数理解析研究所講究録
第532巻 1984年 163-175

圧力駆動型MHD不安定性の非線形発展

京大ヘリオトロン核融合研究センター
若谷誠宏 (Masahiro Wakatani)
京大工 白井 浩 (Hiroshi Shirai)

1° はじめに

トーラスプラズマの閉じ込め装置としては、トーラス方向のプラズマ電流が本質的であるトカマクに対して、プラズマ電流がなくてもよい装置がいくつか考案されている。その中に、ステラレータと呼ばれる装置があり、それを改良した方式としてヘリオトロン磁場がある。ここでは、最近のヘリオトロンE装置の高ベータ実験で測定されたMHD不安定性の理論的解析について述べる。この実験ではプラズマ電流を流していないので、不安定性の原因はプラズマの圧力勾配にあり、圧力駆動型不安定性と推定される。

軸対称トーラスであるトカマクとは異なり、ヘリオトロンE装置のような非軸対称トーラスでは、三次元MHD平衡解の解析そのものが容易でなく、まして、不安定性の時間発展

を調べることは非常に困難な問題になる。このような困難を避けるために、ステラレータ展開と呼ばれている近似法を用いて、漸近的な意味での平衡解があれば不安定性の性質を調べることができるような簡約MHD方程式系を導いて、それを数値的に解いて実験との比較を行った。厳密な平衡の問題を避けているために、MHD不安定性の非線形発展まで調べることができる利点があるが、その結果は実験と比較して吟味する必要がある。現在のところ、ステラレータ展開法の妥当性に関する問題があるにもかかわらず、驚くほど実験とよく対応しているように見える。

2° ステラレータ展開法

トーラスプラズマの大半径をR_0として、次の様な座標系(r, θ, z)を用いる，

$$
(1) \quad \begin{cases} R = R_0 + x \\ x = r\cos\theta \\ z = -R_0\phi \end{cases} .
$$

ここで、ϕはトーラス方向の角変数であり、θはトーラス方向に垂直なポロイダル面内の角変数である。(1)の座標系において、ヘリカル系トーラスの閉じ込め磁場は次の様に表わされる，

(2) $$\vec{B} = B_0\hat{z} + \delta\vec{\nabla}\Phi + \delta^2(\vec{\nabla}A\times\hat{z} + B_2\hat{z}).$$

ここで、B_0はトーラス方向の一様な磁場を表わし、B_2はプラズマの反磁性による補正項である。Φは、外部のヘリカル状のコイルにより発生するステラレータ磁場を表わし、最も簡単には、変形ベッセル関数I_ℓを用いて、

(3) $$\Phi = \phi_\ell I_\ell(hr)\exp(i\ell\theta + ihz) + c.c.$$

と書ける。(3)は、(r, θ, z)において、$\nabla^2\Phi = 0$を満足し、プラズマの存在を考慮しないので真空磁場とも呼ばれる。(2)の第3項のAはプラズマ電流が形成する磁場を表わす。(2)の第2項と第3項に付いているδはオーダリング・パラメータであり、$\delta \sim \varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon = a/R_0$ (aはプラズマ半径)と選んでいる。以下では、$\delta \ll 1$を仮定する。(2)の磁場表現が適用できるためには、プラズマのベータ値(プラズマ圧力の磁気圧に対する比)は、$\beta \sim \delta^2 \sim \varepsilon$でなければならない。通常、低ベータトーラスに対しては、$\beta \sim \varepsilon^2$を仮定するが、それよりはベータ値の高い領域でも使える。

(3)の磁場ポテンシャルにおけるℓとh、およびϕ_ℓとεの選択が装置設計の重要なパラメータになり、プラズマ物理を指針にして決めなければならない。また選んだ値の装置が

現実に製作できるかどうかは、工学的問題として配慮しなければならない。ヘリオトロンE装置では、$l=2$, $h=19/R_0$, $\varepsilon \simeq 0.1$ になっている。具体的数値 は、平均プラズマ半径が 20 cm であり、大半径 $R_0 = 220$ cm である。発生できる磁場強度は最大 20 KG である。

次に、ステラレータ展開と呼ばれている近似法について説明する。この近似は、z 方向に短かい距離を1波長として振動する成分と、長い距離を1波長として振動する成分が区別できる点に着目する。短波長成分は、(3)で表わされるステラレータ磁場である。そのためには、$hR_0 \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$ でなければならない。長波長成分は、トーラス効果や不安定性による磁場の摂動であり、ほぼR_0が1波長になる。短波長の変化を z で表わし、長波長の変化を $\bar{z}$ で表わす時、次の様な操作を行う,

$$
(4)\quad
\begin{cases}
\bar{f} \equiv \dfrac{h}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi/h} f\, dz \\[2ex]
\langle f \rangle \equiv \displaystyle\int_0^{z} f\, dz + \text{const.}
\end{cases}
$$

ここで、const. は $\langle \tilde{f} \rangle = 0$ となるように選ぶ。MHD方程式系を δ をパラメータとしてオーダリングを行って、その後で、(4) のような平均操作を行う近似がステラレータ展開法であ

る。

もう少し具体的に示すと、MHD方程式の表現として、

(5) $$\vec{B}\cdot\vec{\nabla}F = G$$

のような磁気微分方程式を用いることができる点に着目する。ここで、$F(r, \theta, z, \bar{z})$、$G(r, \theta, z, \bar{z})$である。"z"方向の微分には、zに関するものと、$\bar{z}$に関するものがあり、後者の微分を行った量は、前者の微分に比べて、δ^2だけ小さくなる。そうすると、(5)をδについてオーダリングすれば、

(6) $$B_0\frac{\partial}{\partial z}F_0 = 0$$

(7) $$B_0\frac{\partial F_1}{\partial z} + \vec{\nabla}F_0\cdot\vec{\nabla}\Phi = G_1$$

(8) $$B_0\frac{\partial F_2}{\partial z} + \vec{\nabla}F_1\cdot\vec{\nabla}\Phi + B_0\frac{\partial F_0}{\partial \bar{z}} + \vec{\nabla}F_0\times\vec{\nabla}A\cdot\hat{z} = G_2$$

のように、次々と方程式を書くことができる。ここでは、Fに比べて、Gがδだけ小さい量であることを利用している。(6)より、F_0はzを含まない量になる。(7)より、

(9) $$F_1 = -\frac{1}{B_0}\vec{\nabla}F_0\cdot\vec{\nabla}\langle\Phi\rangle + \frac{1}{B_0}\langle G_1\rangle$$

が得られる。(8)より、

$$(10)\quad B_0\frac{\partial F_0}{\partial z}+\vec{\nabla}F_0\times\vec{\nabla}A\cdot\hat{z} = \overline{G_2} - \overline{\vec{\nabla}F_1\cdot\vec{\nabla}\Phi}$$

が得られ、(9)を(10)に代入して整理すると、

$$(11)\quad \vec{B}\cdot\vec{\nabla}F_0 = \overline{G_2} - \frac{1}{B_0}\overline{\vec{\nabla}\langle G_1\rangle\cdot\vec{\nabla}\Phi}$$

になり、左辺の微分演算は、

$$(12)\begin{cases}\vec{B}\cdot\vec{\nabla} \equiv B_0\dfrac{\partial}{\partial z}+\vec{\nabla}\Psi\times\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\\[2ex] \Psi = A-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{B_0}\overline{\vec{\nabla}\langle\Phi\rangle\times\vec{\nabla}\Phi\cdot\hat{z}}\end{cases}$$

を意味する。次節では、このようなステラレータ展開法をMHD方程式系に適用して、(11)に相当する方程式から、簡約化MHD方程式系を導く。(6)～(8)まで考慮して、それより高次の量は小さいとすることから、$O(\delta^2)\sim O(\varepsilon)$まで成立つ方程式系に注目することになる。

3° 簡約化MHD方程式系

電磁流体近似の運動方程式は、

$$(13)\quad \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p+\vec{J}\times\vec{B}$$

である。以下では、非圧縮性流体を仮定するので、$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$であり、(13)の左辺の$\rho$は一定とする。(13)より$\vec{J}$を求める

と、

$$(14)\qquad \vec{J} = -\left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}p\right)\times\vec{B}\Big/B^2 + \sigma\vec{B}$$

が得られる。右辺の第２項の σ は $\sigma = -\nabla_\perp^2 A/B_0$ と書ける。

(14) に対して、電荷保存の式 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ を適用すると、

$$(15)\qquad \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\sigma = \vec{\nabla}\times\frac{\rho}{B^2}\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{1}{B^4}\vec{\nabla}B^2\times\vec{\nabla}p\cdot\vec{B}$$

になり、磁気微分方程式の形になる。次に、電磁誘導の式

$$(16)\qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

は、$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ を用いると、

$$(17)\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = \vec{\nabla}\chi$$

になる。(17) の磁場方向成分をとると、

$$(18)\qquad \vec{B}\cdot\vec{\nabla}u = \frac{\partial A}{\partial t} + E_{\parallel}$$

になる。ただし、$u = \chi/B_0$ であり、$E_{\parallel}$ は磁力線方向の電場である。(18) も磁気微分方程式である。

(14) と (18) にステラレータ展開法を適用すると、

$$(19)\ \rho\frac{d}{dt}\nabla_\perp^2 u = \left\{B_0\hat{z} + \vec{\nabla}(\Psi_f + \Psi_h)\times\hat{z}\right\}\cdot\vec{\nabla}(\nabla_\perp^2\Psi_f) + \vec{\nabla}\Omega\times\vec{\nabla}p\cdot\hat{z}$$

および、

$$(20)\quad \frac{\partial}{\partial t}\Psi_J = \{B_0\hat{z} + \vec{\nabla}(\Psi_J + \Psi_h)\times\hat{z}\}\cdot\vec{\nabla}U + \eta\nabla_\perp^2\Psi_J$$

が得られる。(20)では、プラズマの抵抗ηを考慮している。(19)と(20)のΨ_hとΩは、変形ベッセル関数を使うと、

$$(21)\quad \Psi_h = -\frac{B_0 t_h(a)}{hR_0}\frac{F(hr)}{F'(ha)}$$

$$(22)\quad \Omega = \frac{2x}{R_0} - \frac{a t_h(a)}{R_0}\frac{G(hr)}{F'(ha)}$$

$$(23)\quad F(hr) = \frac{l}{hr} I_l(hr) I_l'(hr)$$

$$(24)\quad G(hr) = [I_l'(hr)]^2 + \left(1 + \frac{l^2}{h^2r^2}\right) I_l^2(hr)$$

と書ける。$t_h(a)$はプラズマ表面における回転変換であり、

$$(25)\quad t_h(a) = -\frac{2\phi_l^2 h^2 R_0}{aB_0^2}F'(ha)$$

である。Ωはステラレータ磁場の平均的曲率を意味し、プラズマの安定性に対して重要な役割をする。ρは一定としているから、(19)と(20)に対して、もう一つPを決める方程式があれば、$\{U, \Psi_J, P\}$を変数とする簡約化MHD方程式系は閉じる。電磁流体は、$\vec{E}\times\vec{B}$ドリフトにより運動すると仮定

すれば、

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} = \vec{\nabla}u\times\hat{z}$$

を用いて、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}p\times\vec{\nabla}u\cdot\hat{z} = 0 \qquad (26)$$

が得られる。

次節では、(19), (20), (26) をヘリオトロンEの磁場に適用した結果を示す。(22) の Ω の表示の右辺第一項は無視した。その理由は、問題にしている不安定性に対しては、トーラス効果は本質的な影響を与えないと考えられるからである。

5° 数値計算結果

トーラス効果を無視すれば、無電流プラズマで圧力分布が $P = P_0(1-(r/a)^2)^2$ は平衡解になる。この分布は実験データに近いものである。実験データでは、内部崩壊(internal disruption)と呼んでいる不安定性が生じると圧力が減少し始めるので、これを考慮するために、(26) の圧力方程式の右辺に熱伝導項 $\chi_{\perp eff}\nabla_\perp^2 P$ を追加した。

数値計算法は、θ と z 座標に関してはフーリエ級数展開を行い、r 方向に関しては差分法を用いた。時間発展は予測-修正法(predictor-corrector method)を使った。θ 方向の

モードをm, z方向のモード（$2\pi R_0$をz方向の長さと考えて、周期境界条件を想定する）をnとした時、$m/n=1$となるように、$|m|, |n| \leq 10$ の整数を選んで計算を行った。

第1図は、不安定性の成長に伴う運動エネルギーの時間変化を示している。計算におけるパラメータは、$\beta(0)=2.6\%$、$\eta=2\times10^{-4}$, $\kappa_{\perp eff}=4\times10^{-4}$ である。時間はポロイダルアルフベン速度がプラズマ半径を伝搬する時間を規準にしている。第2図は、$\theta=0$ および $\theta=\pi$ の線上の圧力分布の時間変化である。この変形は、圧力駆動型不安定性と熱伝導の両方の影響に依存している。第3図は、圧力分布の等高線である。第4図は、Ψ_T より計算した磁束関数の等高線である。興味があるのは、磁力線の再結合が生じ、磁気島が2つ生じていることである。磁力線の再結合は、プラズマ電流と抵抗の存在によるが、第5図に示されるように、圧力駆動型不安定性の非線形発展により局所的な電流が流れる。これがある値を越えると磁力線の再結合が起る。第6図は、この不安定性に伴うプラズマの流れの様子を示すものであり、2つの渦を見ることができる。

実験データとの比較では、以上の不安定性の特徴とよく対応していることがわかっていて、現在、詳細な検討を進めている段階である。

ステラレータ磁場における簡約化MHD方程式の数値計算とその結果については、以下の文献を参考にして下さい。これまで発表されているものは、電流駆動型不安定性に関するものが多い。圧力駆動型不安定性は最近のトピックスの一つである。

参考文献

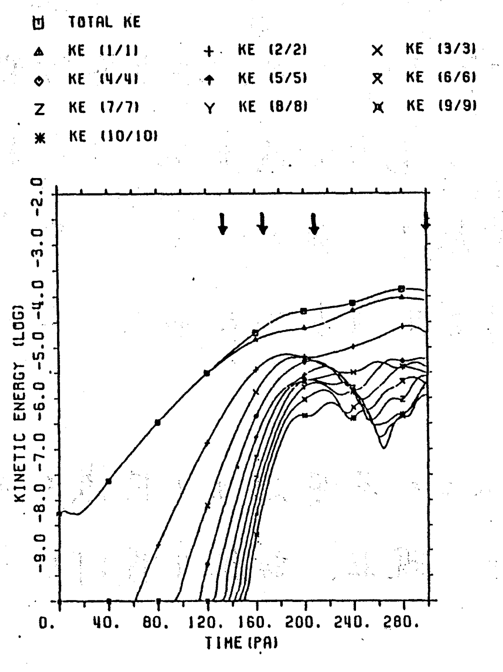
[1] M. WAKATANI, Nuclear Fusion 18 (1978) 1499.

[2] M. WAKATANI, Nuclear Fusion 19 (1979) 1235.

[3] H. R. STRAUSS, Plasma Physics 22 (1980) 733.

[4] H. R. STRAUSS and D. A. MONTICELLO, Phys. Fluids 24 (1981) 1148.

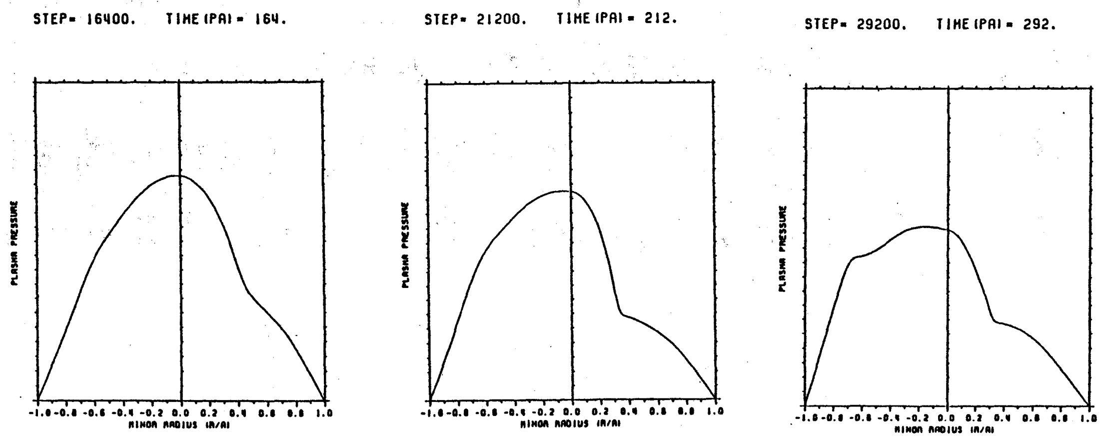
[5] M. WAKATANI, et al., Nuclear Fusion 23 (1983) 1669.



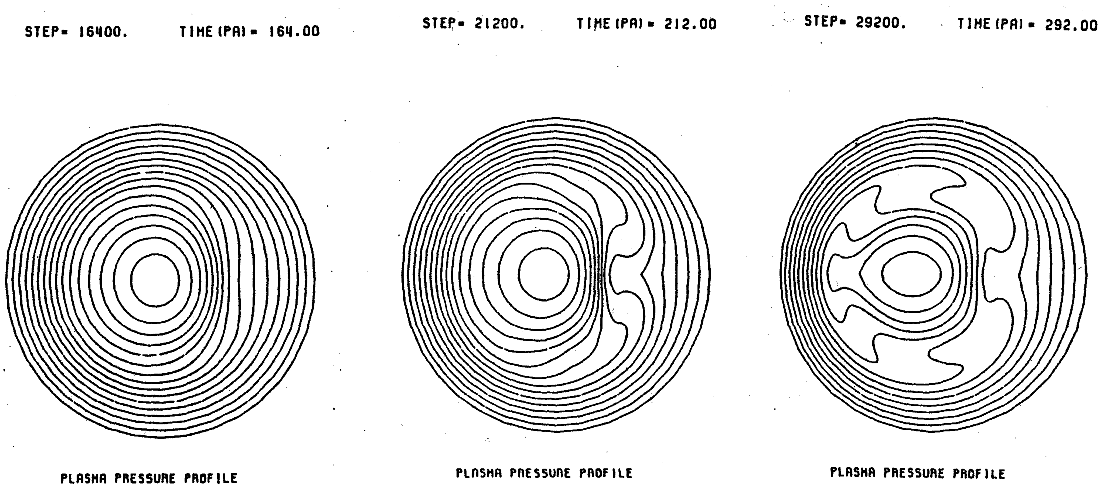
第1図

運動エネルギーの時間発展

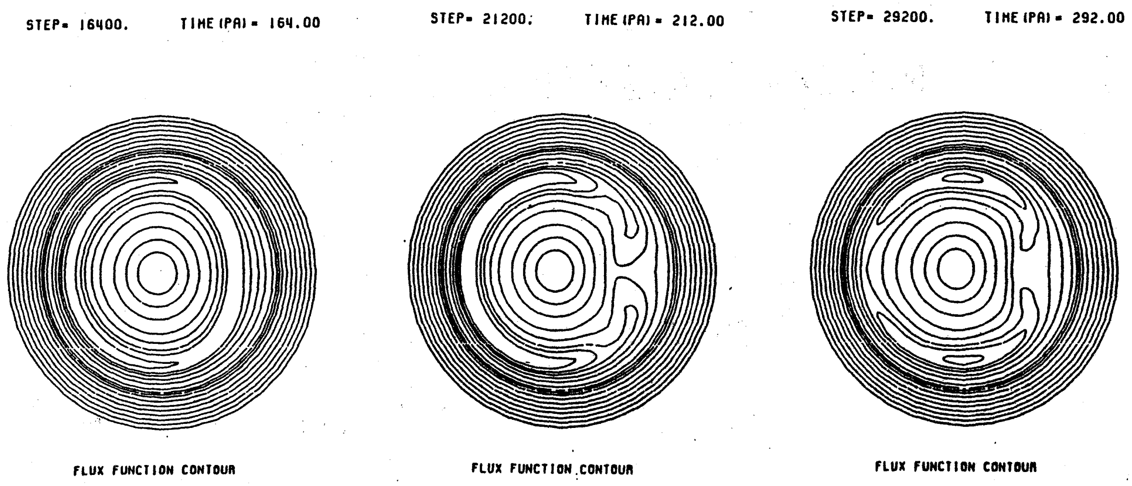
17



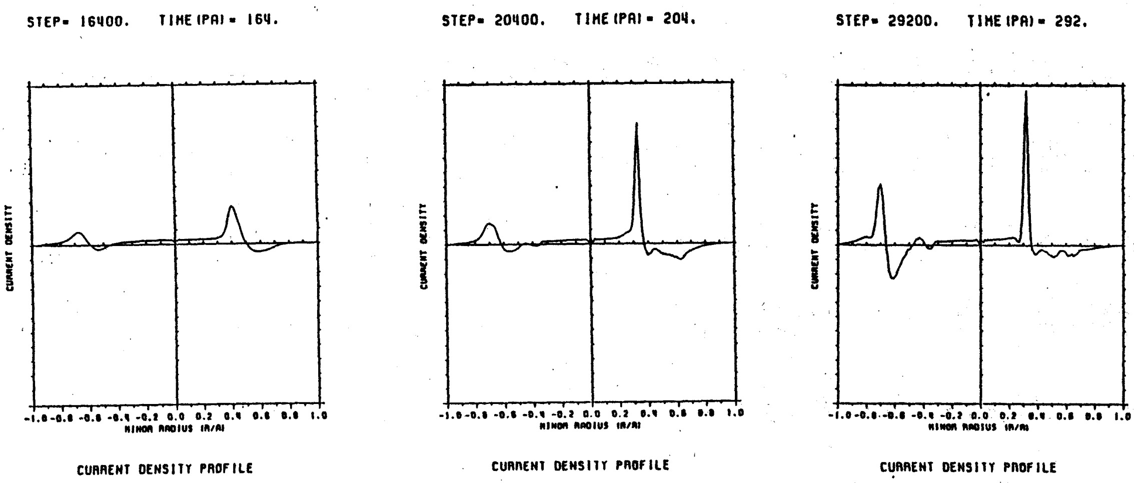
第2図　圧力分布の時間変化



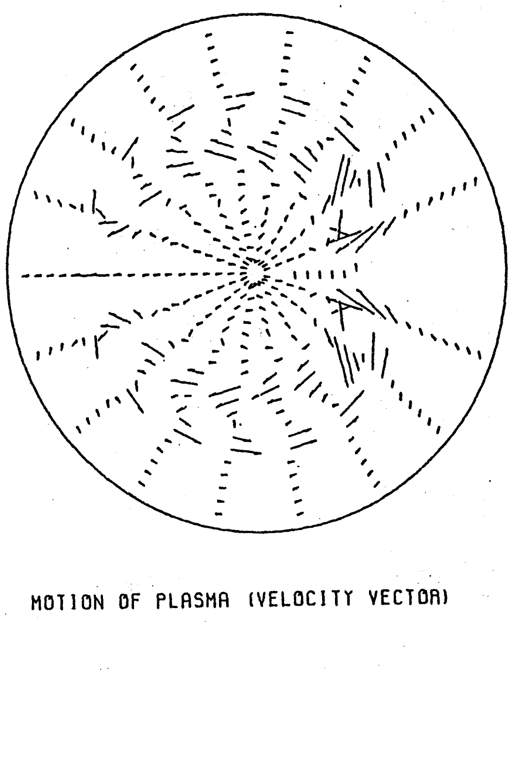
第3図　圧力分布の等高線



第４図　磁束関数の等高線



第５図　プラズマ電流分布の
時間変化



MOTION OF PLASMA (VELOCITY VECTOR)

第６図　プラズマの流れ図
（T=292）