数理解析研究所講究録
第533巻 1984年 22-23

Orbifold-uniformizing differential equations

by Masaaki YOSHIDA (Kyushu Univ.)
吉田正章（九大理）

Pfaff型式 ― Gauss-Manin, holonomic, 最大過剰, etc と呼名は色々だが ― には不確定特異点まで含めた局所大局理論が数多く存在するようである。しかしどの理論も昔ながらの簡単な問題：「問：曲線 $C \subset \mathbb{CP}_2$ と自然数 r を与えたとき，C にのみ特異点を持つ $\mathbb{CP}_2$ 上の線型Pfaff型式で階数 r のものは存在するか。もし存在するならその構成法を求む」には無力のように思われる。この問題は私の知る限り未だに何も研究されてない。ここでは $r=3$ として「問」が解をもつような曲線 C をみつける微分幾何的方法と方程式の構成法を示す。方法とはいっても必ずみつかる組織的な方法という訳でなく，適当に C をもってきて，以下のようなことをやるとたまたまうまくゆく場合があるというだけです。このようにたよりない方法ではあるが，もしうまくゆけばみつかった方程式は幾何学的に大変よいものであるはずである。（Developing map of orbifold）

(1) C 上に適当に分枝指数を与えて，$\mathbb{CP}_2$ の有限の covering manifold M を考えて，M の Chern 数 c_1^2, c_2 を計算する。

(2) もし $c_1^2 = 3c_2$ $(c_1 > 0)$ が成立すると，Schwarz微分の理論より「問」に解があることが分る。（非線型の積分可能条件

を微分幾何の定理を使ってにげる訳。)

(3) 力ずくの計算により方程式を構成する。(うまく機械を使う。)

この方法で今までに分ったことを報告する:

(I) $C \subset \{xyz(x^n-y^n)(y^n-z^n)(z^n-x^n)=0\}$ $n \in \mathbb{N}$

なら，微分方程式は Appell の F_1 に帰着する．(c.f. [1], [5])

(II) $C = \{xyz \prod_{\nu,\mu=1}^{3}(x+\omega^\nu y+\omega^\mu z)=0\}$ $\omega = 1^{1/3}$

のとき $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{2} P_{ij}^k(x)\dfrac{\partial w}{\partial x_k} + P_{ij}^0(x)w$ $i,j=1,2$

の型の方程式系で C に確定特異点をもつものが存在する。具体的な $P_{ij}^k(x)$ の型は [6] を見よ。

References.

[1] Hirzebruch, F., Arrangements of lines and alg. surfaces (~~preprint~~), in Arith. and Geom., Vol. II, Progress in Math. Vol. 36. (1983)

[2] Klein, F., Über die transf. 7-Ord. der ellip. Funk. Math. Annalen 14 (1879).

[3] Kato, M., On uniformization of orbifolds (preprint).

[4] Oda, T., On Schwarzian deriv. in several var. R.I.M. 226 ('74).

[5] Yamazaki - Yoshida : On Hirzebruch's examples of surfaces with $c_1^2 = 3c_2$ (~~preprint~~) Math. Ann.

[6] Yoshida, M., Orbifold-uniformizing differential equations (~~preprint~~). Math. Ann.