

## 数値計算における有界変動関数の役割

電気通信大学 田端正久 (Masahisa TABATA)

### 0. はじめに

MHD 方程式系を始め、広く流体现象は、各種物理量の保存則として記述されるので、非線形双曲型方程式系が現れる。流体の粘性係数や熱伝導係数が考慮されると放物双曲型方程式系となる。単独の非線形双曲型方程式である Burgers 方程式においてもそうであるように、一般に非線形双曲型方程式系の問題では各種データが滑らかであっても解に不連続 (shock, 衝撃波) が生じうる。微小な拡散効果が伴えば境界層や遷移層 (boundary layer, transition layer) が現れる。これらの特徴を持つ解を数値計算でとらえるには種々の工夫が必要となる。

衝撃波のような不連続な解を取り扱う関数空間としては有界変動関数の空間が適当であることが知られている。ルベグ可積分な関数からなる空間  $L^1$  では不連続関数は扱えるが境界へのトレースは定義出来ない。一方、ソボレフ空間  $W^{1,1}$  ではトレースは定義出来るが不連続関数は扱えない。有界変動関数空間はこれらの中に入る空間であり、トレースも不連続関数も共に取り扱える。数値解析においてもこの関数空間は重要で、数値解の挙動もこの空間で考えるのが自然である。

以下では、多次元空間での有界変動関数を解説し、数値計算にどのようにして用いるかについて述べる。最後に不連続解が生じる問題の数値例として単独準線形境界値問題の計算結果を示す。

### 1. 有界変動関数の定義と性質

$\Omega$  を区分的に滑らかな境界を持つ  $\mathbb{R}^n$  の有界領域とする。

定義 1.  $L^1(\Omega)$  に属している関数  $f$  が有界変動であるとは、

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx ; g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1 \right\} < +\infty \quad (1)$$

なるときをいう。ここに、 $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  は  $\Omega$  で 1 回連続的微分可能で台がコンパクトなベクトル値関数の全体である。

上の定義は Giusti[1] による。 $\Omega$  で定義された有界変動関数の全体を  $BV(\Omega)$  と表記する。式 (1) は超関数の記法で

$$\sup\{-\langle \text{grad } f, g \rangle; g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1\} < +\infty$$

とも書かれる。また (1) は

$$\sup\left\{\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx; g \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1\right\} < +\infty$$

と同値である。ここに、 $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  は超関数の意味の導関数が本質的有界で境界で零になるベクトル値関数の全体である。したがって、対応

$$g \rightarrow \int_{\Omega} -f \partial g / \partial x_i \, dx, \quad (i=1, \dots, n)$$

は  $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$  上の連続線形汎関数を定義するので、Riesz の表現定理(Rudin[2])によりラドン測度  $\mu_i$  が存在して

$$\int_{\Omega} g \, d\mu_i = \int_{\Omega} -f \partial g / \partial x_i \, dx, \quad (g \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})) \quad (2)$$

と書き表わせる。 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  と置くと (2) から

$$\int_{\Omega} g \, d\mu = \int_{\Omega} -f \operatorname{div} g \, dx, \quad (g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)) \quad (3)$$

となるので、有界変動関数の超関数の意味の勾配はベクトル値ラドン測度である。以後、 $\mu$  を  $Df$ 、(3) の左辺を

$$\int_{\Omega} g \, Df$$

と書くことにする。 $|Df|$  を

$$|Df|(E) = \sup \left\{ \int_E g \, Df; g \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1 \right\}$$

で定義すると  $|Df|$  は正則な正のボレル測度になる。 $|Df|(\Omega)$  を全変動量(total

variation)と言ひ、この値は (1)式左辺に一致する。全変動量を  $TV[f]$  とも書く。

有界変動関数空間  $BV(\Omega)$  はノルム

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1} + TV[f]$$

でバナッハ空間になる。

例1.  $W^{1,1}(\Omega)$  に属している任意の関数  $f$  は有界変動であり

$$Df = \text{grad } f \, dx$$

である。ここに、 $dx$  はルベグ測度を示す。このとき、全変動量は

$$TV[f] = \int_{\Omega} |\text{grad } f| \, dx$$

となる。したがって、 $n \geq 2$  なら有界変動関数は有界であるとは限らない。

例2. (Giusti [1])  $G$  を  $C^2$ -クラスの境界  $\partial G$  を持つ領域とする。 $G$  の特性関数  $f$  は有界変動であり、全変動量は

$$TV[f] = \text{mes}(\Omega \cap \partial G)$$

である。

$n = 1$  のとき、 $\Omega = [0, 1]$  としてよく知られた有界変動関数の定義

$$\sup \{ \sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| ; N, 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1 \} < +\infty \quad (4)$$

と先に述べた定義とは次の関係がある。式(4)の左辺を  $TV_c[f]$  と表わせば、

$$TV[f] = \min \{ TV_c[g] ; g = f, \text{ a.e. } \}$$

が成立する。 $L^1$  関数では1点の値が自由に変更可能であることを考慮すれば (4) より定義1の方が自然であることがわかる。

有界変動関数に対しては境界へのトレースを考えることができ、一般化されたガウス・グリーン公式が成り立つ。

定理1.  $BV(\Omega)$  から  $L^1(\partial\Omega)$  への線形連続な写像  $\gamma$  が存在し次式が成立する。

1)  $f \in BV(\Omega)$  が境界まで込めて連続なら、

$$\gamma f = f.$$

2)  $g$  を境界まで込めて1回連続的微分可能なベクトル値関数とすると、

$$\int_{\Omega} g Df = - \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx + \int_{\partial \Omega} g \nu f \, ds.$$

ここに、 $\nu$  は境界  $\partial \Omega$  での外向き単位法線ベクトルである。

収束を議論するためには次のコンパクト性が有用である。

定理 2.  $BV(\Omega)$  の有界集合は  $L^1(\Omega)$  で相対コンパクトである。

## 2. 数値計算における有界変動関数の取り扱い

前節で与えた定義と同値であり、数値計算で使いやすい形の有界変動関数の定義を与えよう。

定義 2.  $L^1(\Omega)$  に属している関数  $f$  が有界変動であるとは、 $j=1, \dots, n$  に対して

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \left\{ \int_{\Omega(\rho; j)} |f(x + \rho e_j/2) - f(x - \rho e_j/2)| / \rho \, dx \right\} < +\infty \quad (5)$$

が成立するときをいう。ここに、

$$\Omega(\rho; j) = \{x; \text{線分}(x - \rho e_j/2, x + \rho e_j/2) \subset \Omega\}$$

であり、 $e_j$  は  $x_j$  方向の単位ベクトルである。

差分法で有界変動関数を取り扱うには次のようにする。元の微分方程式が2階までの空間変数に関する微分を含んでいるとして、空間次元が2のときについて説明する。

$h=(h_1, h_2)$  を空間刻みとし、 $P(i)$  で点  $(i_1 h_1, i_2 h_2)$  を示す。ただし、 $i=(i_1, i_2)$  である。移動作用素  $T_j$ ,  $j=0, \pm 1, \pm 2$ , を

$$T_{\pm j}^{1/2} P(i) = P(i \pm e_j/2); \quad T_j = (T_j^{1/2})^2; \quad T_0 = I \quad (6)$$

で定義する。格子点集合  $\Omega_h, \partial \Omega_h$  を

$$\Omega_h = \{P(i); i \in \mathbb{Z}^2, T_j P(i) \in \bar{\Omega}_h, |j| \leq 2\},$$

$$\partial \Omega_h = \{P(i); i \in \mathbb{Z}^2, P(i) \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_h\}$$

で定義し、この上での格子点関数  $u_h$  が数値計算される。一般に、格子点  $\Omega_h$  では差分方程式が成立し、格子点  $\partial \Omega_h$  では境界条件が課せられる。(6)と同様にして  $u_h$  にも移動作用素が施される。格子点関数  $u_h$  の  $x_1$  方向の変動量  $V_1^h[u_h]$  は

$$V_1^h[u_h] = h_1 h_2 \sum_{i \in S} | (T_1^{1/2} - T_{-1}^{1/2}) u_h(P(i)) | / h_1$$

で定義される。ここに、 $S$  は

$$S = \{ i \in (\mathbb{Z} + 1/2) \times \mathbb{Z}; T_{\pm 1}^{1/2} P(i) \in \Omega_h \}$$

なる集合である。

格子点関数  $u_h$  を、

$$u_h(x) = u_h(P(i)) \quad (x \in G_i \text{ のとき}), \quad = 0 \quad (\text{その他のとき})$$

として  $L^1(\Omega)$  の関数と見なす。ここに、

$$G_i = ((i_1 - 1/2)h_1, (i_1 + 1/2)h_1) \times ((i_2 - 1/2)h_2, (i_2 + 1/2)h_2)$$

である。式(1)の左辺で  $g = (g_1, 0)$  とした値を  $f$  の  $x_1$  方向の変動量  $V_1[f]$  とすれば  $V_1$  と  $V_1^h$  との間には次の関係が存在する。

定理 3. 刻み幅  $h$  に依存しない定数  $c$  が存在し、任意の格子点関数  $u_h$  に対して、

$$V_1[u_h] \leq V_1^h[u_h] + c \|u_h\|_{\mathcal{E}} \quad (7)$$

が成立する。

式(7)と逆関係の式を導こう。有界変動関数  $a$  が与えられたとき、

$$a_h(P_i) = \int_{G_i} a(x) dx / (h_1 h_2) \quad (8)$$

により格子点関数  $a_h$  を作る。次の関係が存在する。

定理 4. 任意の有界変動関数  $a$  に対して、

$$V_1^h[a_h] \leq V_1[a] \quad (9)$$

が成立する。ここに、 $a_h$  は (8) で定義される格子点関数である。

定理 3, 4 は式 (5) を使って証明される。

$a$  を元の微分方程式で与えられたデータ関数、 $a_h$  を (8) で構成した差分方程式のデータ、 $u_h$  を差分方程式の解として、 $V_1^h[u_h]$ 、 $\|u_h\|_{\infty}$  などが  $a_h$  で評価できれば、式(7),(9) から  $u_h$  の全変動量が  $h$  に関して一様に有界であることが導ける。したがって、定理 2 により  $\{u_h\}$ 、 $h \downarrow 0$  から収束列を選び出すことが出来る。適当な条件の下で極限関数が元の微分方程式の解になっていることが示せ、解の一意性があれば、 $h \downarrow 0$  としたとき、すべての列が収束する。上の議論において大事なことは、差分方程式の有界変動性に関する安定性を示すことであり、そのためのいろいろな工夫が必要となる [3,4,5,6]。

### 3. 準線形境界値問題

この節では単独方程式ではあるが前節の議論が確認される例として準線形境界値問題：

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[f(x,u)] + g(x,u) &= a(x), & (x \in \Omega) \\ u &\in C(x,f), & (x \in \partial\Omega) \end{aligned} \quad (10)$$

を取り上げる。ここに、 $f$  は与えられたベクトル値関数、 $a, g$  は与えられたスカラー関数、 $C$  はある実数の集合である。問題(10)は適当な  $f, g$  に対する仮定の下に任意の有界かつ有界変動な関数  $a$  に対して一意的にエントロピー条件を満たす有界変動な解が存在する [4]。  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域

$$\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$$

として次の問題を考える。

問題 1. (正規型 burgeers タイプ)

$$f(x,u) = (u^2/2, u), \quad g(x,u) = u,$$

$$C(x_2=5) = R, C(x_2=-5) = \{0\}, C(x_1=-5) = \{u \leq 0\}, C(x_1=5) = \{u \geq 0\},$$

$$a(x) = 5 \quad (x_1 < 0 \text{ のとき}), \quad = -2 \quad (x_1 \geq 0 \text{ のとき}).$$

### 問題 2. (線形非正規型)

$$f(x, u) = (b_1(x)u, b_2(x)u), \quad g(x, u) = u,$$

$$b_1(x) = x_1(6.25 - x_1^2 - x_2^2)/600 - x_2/6, \quad b_2(x) = x_2(6.26 - x_1^2 - x_2^2)/600 + x_1/6,$$

$$C(x) = \{0\} \quad (b \neq 0 \text{ のとき}), \quad = R \quad (b = 0 \text{ のとき}),$$

$$a(x) = 2 \quad (x_1^2 + x_2^2 < 6.26 \text{ のとき}), \quad = -1 \quad (x_1^2 + x_2^2 \geq 6.26 \text{ のとき}).$$

問題 1, 2 の境界条件はいずれもディリクレ境界条件  $u=0$  から導かれたものである。問題(10)の特性曲線はこの境界条件を使って常微分方程式系

$$dx_i / d\xi = \partial f_i / \partial u(x, u)$$

$$du / d\xi = a(x) - g(x, u) - \sum_{i=1}^2 \partial f_i / \partial x_i(x, u)$$

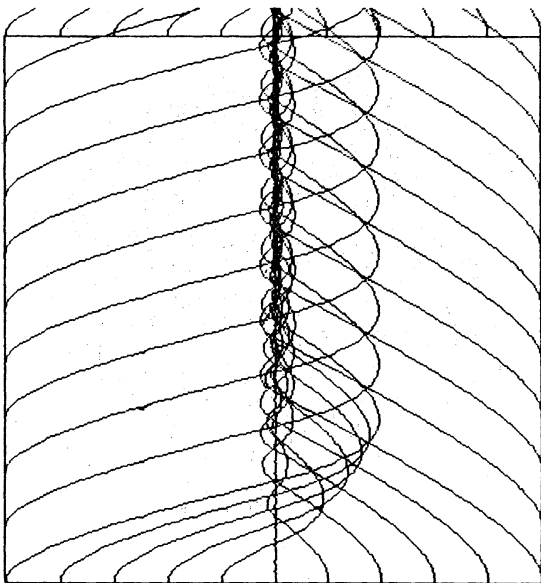


図 1. 特性曲線

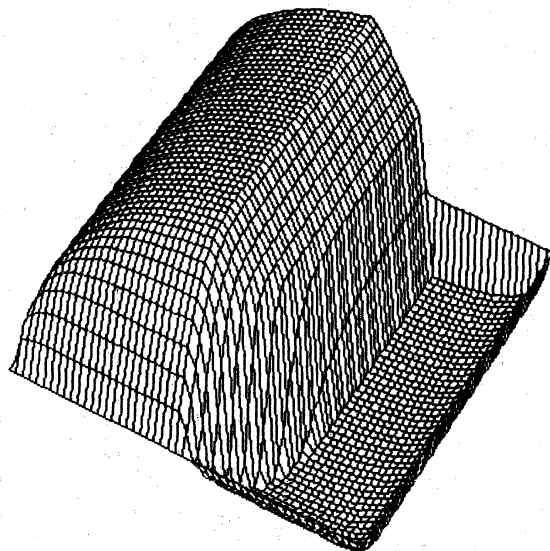


図 2. 立体図

$$x_i(0) \in \partial \Omega, \quad u(0)=0 \quad (i=1,2)$$

を解くことにより求まる。

図1は問題1の特性曲線を $x$ -平面に射影したものである。曲線が交わっているのは問題が非線形であることを反映しており、解の不連続性が生じることをほのめかしている。図2は数値解の立体図で shock が観察される。右手前が(5,-5)の点である。

図3は問題2の特性曲線を示している。非正規型のため特性曲線が通らない所(極限周期軌道の内部)がある。関数 $a$ が極限軌道を境にして不連続なので問題が線形であるにもかかわらず不連続な解が得られる。その様子は立体図4に見られる。

数値計算には Engquist-Osher[5]タイプの差分スキムを使った。用いたスキムでは

$$V_1^h[u_h] + V_2^h[u_h] + \|u_h\|_{\mathcal{E}} \leq c \{V_1^h[a_h] + V_2^h[a_h] + \|a_h\|_{\mathcal{E}}\}$$

の形で差分方程式の安定性が示せる。ここに、 $c$ は $h$ に依存しない正定数である。詳細については[4]を参照していただきたい。

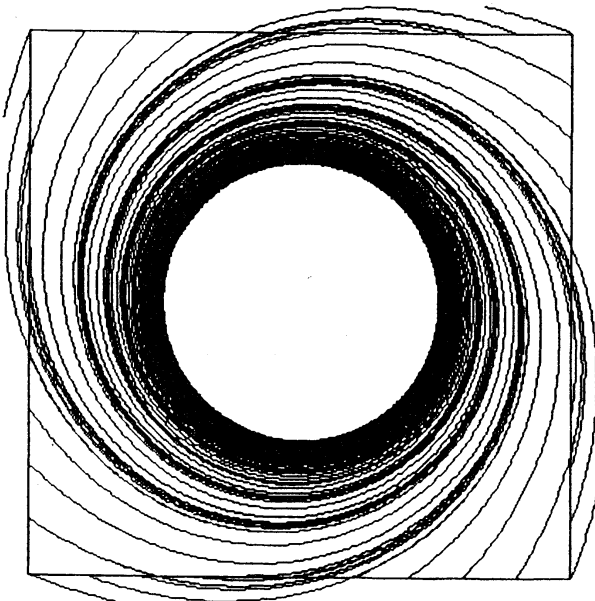


図3. 特性曲線

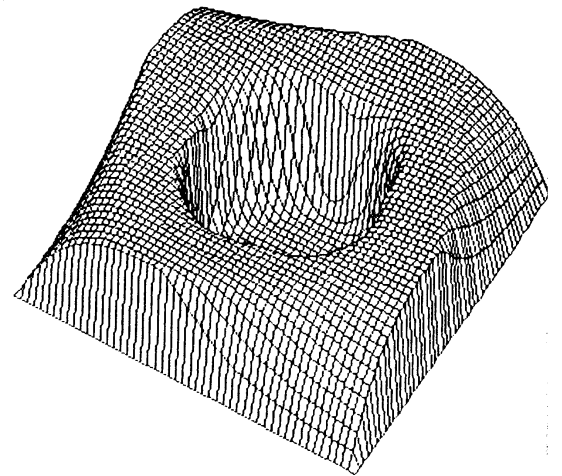


図4. 立体図



## 参考文献

- [1] GIUSTI, E., Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, The Australian National University, 1977.
- [2] RUDIN, W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1974.
- [3] CRANDALL, M. and MAJDA, A., Monotone difference approximations for scalar conservation laws, Math. Comp., 34(1980),1-21.
- [4] TABATA, M., Some upwind schemes and their applications to singular perturbation problems, Proceeding of International Symposium on Applied Mathematics and Information Science, Kyoto University, 1982, 219-230.
- [5] OSHER, S., Nonlinear singular perturbation problems and one sided difference schemes, SIAM J. Numer. Anal., 18(1981),129-144.
- [6] TABATA, M., Approximation monotones de problemes de perturbations singulieres, C. R. Acad. Sc. Paris, 292(1981),495-497.
- [7] BARDOS, C., LE ROUX, A.Y. and NEDELEC, J.C., First order quasilinear equations with boundary conditions, Comm. Part. Diff. Eqs., 4(1979), 1017-1034.