

Random media and eigenvalues of the Laplacian  
(ランダム媒質 と ラプラシアン の 固有値)

東大理 小沢真 (Shin Ozawa)

§ Introduction

1つの金属の中に、他の少量の別種の金属が混入している。その時、得られる媒質の物理的性質はどうかなるであろうか？ ここで物理的性質とは例えば、電気伝導度のようなものである。すぐにわかるように、それは混入した金属の配置によって決まる量である。

ここで「ランダム媒質」といった時、我々は、混入した金属の配置全体に適切な確率空間を設定し、その物理的性質の統計的性質を考えることを暗黙のうちを示している。平均的電気伝導度は何か？ どのような物理的状態が多く実現されるか？

以上のような問題は極めて古く、すでに、

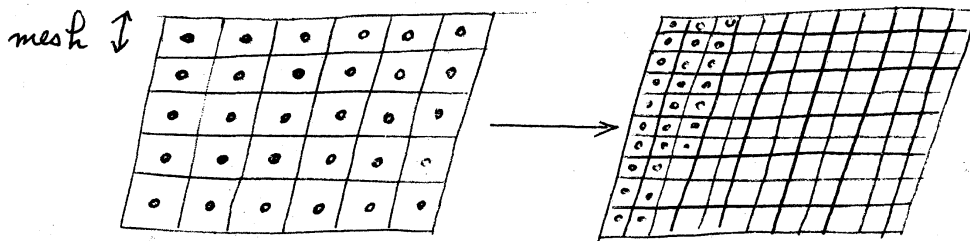
J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*  
Vol 1, Sec 314, Clarendon Press, Oxford 1881

の中にもあらわれている。そして依然として、多くの

物理学者などを惹きつけている問題である。そのような問題を数学的に厳密にとり扱う（あるいは、厳密性には、あまりこだわらずに、数理的にとり扱う）方向で極めて多くの研究が今までになされた。そして、---

--- それは未だに解決されていない。ここで解決とは、我々の立場からいえば、厳密な論理に基づいた完全な理論が出来る事をいみする。

一時期 数学的に「homogenizationの問題」が流行した。訳して、均質化とは、例えば periodic の問題

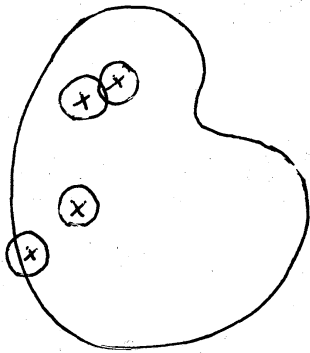


に 微量混入金属を配置してゆき、その mesh の size が小さくなったときに、その金属の性質がどのようになるか？ を mesh の size で漸近的に考察する、ことをいう。mesh の size が極めて小さくなったときには、あたかも別の均質な金属で別の伝導度をもったもののように混合金属が振る舞うであろう。それを数学的に考察する事は、結構面白い数学を生んだ。----- しかし、その方法は、あまりにも periodicity に依存した方

法であるが為には適用範囲が狭い。ランダムネスを  
こめて、以上のような物理の問題を追求するには、新  
しい数学的手法が必要である。

### §. 1つの定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  内の有界領域で  $\partial\Omega = \Gamma$ ,  $C^\infty$  class  
とする。  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\beta \in [1, 3)$  を 1つ fix する。さて



$m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  を 1つ決める

ことには、 $\Omega$  内の  $[m^\beta]$  ( $[ ]$  は Gauss  
記号), 個の点  $w_1^{(m)}, \dots, w_{[m^\beta]}^{(m)}$   
が定まるとする。

$$\tilde{m} = [m^\beta], \quad w^{(m)} = \{w_1^{(m)}, \dots, w_{\tilde{m}}^{(m)}\}$$

と置く。そして  $w_j^{(m)}$  を中心とする半径  $\alpha/m$  の  
球を  $B(\alpha/m; w_j^{(m)})$ ,

$$\Omega_{\alpha/m; w^{(m)}} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} B(\alpha/m; w_i^{(m)})$$

とおく。

さて、以下問題にしたいのは、

$$\text{問} \quad 0 < \mu_1(\alpha/m; w^{(m)}) \leq \mu_2(\alpha/m; w^{(m)}) \leq \dots$$

を  $\Omega_{\alpha/m; w^{(m)}}$  で  $-\Delta (= -\text{div grad})$  を考え、

$\partial\Omega_{\alpha/m; w^{(m)}}$  に Dirichlet zero 条件を与えたときの、

$j$  番目の固有値としたとき、  $m \rightarrow \infty$  の下で、  $\mu_j(\alpha/m; w^{(m)})$

がどう振る舞うか？

ここで、次の事に注意して頂きたい。 $\Omega_{\alpha/m; W(m)}$  は、 $W(m)$  の配置によつては、いくつかの連結成分より成っている。各成分に限れば、それは領域であるからその境界に、Dirichlet 条件を与えたときの  $k$  番目の Laplacian ( $= -\Delta$ ) の固有値が求まる。それらを各連結成分ごとと考えておき、さらにそれらを全部実数直線上に並べれば、重複度をこめて 1, 2, 3 番目と順序が付く。その意味での  $j$  番目が  $\mu_j(\alpha/m; W(m))$  である。

我々は上の問題を「ランダム媒質の問題」として考えた  
い。すなわち、半径  $\alpha/m$  の球の中心  $w_1^{(m)}, \dots, w_m^{(m)}$  は各々、独立にある統計法則に従って (独立同分布) 分布しているとしたときの、 $\mu_j(\alpha/m; W(m))$  の統計的性質を調べたい。

$$V(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{で}$$

$$V(x) > 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\int_{\Omega} V(x) dx = 1$$

なるものを 1 つ固定する。すると、 $\Omega$  上に 1 つ probability measure が定まり、 $(\Omega, V dx)$  は確率空間となる。すなわち  $\beta \in \Omega$  の Borel subset としたとき

$$P(x \in \beta) = \int_{\beta} V(x) dx$$

で、 $\beta$  に  $\alpha$  が含まれる事象の確率が定まる。さて、 $\Omega^{\tilde{m}}$  を  $\Omega$  の  $\tilde{m}$  個の直積確率空間とする。ここで読者は  $V(x) > 0$  という事に注意して、その意味も考えてほしい。次の定理が成立する。

### Theorem 1. (Ozawa [1])

$\alpha > 0$ ,  $\beta \in [1, 9/8)$ ,  $V(x) > 0$ ,  $j \in \mathbb{N}$  を固定する。そのとき、 $\beta$  に依存する正の定数  $\delta(\beta)$  が存在し、次の事が成立する： 任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta' \in [0, \delta(\beta))$  に対し

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(W(m) \in \Omega^{\tilde{m}}; m^{\delta' - (\beta - 1)} |\mu_j(\alpha/m; W(m)) - \mu_j(m; V)| < \varepsilon) = 1.$$

ここで  $\mu_j(m; V)$  は  $-\Delta + 4\pi\alpha m^{\beta-1} V(x)$  の ( $\Omega$  で考え、 $\Gamma$  上 Dirichlet 条件を与えた時の)  $j$  番目の固有値である。

注意 1.  $V(x) > 0$  であるから、すぐにわかるように

$$C_l m^{\beta-1} \leq \mu_j(m; V) \leq C_u m^{\beta-1}$$

なる  $C_l, C_u > 0$  が存在する。従って  $\delta' > 0$  とすれば

$$\mu_j(\alpha/m; W(m)) = \mu_j(m; V) + O(m^{(\beta-1)-\delta'}) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{多くの } \Omega^{\tilde{m}} \\ \text{の元に対し} \end{array} \right]$$

という事である。特に、 $V = (\Omega \text{ の体積})^{-1}$  の場合は、

$$\mu_j(m; V) = \lambda_j + 4\pi\alpha m^{\beta-1} |\Omega|^{-1} \quad \text{と なる 為 } ((\lambda_j \text{ は } -\Delta \text{ の } \Omega \text{ での } (\Gamma \text{ 上 Dirichlet 条件}) j \text{ 番目の固有値}))$$

$\mu_j(\alpha/m; W(m)) = 4\pi\alpha m^{\beta-1} |\Omega|^{-1} + o(m^{\beta-1-\delta'}) + O(1)$   
 が得られる。上記定理は  $\mu_j(\alpha/m; \cdot)$  の asymptotic property  
 を良く表現している。再びここで強調しておくが、  
 我々は 特定に配置された 球の中心に対する事実をとり  
 扱っているのではなく、非常に様々な球の配置に対する  
 統計的事実を導いているのである。

注意 2.  $\delta(\beta)$  は effective に計算が可能である。

因みに  $\beta=1$  のときは  $\delta(\beta) = 1/4$  ととれる。すると

$\beta=1$ ,  $V(x) = |\Omega|^{-1}$  の場合

$$\mu_j(\alpha/m; W(m)) = 4\pi |\Omega|^{-1} + o(m^{-\delta'}) + \lambda_j. \quad \left[ \begin{array}{l} \text{多くの} \\ \text{配置} \end{array} \right]$$

$\delta(\beta)$  は実は  $\beta$  によって continuous にとれるので、 $\beta > 1$  で  
 $\beta$  が 1 に十分近い場合、 $V(x) = |\Omega|^{-1}$

$$\Rightarrow \mu_j(\alpha/m; W(m)) = 4\pi m^{\beta-1} |\Omega|^{-1} + o(m^{\beta-1-\delta'}) + \lambda_j \quad \left[ \begin{array}{l} \text{多くの} \\ \text{配置} \end{array} \right]$$

で、 $\beta-1-\delta' < 0$  ととれる。この時  $4\pi m^{\beta-1} |\Omega|^{-1}$  が漸近  
 第 1 項、 $\lambda_j$  が第 2 項となる。

さて、Theorem 1 の歴史的背景について述べて  
 おこう。M. Kac [7] は  $\beta=1$  の場合、( $V(x) = |\Omega|^{-1}$  の下で)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(W(m) \in \Omega^m; |\mu_j(\alpha/m; W(m)) - \mu_j(m; V)| < \varepsilon) = 1$$

を証明した。方法は Brown 運動を用いた確率論的証明

である。この証明の為に彼は Wiener sausage という概念を考へ、これは以後確率論の 1 つの topic となつた。

Kac は remainder estimate ( $\delta(\beta) > 0$  の存在) を証明してゐた。J. Rauch-M. Taylor [5] は  $\beta=1$  の時に、 $V(x) = |\Omega|^{-1}$  の制限をとり除いた。証明は Feynmann-Kac の公式と Wiener sausage であり、やはり remainder estimate が得られてゐた。Papanicolaou-Varadhan [6] は対応する問題を diffusion problem の場合に扱つてゐて興味深い。ただし remainder estimate は得られてゐない。

これも確率論的証明である。Hruslov-Marchenko [8] は  $\beta=1$  の場合をポテンシャル論的に取り扱つてゐる。

$\beta=1$  の場合、Ozawa [2] は摂動論的方法(後で述べる)によつて、remainder estimate が可能である事を示した。

さて、 $\beta > 1$  の場合は、著者の知る限りにおいて、

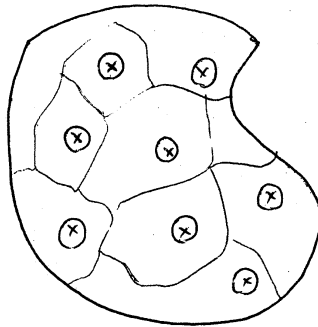
Ozawa [1] が最初の結果である。それには、それ相應の理由がある。といふのは、 $\beta > 1$  の場合には、結果の中に  $-\Delta + 4\pi d m^{\beta-1} V(x)$  という  $m$  に依存する作用素が出現する為、従来の方法は様々な困難に直面するからである。----- 私的な事について話す。私は、外国のこの方面の専門家 (probabilist) に手紙を書いた。

"Brown運動のみを用いた純確率論的証明が出来ないか? 考えてくれ" 答は "I doubt, ---" であった。しかし、これは捨てるにはもったいない問題である。

問題 Theorem 1 を Brown運動を用いて言証明せよ。

### §. 直観的説明

が出来ない定理は面白くない? Theorem 1 がどのような事を意味しているのかについて考えてみよう。今

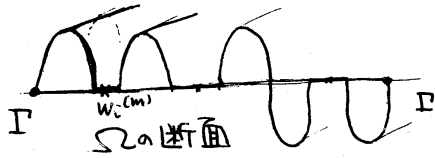


$W^{(m)}$  の配置について考える。さて、 $W_1^{(m)}, \dots, W_{\tilde{m}}^{(m)}$  と  $\tilde{m}$  個の球の中心が  $\Omega$  の内を、動いているとすると、これらのすべての配置の中で、

多く実現するのは、次のような配置であろう。すなわち、  
 1つ  $W_j^{(m)}$  をとってまたとき  $W_j^{(m)}$  に一番近い  $W_i^{(m)}$  との距離が  $m^{-1/3}$  の order である。これは  $\Omega$  が  $\mathbb{R}^3$  内の領域である事を反映している。この事情のもとで、 $-\Delta$  の  $\Omega \setminus \tilde{m}$ -balls の境界上 Dirichlet 条件の下での  $j$ -th eigenvalue に付随した eigenfunction について考える。我々は  $B(\alpha/m; W_i^{(m)})$  達の境界で固有函数を 0 におさねつけているから、



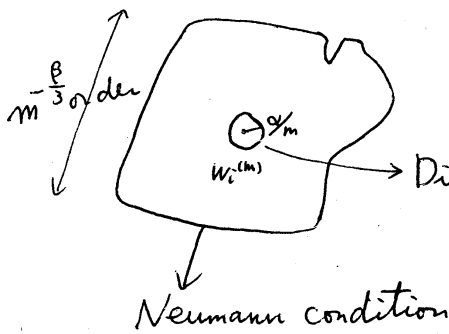
固有函数は、 $m \rightarrow \infty$  のとき、どんどんと波だて  
 くるだろう。すると、波を、布のしわだと思ふと、そのしわ



には、尾根のよ様な場所があ  
 らわれる。さて、尾根といふのは

Neumann条件に相当する。

すると、尾根に囲まれた地域（これを連結成分ごと  
 考えれば）をこれは1つの block を形成する。下にその  
 block を書いてみる。block の境界は  $w_i^{(m)}$  の配置



によってもちろん変化するが、典型

的なのは、左の図の

ように block の大き  
 さが  $m^{-β/3}$  order の場合

である。さて  $\mu_1(\Omega/w_i^{(m)})$

は、この block の外側に Neumann条件、内側の球の境界  
 に Dirichlet条件を置いたときの、Laplacian の 1st

eigenvalue である。これは、内側に Dirichlet boundary が  
 あるために正の数となっている。  $m \rightarrow \infty$  のときの、block  
 の 1st eigenvalue の漸近的性質について考えてみる。

今、この block を相似拡大して、( $m^{β/3}$  倍に各座標を拡大)

すれば、block の size が order 1, 内側の Dirichlet  
 boundary の size が  $\propto m^{(β/3)-1}$  となる。  $\beta < 3$  であるの

で、この量は zero にゆく。ところで、このときの拡大された block での  $-\Delta$  の 1st eigenvalue は、Ozawa [3] によれば、内側の球の半径に比例する。そして、それは

$$m^{(\beta/3)-1} \text{ order}$$

であり、故に、相似拡大される前の  $-\Delta$  の 1st eigenvalue

$$\text{は } m^{(\beta/3)-1} \times m^{(\beta/3)\beta} = m^{\beta-1} \text{ order}$$

となる。

以上のようによ考えれば、

$$\mu_j(\alpha_m; w(m)) = m^{\beta-1} \text{ order}$$

であることが説明できる。Theorem 1 は、さらに詳しい事が成り立つ事を述べている。

注意 3  $\tilde{m}$ -balls の体積 =  $[m^\beta] \times \frac{4}{3}\pi(\alpha/m)^3 \downarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$

に注意しよう。それにもかかわらず  $\mu_j(\alpha_m; w(m))$  は  $\infty$  に近づく。

問題 Theorem 1 を  $\beta < 3$  の場合に一般化せよ。

$\beta = 3$  のときは、どうか？

## § Green 函数の摂動計算

は非常に強カである。

＝此より、Theorem 1 の証明のスケッチについて述べてみよう。

$\beta \in [1, 3)$  を固定する。今  $w(m)$  に関する次の条件を考える。

$(D)_m$ :  $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} B(\alpha/m, W_i^{(m)})$  の連結成分を  
 $\omega_1(w(m)), \dots, \omega_{g(w(m))}(w(m))$

とする。 ( $g(w(m))$  は  $w(m)$  の函数)

$\Rightarrow g(w(m)) = 1$  となれば連結成分の数は 1 つ

または

$$\max_{2 \leq S \leq g(w(m))} \text{diam } \omega_S(w(m)) \leq m^{-1} \log m$$

が成り立つ。

次の Lemma が成り立つ。

Lemma  $\beta \in [1, 3)$  とする。そのとき

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(w(m) \in \Omega^{\tilde{m}}; w(m) \text{ が } (D)_m \text{ をみたす}) = 1.$$

＝此により、Theorem 1 を証明するにあたっては、 $w(m)$  が  $(D)_m$  をみたして いるとして証明すればよい。

さて、 $w(m)$  が  $(D)_m$  をみたし、 $g(w(m)) \geq 2$  としてみる。

すると  $\omega_S(w(m))$ ,  $S=2, \dots, g(w(m))$  での  $-\Delta$  (境界上

Dirichlet 条件) の 1st eigenvalue は 下より

$$C m^2 (\log m)^{-2}$$

でおさえられる。すると、 $m^{\beta-1}$  ( $\beta \in [1, 3)$ ) より、 $C$  は大きい。だから、 $j$  を fix しておかまじり、そのような小さな連結成分からは、 $j$ -th eigenvalue は ( $m \rightarrow \infty$ ) のとき現れ出得ない。以上により、 $w(m)$  が  $(D)_m$  をみたしている、かつ考察の対象とすべきは、 $\Omega_1(w(m))$  である事がわかる。

さて、次の Lemma を組み合わせ議論により容易にわかる。

Lemma :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(w(m) \in \Omega_m^{\wedge}; w(m) \text{ が } (E)_m \text{ をみたす}) = 1$$

== で、

$(E)_m$  : 今  $\Gamma$  の subset  $R_m$  で ( $\Gamma$  に induce された計量で) 半径  $2m^{-1} \log m$  の disk を任意にとってくる。

そのとき、

$$\overline{R_m \setminus \bigcup_{i=1}^m B(\alpha/m, w_i(m))} \neq \emptyset.$$

注意 さては幾人かの人は西配布したフルプリントの中では

$R_m$  は  $\Gamma$  の subset で  $\text{diam } R_m > 2m^{-1} \log m$  なるものとしてある。

これは、訂正する必要がある。

さて、以後  $\omega_1(w(m)) = \omega$ 。  $\gamma > \beta - 1$  とし、  $m' = [m^\gamma]$ 。

$G_{(m')} (x, y; w(m))$  を  $\Delta - m'$  の  $\omega$  での Green 函数 (境界条件は Dirichlet 条件) とする。 すなわち、

$$(\Delta_x - m') G_{(m')} (x, y; w(m)) = -\delta(x-y), \quad x, y \in \omega$$

$$G_{(m')} (x, y; w(m)) = 0 \quad x \in \partial\omega$$

すなわち、  $\Delta - m'$  の  $\Omega$  での Green 函数 (Dirichlet 条件) を

$G_{(m')} (x, y)$  とする。 以後  $G_{(m')} (x, y)$  を  $G(x, y)$  と書く。

また、簡単な為、  $w_i^{(m)}$  を  $w_i$  と書く。

$$h_{(m')} (x, y; w(m))$$

$$= G(x, y) - (4\pi\alpha/m) e^{m''d/m} \sum_{i=1}^{m^*} G(x, w_i) G(w_i, y)$$

$$+ \sum_{s=2}^{m^*} (-4\pi\alpha/m)^s e^{m''ds/m}$$

$$\left( \sum_{(s)} G(x, w_{i_1}) G(w_{i_1}, w_{i_2}) \cdots G(w_{i_{s-1}}, w_{i_s}) G(w_{i_s}, y) \right)$$

とおく。  $==$  で

$$m'' = (m')^{1/2}, \quad m^* = (1/\log m)^2$$

$\sum_{(s)}$  は  $(i_1, \dots, i_s)$  なる添字が、  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{s-1} \neq i_s$

かつ  $1 \leq i_1, \dots, i_s \leq \tilde{m}$  なるものすべてを重く

ものの総和を表わす。

さて、このように置いた時、  $h_{(m')} (x, y; w(m))$  は、  $G_{(m')} (x, y; w(m))$

の良い近似になる。 二つが、 Theorem 1 の言証明の key point

である。もう少し詳しく調べよう。

$$(G_{(m')}f)(x) = \int_{\omega} G_{(m')}(x, y; w(m')) f(y) dy, \quad x \in \omega$$

$$(H_{(m')}f)(x) = \int_{\omega} h_{(m')}(x, y; w(m')) f(y) dy, \quad x \in \omega$$

と置く。  $h_{(m')}$  が  $G_{(m')}$  に近しいとは

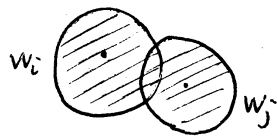
Proposition  $\beta \in [1, 3)$ ,  $\varepsilon > 0$  を固定する。今  $\gamma > \beta - 1$  とする。  $\nu > 0$  を固定。 そのとき

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(w(m) \in \Omega^{\tilde{m}}; (D)_m, (E)_m, (*) \text{ が成立}) = 1$$

ここで

$$(*) \quad \|G_{(m')} - H_{(m')}\|_{L^2(\omega)} \leq C \left[ \tilde{m}^{-2+\nu} (1 + |\log m| (m')^{\beta} \varepsilon) \right].$$

この証明は極めて面倒であり、また delicate trick を 必要とする。  $L^p$ -theory を用いるし、また、球  $B(\alpha/m; w_i)$  と  $B(\alpha/m; w_j)$  が 重なるような場合をも含んでいるので、複雑



である。詳しく知りたい方は、プレプリントを参照していただきたい

11. Ozawa [1].

ともかくも、非常に面倒な、routineでない計算を行なうことにより、Theorem 1 は証明される。極だて複雑なのは、 $\gamma$  を  $\beta-1$  より大きくとり、しかも、大きくなりすぎないようにとり、確率計算を行なう点である。Expectation をこめて計算しないと、期待すべき結果は得られない。

### §. 何故に摂動計算が有効か？

という事をひと言でまとめてしまうのは易しくない。それは、摂動計算で得られる結果が、相当広い範囲という事を、今後、実証してゆく他はない！

既に述べたように Kac の結果 ( $\beta=1$ ) は確率過程の考え方で証明できる。だから、この時点では摂動計算の優位性は顕著でない。しかし、Kac の方法は球(微小球)の境界が吸収壁 (Dirichlet boundary) であるときには有効だが、反射壁 (Neumann boundary) の場合には不明になる。Neumann boundary は Wiener sausage 的思考に fit してはならない。

さて、Ozawa [4] には、次の事が証明されている。今  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界領域とし、その境界  $\Gamma$  は滑らかとする。  $w \in \Omega$  を固定する。  $B(\varepsilon; w)$ :  $w$  中心

半径  $\varepsilon$  の開球:  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(\varepsilon; w)}$ .

固有値問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega_\varepsilon \\ u(x) = 0 & x \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & x \in \partial B(\varepsilon; w) \end{cases}$$

の eigenvalue を  $0 < \mu_1(\varepsilon) \leq \mu_2(\varepsilon) \leq \dots$  と重複度をこめて繰り返えし並べる。  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  で

$-\Delta$  ( $\Gamma$  上 Dirichlet 条件) の eigenvalue とする。

Theorem 2.  $j$  を固定する。  $\mu_j$  を単純固有値と仮定する。

$$\implies \mu_j(\varepsilon) = \mu_j - \varepsilon^2 (2\pi |\text{grad } \varphi_j(w)|^2 - \pi \varphi_j(w)^2 \mu_j) + O(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|^2) \quad \varepsilon \downarrow 0$$

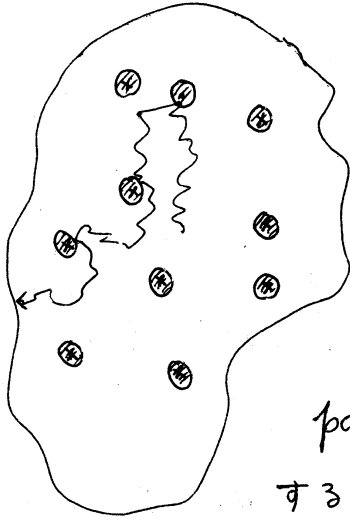
==>  $\varphi_j(x)$  は  $\int_\Omega \varphi_j(x)^2 dx = 1$  と正規化された  $-\Delta$  ( $\Gamma$  上 Dirichlet 条件) の  $\Omega$  での eigenfunction.

注意: もし領域摂動による固有値問題の研究に興味があるならば、<sup>まず</sup> Ozawa [4] を読んでいただきたい。これは全く routine ではない trick と、華やかな計算が必要である。上の Theorem 2 は一見して、その意味がわかりにくく見えるかもしれないが、次に示すように相当に



深い意味がかくされている。

今、 $\mathbb{R}^2$ の領域に多数の Neumann obstacle  
(diskで、境界が反射壁条件をみたすもの)が入っていると  
しよう。



今、その obstacle がある為には、obstacle  
の間を拡散してゆく Brownian particle  
は、どのような影響を受けるであろう  
か？ 簡単のため境界は吸収壁  
であるとする。吸収壁に到達すると

particle は死んでしまうが、そこに到達  
するまでの時間はどう変化するだろうか？

これに対して、直観的には、時間は遅くなるという事がいえる。  
"人のいっばいいる所を歩いてゆく事を考えよ。人にぶつ  
かったらはじめとばされるので進みにくいではないか!"

さて、Theorem 2 は、多数の Neumann obstacle の  
場合、次のように表わされる。

今  $\{w_i^{(m)}\}_{i=1}^{[m^\delta]}$  ( $\delta < 2$  を fix) を  $[m^\delta]$  個の半径  
 $\frac{1}{m}$  の円板の中心とする。  $w_i^{(m)} \in \Omega$ ,  $[m^\delta] = \tilde{m}$  とおく。ここで  
は、 $\{w_i^{(m)}\} = w^{(m)}$  の random な配置を考えるのではなく、  
deterministic case を考える。

仮定 (I)  $V(x) \in C^1(\bar{\Omega})$  なる函数が存在して、  
任意の  $f \in L^1(\Omega)$  に対し、

$$\frac{1}{\tilde{m}} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} f(w_i^{(m)}) \longrightarrow \int_{\Omega} f(x) V(x) dx.$$

仮定 (ii)

$$|w_i^{(m)} - w_j^{(m)}| \geq C m^{-(\delta/2)} \quad (i \neq j)$$

ある  $C > 0$  が存在する。

以上の仮定のもとで、

$\Omega \setminus \tilde{m}$ -obstacles の  $-\Delta$  の  $j$ -th eigenvalue  
( $\Gamma$  上 Dirichlet, obstacles 上 Neumann 条件)  $\mu_j(\gamma_m; w(m))$   
は、

$$\begin{aligned} \mu_j(\gamma_m; w(m)) - \mu_j &= -\tilde{m} m^{-2} \int_{\Omega} \left( 2\pi |\text{grad} \varphi_j(w)|^2 - \pi \mu_j \varphi_j(w)^2 \right) \\ &\quad \times V(w) dw \\ &\quad + \text{remainder term} \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たす。

この事実を、驚くべき点も含んでいる。今  $V(x) = |\Omega|^{-1}$  ( $|\Omega|$ :  $\Omega$  の面積) としよう。すると

$$\mu_j(\gamma_m; w(m)) - \mu_j = -\pi \mu_j m^{\delta-2} |\Omega|^{-1} + \text{remainder}$$

となる。言いかえれば

$$\mu_j(\gamma_m; w(m)) = \mu_j (1 - \pi \mu_j m^{\delta-2} |\Omega|^{-1}) + \text{remainder}$$

さて

$$1 - \pi \mu_j m^{\delta-2} |\Omega|^{-1}$$

なる量は、 $\Omega$ の中 obstacle 達を除いた部分の  $\Omega$  の面積に  
 対する比 = 空隙率である。さて、それは、ちょうど、

$$-\Delta \longrightarrow -(\text{空隙率}) \times \Delta$$

と operator が 変化 した に 等しい。すなわち、拡散係数  
 が減少した、という事以上の事を含んでいる。このような  
 事が rigorous に 証明 できるわけである。

以上の事は random Neumann obstacle の場合は  
 どうか？

このように考えると、既に述べてきたことが様々な  
 数理物理の問題と直結していることがわかるだろう。

著者は、Boltzmann equation や self-diffusion  
 problem や、... その他の問題と以後深く関連して  
 くる事をここで断言しておきたい。

## References

- Czawa [1] Random media and eigenvalues of the Laplacian (preprint 1983)
- [2] On an elaboration of M. Kac's theorem concerning eigenvalues of the Laplacian in a region with randomly distributed small obstacles, Commun. Math. Phys. 91, 473-487 (1983)
- [3] Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, Duke Math. J. 48, 767-778 (1981)
- [4] Spectra of domains with small spherical Neumann boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA, 30, 259-277 (1983)
- Rauch-Taylor [5] Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. J. Funct. Anal. 18 27-59 (1975)
- Papanicolaou-Varadhan [6] Diffusion in region with many small holes Lecture Notes in Control and Information, 75, Springer 1980, pp 190-206

Kac [7] Probabilistic methods in some problems  
of scattering theory. Rocky Mountain J.  
Math. 4, 511-538 (1974).

Hruslov-Maschenko [8] Boundary value problems  
in region with fine-grained boundaries.  
(in Russian) Kiev 1974.

その他

Miksis : Effective dielectric constant of a nonlinear  
composite material, Siam J. Appl. Math.  
43, (1983) 1140-1155

Kohler-Papanicolaou : Some applications of the coherent  
potential approximation in multiple scattering  
and waves in random media, P. L. Chow,  
W. E. Kohler and G. C. Papanicolaou, eds.  
North-Holland, 1981, pp. 1992-2023.