde{\Delta}=\Delta$とする。



ここで、次の仮定をおく。

<u>仮定－A</u>

(1) $g_0+\tilde{\kappa}_1>g_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$

$$\begin{cases} 2) & (\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\tau^j \partial_\xi^\alpha p_m)(0,0;0,e_n)=0 \\ & \quad \text{if} \quad (j+|\alpha|,\ g_0(k+|\alpha|)+\langle g,\beta-\alpha\rangle) \notin \hat{\triangle} \end{cases}$$

注意　2.3.

1、$\kappa_1=0$ のとき、上の$\hat{\kappa}_1$のとり方は、もちろん一意的ではないが、上の仮定を満たす範囲でできるだけ小さくとるほうが、下でのべる定理の結論は強くなる。ただし、上の仮定1)，2)を満たすように必ず$\hat{\kappa}_1$がとれるとは限らない。

2、$g_0 \geq g_j$ $(j=1,\cdots,n)$ となっている場合は、上の仮定の2)は、実は、P_mが双曲型ということから導びかれる。もちろん、1)は自動的に成立するから、この場合には、仮定－Aは必ず満たされている。

定理　1.

上の状況のもとで、Pに対するコーシー問題がΩで適切とする。このとき、次が成立する。$(h=1,2,\cdots,m)$

$$(\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\tau^j \partial_\xi^\alpha p_{m-h})(0,0;0,e_n)=0$$
$$\text{if}\ (j+|\alpha|+h,\ g_0(k+|\alpha|+h)+\langle g,\beta-\alpha\rangle) \notin \hat{\triangle}$$

注意　2.4.

この定理では、[3]や[4]のように、有限伝幡速度の存在を仮定していない。証明の基礎となるエネルギー不等式は、§4.の(4-8)である。したがって、適切性の定義はここで述べたもの以外も採用でき、特にH^∞－適切性でもよい。

§3. 応用（定理2）

このセクションでは、定理1をつかって具体的な作用素について、適切性のための必要十分条件を決定したい。ここでは、$\Omega=[0,T]\times\mathbb{R}^n$ とし、P の係数は $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ に属するとしておく。（$\mathcal{B}^\infty(\Omega)=\{f\in C^\infty(\Omega)$；任意の α に対して、$D^\alpha f$ は Ω で有界$\}$）

定義 3.1.

P が <u>t-involutive</u> とは、$p_m(t,x;\tau,\xi)=\prod_{j=1}^{m}(\tau-\lambda_j(t,x;\xi))$，$\lambda_j\in C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$ $(j=1,\cdots,m)$ とかけ、任意の j,k について、$A_{j,k}(t,x;\xi)\in C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$ があって、

(3-1) $\{\tau-\lambda_j(t,x;\xi),\tau-\lambda_k(t,x;\xi)\}=\frac{1}{t}A_{j,k}(t,x;\xi)(\lambda_j(t,x;\xi)-\lambda_k(t,x;\xi))$

となることである。但し、$\{\cdot,\cdot\}$ は $(t,x;\tau,\xi)$ についての Poisson bracket。

$\partial_j\equiv D_t-\lambda_j(t,x;D_x)$ とおく。t-involotive な作用素については、適切性の十分条件が次の形で知られている。（Yamamoto [6], Uryu [7]）

「 $J\subset\{1,\cdots,m\}\equiv I$ に対して、$\pi_J\equiv\prod_{j\in J}\partial_j$ とおく。（積の順序は1つ1つのJに対して、任意に決めておく。）任意の $J\subsetneqq I$ に対して、$A_J(t,x;D_x)$ なる0階の x についての擬微分作用素（tは C^∞-パラメーター）があって、

(3-2) $P=\pi_I+\sum_{J\subsetneqq I}t^{|J|-m}A_J(t,x;D_x)\pi_J$

とかけるならば、Pに対するコーシー問題はΩで適切。 ┘

注意 3.2.

[6]では、H^∞-適切性のみが示されているが、実は有限伝播速度の存在が証明できるので、ここでの意味の適切性も成立する。もっとも、注意2.4で述べたように、H^∞-適切性でも定理1が成立するので定理2もH^∞-適切性についても成立する。

残念ながら、上の条件(3-2)は、必ずしも適切性の必要条件ではない。

例 3.3.

$P = D_t^2 - (x^2+y^2)D_x^2 - a(x,y)D_x$ を $\mathbb{R}^3_{(t,x,y)}$ で考える。(3-2)の形にかけるということは、$a(x,y)/(x^2+y^2) \in C^\infty$ ということであるが、適切性の必要十分条件は、実は、$a(0,0) =(\partial_x a)(0,0)=(\partial_y a)(0,0)=0$ である。

ここでは、(3-2)が必要条件にもなるような主部への条件を1つ与えよう。

仮定-B

任意の$(\hat{t},\hat{x})\in\Omega$に対して、$(\hat{t},\hat{x})$の近傍$U$，非負整数$s$, $C_l(t,x)\in C^\infty(U)$ $(l=1,\cdots,s)$，非負整数$K_l(j,k)$ $(l=0,1,\cdots,s;\ 1\leqq j+k\leqq m)$が存在して、次の3条件が成立する。

a) $C_\ell(\hat{t},\hat{x})=0 \quad (\ell=1,\cdots,s)$

b) $\{(\mathrm{grad}_{(t,x)}C_\ell)(\hat{t},\hat{x})\ ;\ \ell=1,\cdots,s\}$ は1次独立

c) 任意の $1\leqq j \neq k \leqq m$ に対して、

$$\lambda_j(t,x;\xi)-\lambda_k(t,x;\xi)=t^{\kappa_0(j,k)}C_1(t,x)^{\kappa_1(j,k)}\cdots C_s(t,x)^{\kappa_s(j,k)}\times$$
$$\times(\text{non-zero } C^\infty\text{-fcn})$$

か又は、$\lambda_j\equiv\lambda_k$.

<u>定理 2.</u>

Pが t-involutive で上の仮定－Bをみたすとすると、

「Pに対するコーシー問題がΩで適切

$\Updownarrow$

Pが(3－2)の形にかける。」

<u>注意 3.4.</u>

仮定－Bにおいて、任意の j,k に対して $\kappa_0(j,k)=0$ とすると、Pが t-involutive なことと、Pが involutive(つまり、$\{\tau-\lambda_j(t,x;\xi),\tau-\lambda_k(t,x;\xi)\}=A_{j,k}(t,x;\xi)(\lambda_j(t,x;\xi)-\lambda_k(t,x;\xi))$ となる。)なことと が同値になり、さらにこのとき、

「Pが(3－2)の形にかける。

$\Updownarrow$

Pが、$P=\pi_I+\sum_{J\subsetneqq I}\tilde{A}_J(t,x;D_x)\pi_J$ ---(3－3)

の形にかける。」

§ 4. 定理1の証明の概略

ここでは、有限伝播速度の存在を仮定せずにどうやるかを中心に述べる。定理1はニュートン図形の各辺ごとに Σ_1 から順に以下に述べるような議論をやって証明するのであるが、そのあたりのことは省略する。

定理の結論が成立しないと仮定する。まず適当な正の有理数 μ_j $(j=0,1,\cdots,n)$ をとって、

$$\begin{cases} t = \rho^{-\mu_0} s \\ x_j = \rho^{-\mu_j} y_j \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases} \quad (\rho > 1)$$

なる座標変換をして、P を P_ρ にうつす。

$E = \exp\{i\gamma y_n \rho + i\varphi(s,y)\rho^\sigma\}$ とおくと、$0<\sigma<1$ をうまくとると、

$$(4\text{-}1) \quad E^{-1} \circ P_\rho \circ E = \rho^d \left\{ \Phi(s,y,\gamma : \partial_s \varphi, \partial_{y'} \varphi) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-\frac{j}{M}} R_j(s,y : D_s, D_y) \right\}$$

と ρ について漸近展開でき、さらに次が成立する。

「$\Phi(s,y,\gamma : \sigma, \eta')$ は (σ, η') についての多項式であり、

$\phi \neq V \underset{\text{open}}{\subset} \{s>0\}$, $\phi \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1}$, $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}$, $F(s,y;\eta')$: analytic fcn. in $V \times U$, $0 < \theta \in \mathbb{R}$, 正整数 g があって、

$$(4\text{-}2) \begin{cases} \partial_\sigma^j \Phi(s,y,\hat{\gamma} ; F(s,y,\eta'), \eta') = 0 & (0 \leqq j < g-1) \\ \qquad \qquad '' \qquad \qquad \neq 0 & (j = g) \\ \operatorname{Im} F(s,y,\eta') < -\theta & \text{on } V \times U \end{cases}$$

が成立する。」

ここで、$(\hat{s},\hat{y})\in V$, $\hat{\eta}'\in U$ を固定し、

$$(4\text{-}3)\begin{cases}\partial_s\varphi=F(s,y;\partial_y,\varphi)\\ \varphi(\hat{s},\hat{y})=\langle\hat{\eta}',y'\rangle+i|y-\hat{y}|^2\end{cases}$$

と φ を $(\hat{s},\hat{y})$ の近傍 $\hat{V}$ でとる。このとき、

$$(4\text{-}4)\quad \operatorname{Im}\varphi(s,y)\geq|y-\hat{y}|^2+\theta(\hat{s}-s)\quad for\ s\leq\hat{s}$$

が成立するので、E は $s\leq\hat{s}$ においては、$(\hat{s},\hat{y})$ の近傍の外では急激に減少している。

さて、[2],[3]でつかわれた方法では、さらに、$l_1(s,y)$, $\cdots$, $l_K(s,y)$ なる函数と $\sigma>\sigma_1>\cdots>\sigma_K>0$ なる有理数の列をうまくつくって、

$$(4\text{-}5)\quad u=e^{i(\hat{\rho}y_n\rho+\rho^{\sigma}\varphi(s,y)+\sum_{j=1}^{K}\rho^{\sigma_j}l_j(s,y))}\sum_{j=0}^{\infty}v_j(s,y)\rho^{-\frac{j}{m}}$$

の形で $P_\rho u=0$ の漸近解をつくっている。しかし、この過程で、$l_1,\cdots,l_K$ の存在域は、一般には、$(\hat{s},\hat{y})$ の近傍としてはとることができず、$\hat{V}$ の中の開集合になるのみである。したがって、(4-4)というよい不等式がつかえず、有限伝播速度の存在を仮定する必要がでてきたのであった。しかし、この困難は、Ivrii [8, 9]でつかわれたアイデアをつかうと次のように回避できる。

上のように φ をとり、$E=e^{i(\hat{\rho}y_n\rho+\rho^{\sigma}\varphi(s,y))}$ とおくと、ある $0<\sigma'<\sigma$ が存在して、

$$E^{-1}\circ P_\rho\circ E = \rho^{d-g\sigma}\{Q_0+R\},$$

$$\begin{cases} Q_0 = \sum_{j+|\nu|\leqq g} \frac{1}{\nu!} a_{\nu,j}(s,y)\,\rho^{j\sigma'} D^{\nu}_{(s,y)} \\ \quad (a_{\nu,j} \text{ は analytic fcn. で } a_{(g,0,\cdots,0),0} \neq 0) \\ R \text{ は } \rho \text{ の負巾について漸近展開できる。} \end{cases}$$

となることがいえる。Q_0 には ρ の正巾がでてくるが、そのでてきかたが制限されているので、$(Q_0+R)u=0$ の近似解が次の性質をもつようにつくれる。

「$\tilde{u}=\sum_{j=0}^{N} u_j$ の形で、u_j は、

(4-6) $|\partial_s^p\partial_y^\beta u_j(s,y)| \leqq C_{p,\beta,j}\, e^{M\rho^{\sigma'}(\hat{s}-s)}\rho^{-j\sigma+(j+p)\sigma'}$

をみたし、さらに、$(Q_0+R)\tilde{u}=v$ とすると、

(4-7) $|\partial_s^p\partial_y^\beta v(s,y)| \leqq C_{p,\beta}\, e^{M\rho^{\sigma'}(\hat{s}-s)}\rho^{d-g\sigma-(N+1)\sigma+(N+2+p)\sigma'}$

が成立する。但し、$C_{p,\beta,j}$, $C_{p,\beta}$, M は定数。」

さて、適切性の仮定から、次の不等式が成立している。

「任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ に対して、ある C, L があって、任意の (t,x) と任意の $u\in C_0^\infty(K)$, $u(t,x)=0$ for $t\leqq 0$ に対して、

(4-8) $|u(t,x)| \leqq C \sup_{\substack{t'\leqq t,\,(t',x')\in K \\ p+|\beta|\leqq L}} |(\partial_s^p\partial_y^\beta Pu)(t',x')|$

が成立する。」

このことより、あるA, C, L があって、次の不等式が成立している。

$$(4-9)\quad |u(\hat{s},\hat{y})| \leqq C\cdot \rho^{A} \sup_{\substack{s\leqq\hat{s},\\ p+|\beta|\leqq L}} |(\partial_s^{p}\partial_y^{\beta}P_\rho u)(s,y)|$$

$$\text{for}\quad u\in C_0^\infty(\hat{\mathcal{V}})$$

$\chi\in C_0^\infty(\hat{\mathcal{V}})$ を $\chi(\hat{s},\hat{y})=1$ ととり、$u=\chi\cdot E\cdot\tilde{u}$ とすると、(4-4), (4-6), (4-7) と $\sigma'<\sigma$ なることから、十分大きい N に対して、この u は (4-9) をみたさないことがわかる。

§5. 定理2の証明の概略

簡単のため、仮定-B において、任意の $j\neq k$ に対して、$\lambda_j\neq\lambda_k$ かつ $K_0(j,k)=0$ としておく。任意の $(\hat{t},\hat{x})\in\Omega$ に対して、$(\hat{t},\hat{x})$ の近傍で、P が (3-3) の形にかければよい。

補題 5.1.

$1\leqq\hat{\ell}\leqq s$, $1\leqq\hat{k}\leqq m$, $\hat{\xi}\in R^n\setminus\{0\}$ に対して、次のような座標変換 $T=T(\hat{\ell},\hat{k};\hat{\xi})$ がある。

(i) T は $(\hat{t},\hat{x})$ の近傍 $\mathcal{V}$ を $(0,0)$ の近傍 $\tilde{\mathcal{V}}$ にうつす。

(ii) T は

$$\begin{cases} s=t-\hat{t} \\ y=f(t,x)=\begin{pmatrix} f_1(t,x)\\ \vdots \\ f_n(t,x)\end{pmatrix}\end{cases}$$

の形をしている。

(iii) Tにより、Pが$\tilde{P}$にうつったとすると、$\tilde{P}$の主部は $\tilde{p}_m(s,y;\sigma,\eta)=\prod_{j=1}^{m}(\sigma-\tilde{\lambda}_j(s,y;\eta))$, $\tilde{\lambda}_j(s,y;\eta)=\lambda_j(t,x;\partial_x\langle f,\eta\rangle)-\partial_t\langle f,\eta\rangle$ で、$\tilde{\lambda}_{\hat{k}}(s,y;e_n)\equiv 0$, $\hat{\xi}=(\mathrm{grad}_x f_n)(0,0)$ が成立する。

(iv) ある $d = d(\hat{l}, \hat{k} ; \xi)$ があって,

$C_{\hat{l}}(t, x) \equiv \tilde{C}_{\hat{l}}(s, y) = y_d \times$ (non-zero C^∞-fcn)

とかける。

$\tilde{U} \ni (\tilde{s}, \tilde{y})$ を, $\tilde{C}_l(\tilde{s}, \tilde{y}) \neq 0$ for $l \neq \hat{l}$, $\tilde{y}_d = 0$ ととり, 上の(iii)の $\tilde{P}$ について, $p_d = 1$, $p_j = \varepsilon > 0$ $(0 \leq j \leq m, j \neq d)$ として, $(\tilde{s}, \tilde{y})$ を原点とみて, §1のようにニュートン図形を描くと, これは, 十分小さい ε については, ε によらなくなり, さらに $(\tilde{s}, \tilde{y})$ や ξ のとり方にもよらない。このニュートン図形では, $K_1 = 0$ のときは $K_2 \geq 1$ がいえているので $\tilde{K}_1 = 1$ として修正することができる。この修正したニュートン図形を, $\tilde{\Delta}(\hat{l}, \hat{k})$ とし, 下辺を $\mu = \Gamma_{\hat{l}, \hat{k}}(j)$ とする。$\tilde{P}$ と $\tilde{\Delta}(\hat{l}, \hat{k})$ については, 仮定-Aがみたされて, 定理1がつかえる。

定義 5.2.

$(\hat{t}, \hat{x})$ の十分小さい近傍 U を考える。$\mathfrak{M}$ を次の条件をみたす U 上の作用素 $Q = \sum_{h=0}^{m} a_h(t, x ; D_x) D_t^{m-h}$ の全体とする。

(i) a_h は t を C^∞-パラメーターとする x についての classical 擬微分作用素で, $\mathrm{ord.}\, a_h \leq h$.

(ii) 任意の $1 \leq \hat{l} \leq s$, $1 \leq \hat{k} \leq m$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ に対して, Q を $T(\hat{l}, \hat{k} ; \xi)$ でうつした作用素を $\tilde{Q} = \sum_{h=0}^{m} \tilde{a}_h(s, y ; D_y) D_s^{m-h}$ とするとき, $\tilde{a}_h$ のシンボルの漸近展開 $\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{a}_{h, h-l}(s, y ; \eta)$ ($\tilde{a}_{h, h-l}$ は η について $(h-l)$ 次同次) が次をみたす。

$$(5\text{-}1)\quad \partial_\eta^\alpha \tilde{a}_{h,h-\ell}(s,y;e_n) \in \mathcal{Y}_d^{\Gamma_{\hat{\ell},\hat{k}}(m-h+\ell+|\alpha|)+\alpha_d} \times C^\infty$$
$$\text{if } \ell+|\alpha| \leqq h$$

但し、d は補題 5.1.の $d(\hat{\ell},\hat{k}:\hat{\xi})$

又、$\mathcal{W}_H \equiv \{Q=\sum_{h=H}^m a_h(t,x:D_x)D_t^{m-h} \in \mathcal{W}\ ;\ \mathrm{ord.}\, a_h \leqq h-H\}$

とする。

この定義の直前にのべたように、定理1によって、

命題 5.

$$P \in \mathcal{W}$$

がいえる。又、$\mathcal{W}_H$ をくわしく調べると、

補題 5.

$A(t,x:D_x)$ を t を C^∞-パラメーターにもつ x についての擬微分作用素で、$\mathrm{ord.}\, A \leqq 0$ とすると、任意の $J \subset I$ に対して、

$$A(t,x;D_x)\cdot \pi_J \in \mathcal{W}_{m-|J|}$$

がわかる。さらに、次の命題が成立する。

命題 5.5.

(1) $Q=\sum_{h=H}^m a_h(t,x:D_x)D_t^{m-h} \in \mathcal{W}_H$ とし、Q の主シンボルを、

$q(t,x;\tau,\xi)=\sum_{h=H}^m a_h^0(t,x;\xi)\tau^{m-h}$ （a_h^0 は ξ について $(h-H)$ 次同次）

とする。このとき、任意の $1 \leqq k \leqq m$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、

$$(5\text{-}2)\begin{cases} \dfrac{(\partial_\tau^r q)(t,x;\lambda_k(t,x;\xi),\xi)}{C_1(t,x)^{\Gamma_{1,k}(r+H)}\cdots\cdots C_s(t,x)^{\Gamma_{s,k}(r+H)}} \in C^\infty \\ \qquad \text{for } r=0,1,\cdots,m-H \end{cases}$$

(2) $g(t,x;\tau,\xi)=\sum_{h=H}^{m} a_h(t,x;\xi)\tau^{m-h}$,（$a_h$ は ξ につき、$(h-H)$ 次同次）が (5-2) をみたすとすると、任意の $J\subset I$, $|J|=m-H$ に対して、$A_J(t,x;\xi)\in C^\infty(U\times(R^n\setminus\{0\}))$ なる 0 次同次函数があって、次のようにかける。

$$g(t,x;\tau,\xi)=\sum_{\substack{J\subset I\\|J|=m-H}} A_J(t,x;\xi)\prod_{j\in J}(\tau-\lambda_j(t,x;\xi)).$$

(1) は $\mathcal{W}_H$ を少し調べるとわかる。(2) は [5] の §5 の議論を少し拡張すると示せる。

以上で準備はととのった。まず、命題 5.3 と補題 5.4 により、$Q_1\equiv P-\pi_I\in\mathcal{W}_1$ がわかる。命題 5.5 により、Q_1 の主シンボル g_1 が $g_1=\sum_{|J|=m-1}A_J(t,x;\xi)\prod_{j\in J}(\tau-\lambda_j(t,x;\xi))$ とかける。$P-\pi_I-\sum_{|J|=m-1}A_J(t,x;D_x)\pi_J$ の D_t^{m-1} の係数は 0 階以下である。これを $B(t,x;D_x)$ とする。$|J_0|=m-1$ なる J_0 を 1 つとり、$A_{J_0}+B$ を改めて A_{J_0} とすると、$Q_1-\sum_{|J|=m-1}A_J(t,x;D_x)\pi_J\in$ 　がわかる。ゆえに、この主シンボル g_2 が $g_2=\sum_{|J|=m-2}A_J(t,x;\xi)\times\prod_{j\in J}(\tau-\lambda_j(t,x;\xi))$ とかける。以下同様にして、P が $(\hat{t},\hat{x})$ のある近傍で、(3-3) の形にかける。

文　献

[1] S. Mizohata - Y. Ohya ; Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 4 (1968), 511-526, Japan. J. Math., 40 (1971), 63-104.

[2] H. Flaschka - G. Strang ; Advances in Math., 6 (1971), 347-379.

[3] V. Ivrii - V. Petkov ; Russian Math. Surveys, 29 (1974), 1-70.

[4] T. Mandai ; Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19 (1983), 145-168.

[5] ——— ; Commun. in Partial Differ. Equations, 8 (1983), 735-771.

[6] K. Yamamoto ; J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 481-502.

[7] H. Uryu ; Commun. in Partial Differ. Equations, 5 (1980), 23-40.

[8] V. Ivrii ; Siberian Math. J., 17 (1976), 422-435.

[9] ——— ; Siberian Math. J., 17 (1977), 921-931.