数理解析研究所講究録
第532巻 1984年 125-136

トカマクのキンク・モードの非線形計算

原研・核融合 栗田 源一（Gen-ichi Kurita）
安積 正史（Masafumi Azumi）
常松 俊秀（Toshihide Tsunematsu）
滝塚 知典（Tomonori Takizuka）
竹田 辰興（Tatsuoki Takeda）

§.1 はじめに

トカマク装置によるプラズマ閉込めの実験に於て major disruption と呼ばれる急激なプラズマ電流の減少を伴った負のワン・ターン電圧スパイクが観測されている。この major disruption は装置が大きくなるにつれ、それに与える損失が大きくなるので、その原因の解明は、大きな問題となっている。現在この原因として、$m/n=2/1$（m, n は、各々ポロイダル方向、トロイダル方向の波数を表わす）のテアリング・モードが関連していると考えられている[1~3]。しかしながら、数値計算によると、この $m/n=2/1$ のモードが大きな磁気島を持つような不安定なプラズマの電流分布は、かなり制限されたものであり、更に シェル（導体壁）がプラズマ表面近くにおか

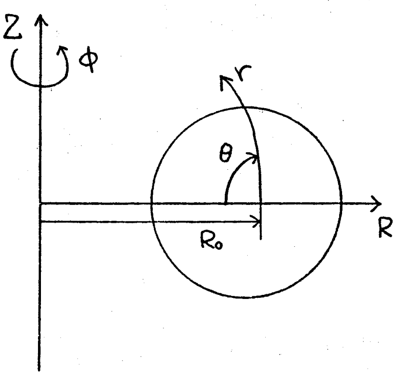
れている場合を除いて、この major disruption のために、q_a（プラズマ表面での安全係数の値）が 2 以下になれないという実験データから、プラズマ表面の動く $m/n = 2/1$ キンク・モード不安定性も、これに何らかの関連があるものと考えられる。自由境界キンク・モードは、円筒近似では、線形に不安定な領域でも非線形効果を考慮すれば、ある閾値で、飽和することがしられている[4,5]。そこで、ここでは トロイダル効果を考慮したキンク・モードの非線形計算を行い、この飽和が、どのような影響を受けるのかを調べ、$m/n = 2/1$ 自由境界キンク・モードと major disruption との相関を見出すことを、その主な目的とする。

§.2 基礎方程式

通常の自由境界キンク・モードの解析は、プラズマは真空領域で囲まれているとして方程式はプラズマ領域と真空領域で別々に解き境界で解をつないで全体の解を求めるという方法をとる。線形の解析では、プラズマの表面の変形は、摂動量の2次の量となるため無視できるが、非線形の計算はこれを考慮しなければならず、このプラズマ表面の変形の計算は、境界条件の計算を含めて、少々繁雑なものとなる。そこで、ここでは、このキンク・モードの計算を通常の真空解を使わずに、プラズマの

外側に高抵抗領域があると仮定して真空領域を表現する方法をとる。このように仮定すれば、外側の高抵抗領域では、プラズマ電流は殆んど流れず、その解は通常の真空解を使ったものと同じふるまいをすることが予想される。

基礎方程式は通常の簡約方程式を用いるが、プラズマ境界の位置を決めるために抵抗の式を解く必要がある。ここでは抵抗はプラズマの流れに沿って動くと仮定し、簡約方程式に抵抗の対流方程式を加えたものを用いる。磁力線が



第１図

直線となる（r, θ, φ）曲線座標（第１図）を使い、更にすべての変数をθとφに関してフーリエ展開すれば、基礎方程式は次の様になる。

$$\frac{\partial U_{m/n}}{\partial t} = [U, \Phi]_{m/n} - \frac{B_0}{R_0} n J_{m/n} + [J, \psi]_{m/n} \quad , \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial t} = [\psi, \Phi]_{m/n} + \frac{B_0}{R_0} n \Phi_{m/n} + \sum_{\substack{m'+m''=m \\ n'+n''=n}} \eta_{m'/n'} J_{m''/n''} - E_{m/n} \quad , \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_{m/n}}{\partial t} = [\eta, \Phi]_{m/n} \quad , \qquad (3)$$

ここで

$$J_{m/n} = \frac{1}{r} \sum_{m'+m''=m} \Big[\frac{d}{dr}\Big(G^{rr}_{m'} \frac{d\psi_{m''/n}}{dr}\Big) - m'' \frac{d}{dr}\big(G^{r\theta}_{m'} \psi_{m''/n}\big) - m G^{r\theta}_{m'} \frac{d\psi_{m''/n}}{dr} - m m'' G^{\theta\theta}_{m'} \psi_{m''/n} \Big] , \qquad (4)$$

$$U_{m/n}=\frac{1}{r}\sum_{m'+m''=m}\Big[\frac{d}{dr}\Big(H^{rr}_{m'}\frac{d\phi_{m''/n}}{dr}\Big)-m''\frac{d}{dr}\big(H^{r\theta}_{m'}\phi_{m''/n}\big)$$
$$-mH^{r\theta}_{m'}\frac{d\phi_{m''/n}}{dr}-mm''H^{\theta\theta}_{m'}\phi_{m''/n}\Big], \quad (5)$$

$$rg^{ij}=\sum_{m}G^{ij}_{m}(r)\exp(im\theta) , \quad (6)$$

$$r\Big(\frac{R}{R_0}\Big)^2g^{ij}=\sum_{m}H^{ij}_{m}(r)\exp(im\theta) , \quad (7)$$

$$[a,b]_{m/n}=\sum_{\substack{m'+m''=m\\ n'+n''=n}}\frac{m'}{r}\Big(a_{m'/n'}\frac{db_{m''/n''}}{dr}-b_{m'/n'}\frac{da_{m''/n''}}{dr}\Big) , \quad (8)$$

(1)〜(7)式に於て，Φ, U, Ψ, J, η は各々流れ関数，渦度，ポロイダル磁束関数，プラズマ電流，抵抗を，又 R_0, B_0 は各々対称軸から磁気軸までの距離，トロイダル磁場，E は，抵抗によるプラズマ電流の減衰を補うための電界を表わす。g^{ij} は曲線座標(r, θ, ϕ)のメトリック係数を表わし，円筒配位では，(4), (5)式の Ψ, Φ の作用素は通常のラプラシアンとなる。又運動方程式，(1)式，に於て $(R/R_0)^2P=\mathrm{const.}$ が仮定されている。

§3 線形解析

この章では我々の用いた高抵抗モデルでの解が通常の真空解を使ったキンク・モードの解と一致することを示し，更に数値解析により，線形に於るその解のふるまいを調べる。前章の基礎方程式 (1), (2), (4), (5) を $\Phi(U)$ が微少量であるとして，Φで線形化し，時間微分を γ とおけば，円筒配位で，

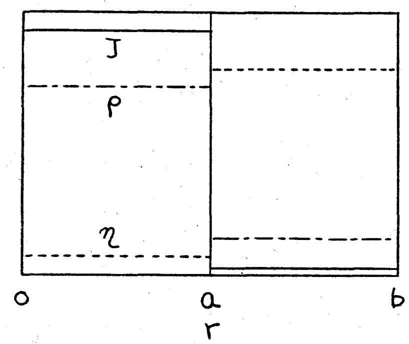
$$\gamma \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{\nabla}\hat{\Phi}) = F\Delta\hat{\Psi} - \frac{m}{r}\frac{dJ_0}{dr}\hat{\Psi} \qquad (9)$$

$$\gamma\hat{\Psi} = -F\hat{\Phi} + \eta\Delta\hat{\Psi} \qquad (10)$$

ここで

$$F \triangleq \frac{B^\theta}{r}(m - nq) \qquad (11)$$

又 B^θ, q は各々ポロイダル磁場、安全係数を、～は摂動量であることを表わす。この章での線形解析では、運動方程式、(9)式、に於て $\rho=$const. の仮定は、はずされている。以下では、第2図 のようなモデルプラズマを考え、プラズマ電流、抵抗、密度は各々プラズマ内部、外部で一様であるとし更にキンク・モードを表現するために、$\eta_{in}/\eta_{ex} \ll 1$、添字 in, ex は各々プラズマ内部、外部を表わす、であることを仮定する。



第2図

この仮定により、プラズマ内部、外部での解 $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$ は、各々次の様に求まる。

$$\hat{\Phi}_{in} = -\frac{\gamma}{F_{in}} r^m \quad , \quad \hat{\Phi}_{ex} = -\frac{\gamma}{F_{in}} \frac{r^m - b^{2m}r^{-m}}{1. - (b/a)^{2m}} \quad , \qquad (12)$$

$$\hat{\Psi}_{in} = r^m \quad , \quad \hat{\Psi}_{ex} = \frac{r^m - b^{2m}r^{-m}}{1. - (b/a)^{2m}} \quad , \qquad (13)$$

ここで、$\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$ は $r=0$, $r=b$ で各々 0、又 $r=a$ で内部解と外部解が等しくなるという条件を用いた。更に γ を決めるために、(9)式を空間積分した次式、

$$\gamma\left[\rho\frac{d\hat{\Phi}}{dr}\right]_{a-\delta}^{a+\delta} = \left[F\frac{d\hat{\Psi}}{dr}\right]_{a-\delta}^{a+\delta} - \frac{m}{a}\left[J\hat{\Psi}\right]_{a-\delta}^{a+\delta} \quad , \tag{14}$$

に (12),(13)式の解を代入すれば次の分散関係式が求まる。

$$\gamma^2 = \left[1. + \frac{P_{ex}}{P_{in}}\cdot\frac{1.+(a/b)^{2m}}{1.-(a/b)^{2m}}\right]^{-1}\gamma^2_{analy.} \quad , \tag{15}$$

$$\gamma^2_{analy.} = \left(\frac{B^0_{\theta}(a)}{a}\right)^2\frac{2}{P_{in}}(m-nq_{\delta a})\left(1.-\frac{m-nq_{\delta a}}{1.-(a/b)^{2m}}\right) , \tag{16}$$

(16)式は、シャフラノフが解析的に導いた一様電流の場合のキンク・モードの成長率[6]で、外部に高抵抗領域のあるモデルプラズマの成長率、(15)式は $P_{ex}/P_{in}\to 0$ でこのシャフラノフの成長率に一致する。更に $P_{ex}/P_{in}=1$ の場合でもこの値に $(1.-(a/b)^{2m})/2.$ の因子がかかるだけで、キンク・モードを表現していることは明らかである。ここまでの解析的な取扱いでは、J, η, P の関数形は第2図のようなステップ関数でよいが数値計算の場合は、その空間微分を数値的に表現するために、プラズマ境界に於てもある程度の滑らかさを必要とする。そこで従来の関数形 $f_i(r)$ に適当な滑らかさをもった Shaping 関数、$S_i(r)$ をかけ合わせた数値解析用の関数を考える。即ち

$$J(r) = f_J(r)\,S_J(r) \quad , \tag{17}$$

$$P(r) = f_P(r)\,S_P(r) \quad , \tag{18}$$

$$\eta(r) = f_\eta(r)\,S_\eta^{-1}(r) \quad , \tag{19}$$

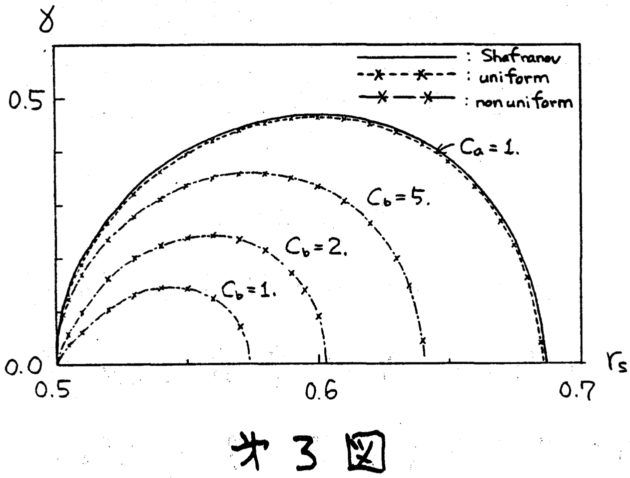
$$f_i(r)=\begin{cases}(1.-C_a)\left[1.-\left(\frac{r}{a}\right)^{2C_b}\right]^{C_c}+C_a & ;\ 0\le r\le a\ ,\\ C_a & ;\ a\le r\le b\ ,\end{cases}\tag{20}$$

$$S_i(r)=\begin{cases}(1.-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}x_\gamma-\beta x_\gamma)\right]+C_\alpha\ ; & 0\le r\le a-C_\gamma,\\ (1.-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}x-\beta x)\right]+C_\alpha\ ; & a-C_\gamma\le r\le a+C_\gamma,\\ (1.-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}x_\gamma-\beta x_\gamma)\right]+C_\alpha\ ; & a+C_\gamma\le r\le b\ ,\end{cases}\tag{21}$$

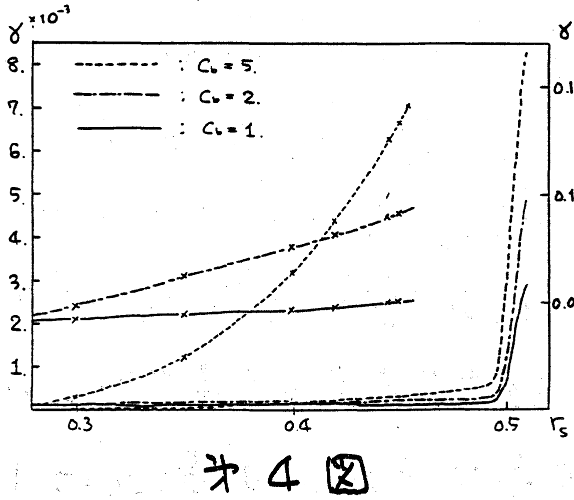
ここで　$x=\pi\cdot\dfrac{r-a}{C_\beta}\ ,\ \beta=\dfrac{1.}{1.+x_\gamma^2}\ ,\ x_\gamma=\pi\cdot\dfrac{C_\gamma}{C_\beta}.$　(22)

$S_i(r)$は. $r=a$を中心に $2C_\gamma$の幅で滑らかに減少し.その両外側では一定となる関数である。以下.この数値解析用関数を平衡量として使い(9),(10)式を固有値問題として解いた線形計算の結果について述べる。

第3図は成長率γのr_s(特異点の位置)依存性を表わしたグラフである。実線は(16)式のシャフラノフによる解析的な値で.数値計算による値(点線)は.これによく合っている。3本の一点鎖線は.分布電流の場合の成長率で.シェアによる安定化



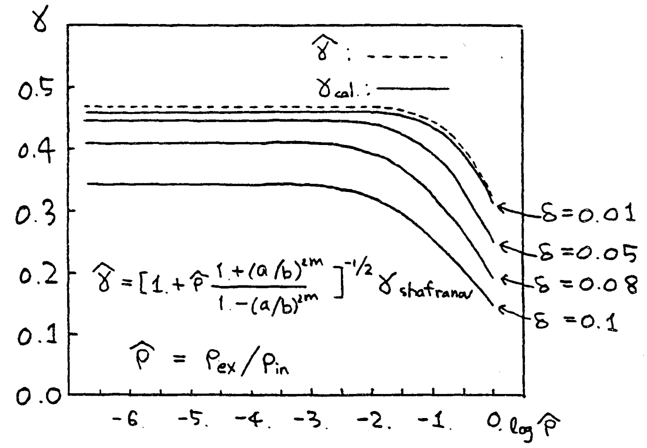
第3図



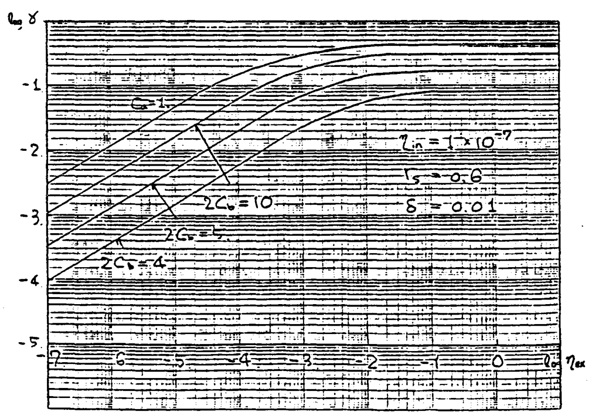
第4図

の効果が表わされており又この分布電流の場合は、r_sがプラズマ内部にある場合、プラズマ抵抗が内部でも有限であることからテアリング・モードが不安定となる。（オ4図）計算パラメータは、各々 $\eta_{in}=10^{-7}$, $\eta_{ex}=1.$, $\rho_{in}=1.$, $\rho_{ex}=10^{-3}$, $J_{ex}/J_{in}=10^{-7}$, $\delta\ (=2C_\gamma)=0.01$, $a/b=0.5$ とした。

オ5図に γ の ρ_{ex} 依存性を示す。点線は(15)式の解析的な値を、又実線はδを変えた時の数値計算による成長率で、δが充分に小さい（$\delta<0.01$）時は解析的な値によく合っているがδが大きくなってくると電流が境界付近で分布をもってくるため一様電流分布の仮定が成立たず、解析的な値からずれてくる。計算パラメータは、$J_{ex}/J_{in}=10^{-7}$, $\rho_{in}=1.$, $r_s=0.6$, $a/b=0.5$, $C_a=1.$とした。



オ5図



オ6図

次にオ6図に γ の η_{ex} 依存性を示す。上から一様電流、3種類の分布電流の成長率を示すが、いずれも η_{ex} が充分大きい時の値は、その η_{ex} の値に依らず キンク・モードのオーダーとなっ

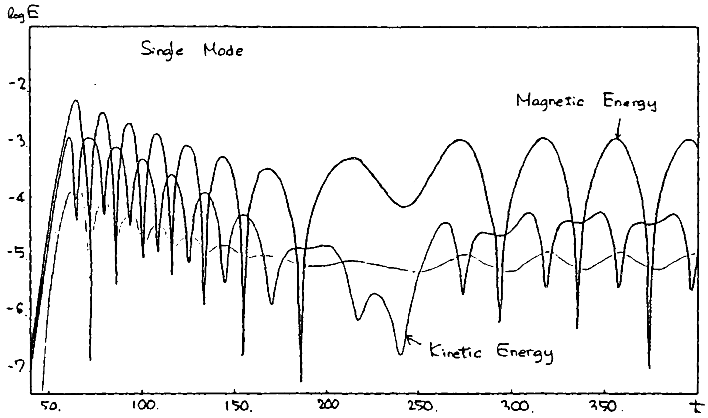
ているが η_{ex} の値が小さくなるに従って それの η_{ex} 依存性は $\eta^{3/5}$ となり通常のテアリング・モード[7] の成長率となる。従って η_{ex} の値によって キンク・モードから テアリング・モードに移っていることが示されている。この場合の計算パラメータは、$J_{in}=10^{-7}$, $\rho_{in}=1$, $\rho_{ex}=10^{-3}$, $r_s=0.6$, $a/b=0.5$, $\delta=0.01$ とした。

以上、この章では、線形解析を行い、高抵抗モデルが自由境界キンク・モードを充分よく表現することを解析的、及び数値解析的に示した。数値計算は、r 方向のメッシュ数, I_{max}, は、201から401とし、プラズマ表面付近で密となる非等間隔メッシュを使い、又すべて $(m,n)=(2,1)$ モードを対象とした。

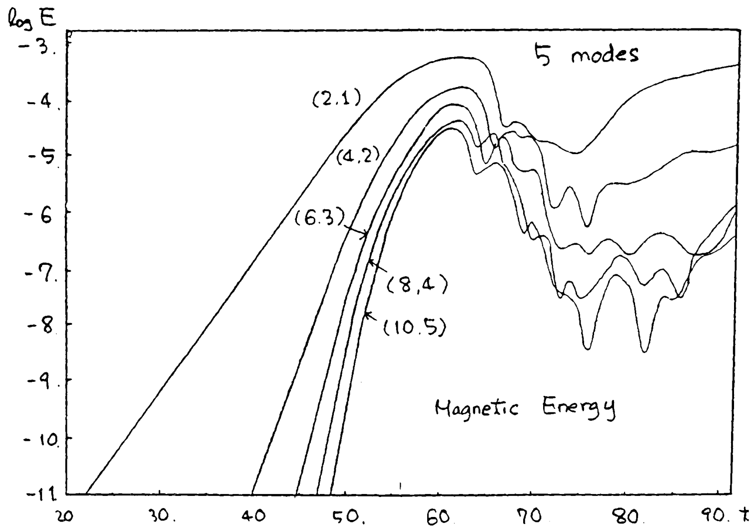
§5 非線形計算

(9),(10)式を固有値問題として解く線形の解析では、アルフヴェン速度; $v_a=B/\sqrt{\rho}$ の大きさは問題とならないが、(1)〜(3)式を時間積分して解く非線形の計算では、その大きさが時間ステップ, Δt, の大きさの上限を決めるので計算時間の制約から $\rho_{ex}/\rho_{in}=1$. とおき、プラズマ密度は、中心 $(r=0)$ からシェル $(r=b)$ まで一様と仮定する。この場合でも自由境界キンク・モードが充分表現されていることは、前章の解析で明らかである。非線形の計算は、(1)〜(3)式を時間積分しなければならないが、まずその第一段階として $\eta=\text{const.}$ 即ち (1),(2)

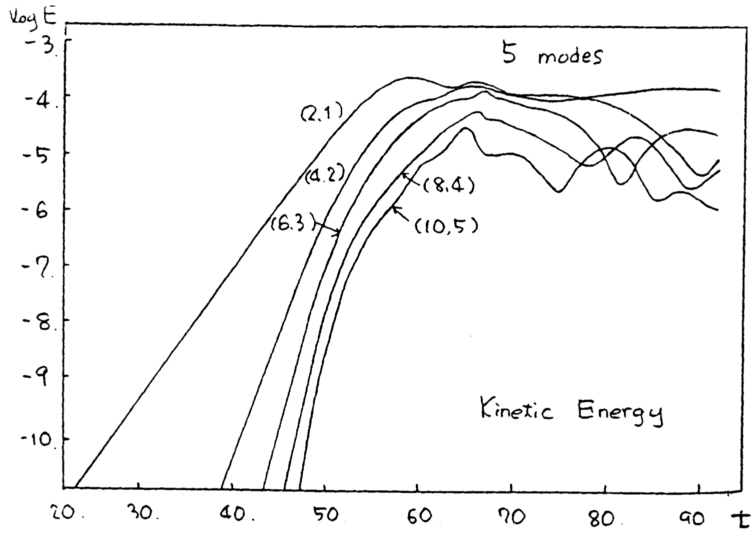
式のみを時間積分する計算を行う。第7図は1モードの場合の磁場エネルギーと運動エネルギーの時間変化を示す。このグラフから、磁場エネルギーと運動エネルギーが互にそのエネルギーを交換して各々振動し飽和していることがわかる。第8図と第9図は、5モードにした場合の磁場エネルギーと運動エネルギーの時間変化を示したもので、1モードの場合と、時間スケールが異なり、又モード数が増えたために多少複雑なふるまいにはなっているが、本質的には、1モードの時と



第7図



第8図



第9図

同じ振動解となっている。飽和レベルは、1モードの時に比べて、低くなっているが、これは1モードの計算は、over shootして大きめの値になっていることを示している。更にモード数を多くした(10モード)計算結果は、5モードの場合と、比べて殆んど変化なく、モード数は、5で充分と思われる。この非線形計算の計算パラメータは、$\eta_{ex}=1.$, $\eta_{in}=10^{-4}$, $\rho_{in}=\rho_{ex}=1.$, $a/b=0.5$, $\delta=0.05$, $r_s=0.6$, $I_{max}=201$, $\Delta t=0.02$ とした。

§.6 おわりに

現在、プラズマの境界を求めるため、この式;(3)式を同時に解く計算を行っている。ここまでの計算は、円筒配位で、2次元(単一ヘリシティ)の計算であるが、次にトーラス配位で3次元の計算を行い、円筒配位で飽和していたモードが、どのような影響を受けるかを調べる予定である。

参考文献

1) B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes and D.K. Lee, Phys. Rev. Lett. 41, (1978) 1386.

2) G. Kurita, M. Azumi, T. Tuda, T. Takizuka, T. Tsunematsu, S. Tokuda, K. Itoh and T. Takeda, JAERI-M 9788 (1981).

3) A. Sykes and J.A. Wesson, Phys. Rev. Lett. 44, (1980) 1215.

4) P.H. Rutherford, H.P. Furth and M.N. Rosenbluth, in Proceedings of Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA (Vienna 1971) vol. II P.539.

5) K. Itoh, Ph. D. Thesis (1979).

6) V.D. Shafranov, Sov. Phys._Tech. Phys. 15, (1970) 175.

7) H.P. Furth, P.H. Rutherford and H. Selberg, Phys. Fluids 16, (1973) 1054.