数理解析研究所講究録
第 533 巻 1984 年 26-39

確定特異点型の方程式の small divisor について

東京都立大学 吉野正史 (Masafumi Yoshino)

§1. Introduction. P を線形解析的な係数を持つ偏微分作用素とし、P に対するどのような条件下で、原点の近傍で解析的な関数 $f(x)$ に対して 方程式 $Pu=f$ の形式解は常に収束するか ということを考える。この問題に対しては Kashiwara, Kwai, Sjöstrand ([1]参照) によって 次の一般的な結果が得られている。今 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ 又 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n};\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n};\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

とおき $a_{\alpha\beta}(x)$ を $x=0$ の近傍で解析的な関数として

$$P=\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}a_{\alpha\beta}(x)\,x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta,\qquad m\ge 1$$

とおく。このとき次が成立する。

Theorem. 次の条件を仮定する。

$$(1.1)\qquad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(0)\xi^{\alpha}\bar{\xi}^{\beta} \neq 0 \quad \text{for all} \quad \xi \in \mathbb{C}^n \setminus 0.$$

このとき 原点の近傍で正則な任意の f に対して方程式 $Pu=f$ の形式解は、常に収束する。

ここで問題とするのは条件 (1.1) が満足されないような P に対してこの定理は成立するかどうかということである。話を簡単にするため まず次の例について考えてみよう。

$$(1.2)\qquad L = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{m-j}.$$

ここで $a_j\ (0\leq j\leq m)$ は複素定数であって $m\geq 1$。さらに条件 $a_0a_m\neq 0$ を仮定する。$a_0a_m=0$ となるような L に対しては定理は成立しないことに注意する。このとき L に対して条件 (1.1) は次の形にかくことができる。

$$\sum_{j=0}^{m} a_j |\xi_1|^{2j}|\xi_2|^{2(m-j)} \neq 0 \quad \text{for} \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2\setminus 0.$$

この条件は $\xi_2=0$ であれば明らかに成立するので $\xi_2\neq 0$ とする。このとき $t=|\xi_1|^2/|\xi_2|^2$ とおくと 上式は

$$(1.3)\qquad \sum_j a_j t^j \neq 0 \quad \text{for all} \quad t>0.$$

今 $P(t)\equiv\sum_j a_j t^j$ は L に対する特性多項式であるからこの条件は 特性根は正の実 でない という条件であることがわかる。それでは 特性根が正の実数の場合はどうなっているのであろうか。その様子をしるために未定係数法でしらべてみよう。 $u=\sum_{\nu,\mu} u_{\nu\mu}\,x_1{}^\nu x_2{}^\mu$, $f=\sum_{\nu,\mu} f_{\nu\mu}\,x_1{}^\nu x_2{}^\mu$ と u, f を展開して $Lu=f$ に代入し $x_1{}^\nu x_2{}^\mu$ の係数を比較してみる。そうすると次の関係式を得る。

$$\forall \nu,\mu\in\mathbb{N},\qquad \Big(\sum_j a_j\,\nu^j\mu^{m-j}\Big)u_{\nu\mu}=f_{\nu\mu}.$$

だから $u_{\nu\mu}$ は $f_{\nu\mu}$ に $(\sum_j a_j\,\nu^j\mu^{m-j})^{-1}$ をかけることにより計算される。ところが τ_p を $P(t)=0$ の根, m_p を多重度とすると

$$\sum_j a_j\,\nu^j\mu^{m-j}=\mu^m\sum a_j\Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^j=\mu^m\prod_{p=1}^{p_0}\Big(\frac{\nu}{\mu}-\tau_p\Big)^{m_p}$$

であるから 条件 (1.3) のもとでは $\tau_p>0$ でこの割算は実行できる。しかし そうでなければ $\sum a_j\,\nu^j\mu^{m-j}$ は 0 になることもあり 又どんな実数でもそれは有理数でいくらでもよく近似できるということに注意すると $\prod_{p=1}^{p_0}\big(\frac{\nu}{\mu}-\tau_p\big)^{m_p}\to 0$

$(\nu,\mu\to\infty)$ であり μ^m との関係でやはり $\sum_j a_j\nu^j\mu^{m-j}$ は $\nu,\mu\to\infty$ のとき 0 に収束することがある。だからこの場合非常に0に近くなるような量での割算が問題になっていることがわかる。上の例の場合 関数 $F_\sigma(t)$ を $(\sigma>0)$

$$(1.4)\quad F_\sigma(t)\equiv\left\{\mu^\sigma\left(\frac{\nu}{\mu}-t\right) \text{ の } \nu,\mu\in\mathbb{N}\quad \nu,\mu\to\infty \text{ のときのすべての集積点}\right\}$$

で定義すると $0\notin F_\sigma(t)$ なる条件が求まればよいであろうと思われる。この論文の目的は 変数係数の L を一般化したような作用素に対して $0\notin F_\sigma(t)$ に対応する条件を求め さらに関数 $F_\sigma(t)$ の 数論的な性質を解析して 元の作用素のいろいろな性質を調べることである。

§2. 変数係数の方程式に対する1つの十分条件.

$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2$, $\partial=(\partial_1,\partial_2)=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\geqq 0$ に対して $(x\partial)^\alpha=(x_1\partial_1)^{\alpha_1}(x_2\partial_2)^{\alpha_2}$ とする。今 $N\geqq 1$ を整数, s_j $(1\leq j\leq N)$ は条件 $1=s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_N$ をみたす整数の組とする。このとき N 連立の Leray-Volevich 系 P_0 を次で定義する。但し $m\geqq 1$ は整数とする。

(2.1) $$P_0 = \Big(\sum_{|\alpha| = m + s_j - s_k} a_\alpha^{jk} (x\partial)^\alpha \Big)_{j,k=1}^{N}$$

ここで a_α^{jk} は 複素定数とする。さらに s を $0 \leq s \leq m$ なる整数とするとき

(2.2) $$Q_s = \Big(\sum_{|\beta| \leq m - s + s_j - s_k} b_\beta^{jk}(x)(x\partial)^\beta \Big)_{j,k=1}^{N}$$

によって Q_s を定義する。但し $b_\beta^{jk}(x)$ は $x=0$ の 近傍で正則な関数とする。ここで考えるのは次の方程式である。

(2.3) $$Pu \equiv (P_0 + Q_s)u = f$$

但し f, u はそれぞれ Nベクトル関数である。今 $C(t)$ を次で与えられる行列とし

(2.4) $$C(t) = \Big(\sum_{|\alpha| = m + s_j - s_k} a_\alpha^{jk} t^{\alpha_1} \Big)_{j,k=1}^{N}$$

$P(t) = \det C(t)$ とおく。今次の条件を仮定する。

(2.5) $$\det \Big(\sum_{\substack{\alpha_1 = m + s_j - s_k \\ \alpha_2 = 0}} a_\alpha^{jk} \Big) \neq 0 \text{ かつ } \det \Big(\sum_{\substack{\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = m + s_j - s_k}} a_\alpha^{jk} \Big) \neq 0$$

τ_p, m_p ($p=1,\dots,p_0$) をそれぞれ $P(t)=0$ の根 および多重度とする。このとき次の条件を導入する。

$$(2.6)\quad \oint_{\Gamma_p} \operatorname{trace}\,(t-\tau_p)^{m_p-1}\Big(\sum_{\alpha} a_\alpha^{jk}\, t^{\alpha_1}\Big)^{-1}\Big(\sum_{|\beta|=m-s+s_j-s_k} b_\beta^{jk}(0)\, t^{\beta_1}\Big)\,dt$$

$$\notin -\big(F_{\frac{s}{m_p}}(\tau_p)\big)^{m_p} \quad \text{for} \quad p=1,\dots,p_0.$$

ここで Γ_pはτ_pのみをその中に含む円で積分は正の向きにとる。さらに $F_\sigma(\tau_p)$ は (1.4) で与えられ $\big(F_{\frac{s}{m_p}}(\tau_p)\big)^{m_p}$ $=\{y^{m_p};\ y\in F_{\frac{s}{m_p}}(\tau_p)\}$とする。このとき次の定理を得る。

<u>定理 2.1</u>. 条件(2.5)(2.6)を仮定する。このとき方程式(2.3)の形式解は 原点の近傍で正則な任意のfに対して常に収束する。

<u>注意</u>. §1で与えた例のLに対しては $b_\beta^{jk}(0)=0$であるので $s=m$として (2.6)は $0\notin F_{m/m_p}(\tau_p)$となり (2.6)はこの条件の拡張になっている。

<u>系 2.2</u>. 条件(2.5)を仮定し $s=0$とする。さらに $\tau_p\notin$ $[0,\infty)$ ($p=1,\dots,p_0$) とする。このとき 原点の近傍で正

則な任意の f に対して (2.3) の形式解は常に収束する。

注意: a) $N=1$ のときは これは Kashiwara, Kawai, Sjöstrand の結果の特別な場合であるが $N>1$ のときはこれは彼らの結果の1つの拡張になっている。

b) 条件 (2.5) は §1 で注意したように一般にはおとせない。さらに $\tau_p \notin [0,\infty)$ も一般には落とすことができない。たとえば P_0, P_1 を単独の定数係数の (2.1) 型 の作用素とすると $Q = P_0 + x_1 P_1$ に対しては τ_p が正の有理数のときは $Qu=0$ の 形式解で収束しないようなものが存在する。

c) $^{\exists}E_0 \subset [0,\infty)$ で E_0 のルベグ測度が零となるものが存在してすべての $\tau_p \notin E_0$ かつ $m_p=1$ であれば任意の $m-3$ 階以下の低階 Q_3 に対して $P = P_0 + Q_3$ とおくとき $Pu=f$ の 形式解は常に収束する。但し条件 (2.5) は仮定しておくものとする。これは定理 2.1 と 次の § で述べる $F_\sigma(\tau)$ の性質からただちに従う。

§3. $F_\sigma(\tau)$ の基本的な性質.

この § では $F_\sigma(\tau)$ の基本的な性質を述べておく。$\sigma > 0$ としておく。

Lemma 3.1. τが有理数かつ正，$\tau=\frac{b}{a}$，a, bは互いに素 $a, b>0$ とすると

$$F_\sigma(\tau)=\begin{cases} \mathbb{R} & (0<\sigma<1 \text{ のとき}) \\ k/a & (k=0, \pm1, \pm2, \dots)(\sigma=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\sigma>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

次に $\tau>0$ かつ無理数の場合を述べるために τを連分数に展開する。すなわち $a_0=[\tau]$, $\alpha_1=\tau-a_0$, $a_1=[1/\alpha_1]$ $\alpha_2=1/\alpha_1-a_1$, $a_2=[1/\alpha_2]$, …, $a_n=[1/\alpha_n]$, $\alpha_{n+1}=1/\alpha_n-a_n$; … ; によって a_n $(n=0,1,2,\dots)$を定める。ここで [ ]はガウスの記号。このとき $\tau=[a_0, a_1, a_2, \dots]$とかいてこれを$\tau$の正則連分数展開という。今 $n=3,4,\dots$ に対して互いに素な整数 p_n, q_nを次で定める。

$$\frac{p_n}{q_n}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\, \cfrac{1}{a_{n-2}}}}}.$$

このとき次の命題が成立する。

命題 3.2. $\tau>0$で無理数とし $\sigma>2$ とする。そのとき $F_\sigma(\tau)$は 数列 $\{(-1)^{n-1}q_n^{\sigma-2}/a_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ の $n\to\infty$ のとき

のすべての集積値に等しい。

命題 3.3. $F_\sigma(\tau)=\phi$ となるための必要十分条件は τ が正又は0の実数でないか あるいは条件 τ は無、理数かつ $\lim_{n\to\infty} \xi_n{}^{\sigma-2}/a_{n-1}=\infty$ のいずれか一方が成立することである。

命題 3.4. $\sigma>2$ とする。このとき $\mathbb{R}^1$ 上の任意の閉集合 F に対して 実軸の正の部分で dense かつ連続濃度の R_0 が存在して $\forall\ \tau\in R_0$ に対して $F_\sigma(\tau)=F$ となる。

命題 3.5. $\sigma>2$ とする。このとき ほとんどすべての $\tau>0$ に対して $F_\sigma(\tau)=\phi$ となる。

§4. P_0に対する必要十分条件

この§では Q_s として $Q_s=-\lambda I$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ の場合に形式解が常に収束するための必要十分条件を求め さらにそれと P_0 の essential spectrum の関係について述べる。まず定義をする。

定義 4.1. λ が P_0 の固有値であるとは $^\exists u\neq 0$ で正則な関数が存在して $P_0u=\lambda u$ が成立することである。

<u>定義4.2.</u>　P_0の固有値のうち無限次元の固有空間をもつものおよび　固有値の集積点となっているような複素数の全体を$E(P_0)$とかく。

$C(t)$を(2.4)で与えられるとし

(4.1)　$$\det(\lambda - C(t)) = \lambda^N + a_1(t)\lambda^{N-1} + \cdots + a_N(t)$$

によって　$a_j(t)$ $(1 \le j \le N)$を定義する。τ_k $(1 \le k \le k_0)$を$a_N(t)=0$の根のうち正又は0のもので$m_{k,N}$を多重度とする。$1 \le l \le N-1$に対し　$a_l(t)=0$の根のうち　τ_kの多重度を$m_{k,l}$とする。但し$a_l(\tau_k) \ne 0$のときは　$m_{k,l}=0$と約束する。今$a_0(t) \equiv 1$とおき　$0 \le l \le N$, $1 \le k \le k_0$に対し$\beta_{k,0}=1$,

$$\beta_{k,l} = \lim_{t \to \tau_k} a_l(t)/(t-\tau_k)^{m_{k,l}}$$　とおく。$\beta_{k,l} \ne 0$であることに注意する。

次に　k $(1 \le k \le k_0)$を固定し　点　$(j, m_{k,j})$　$(0 \le j \le N)$を平面にプロットして　これらの点の convex hull を考える。(図1参照).　この convex hull の辺の傾きのうち正のものを大きい方から順に

$$\sigma_{k,1} > \sigma_{k,2} > \cdots > \sigma_{k,j_0(k)} > 0$$

とする。傾き　$\sigma_{k,j}$　の　辺を　$L_{k,j}$とする。$(1 \le j \le j_0(k))$.

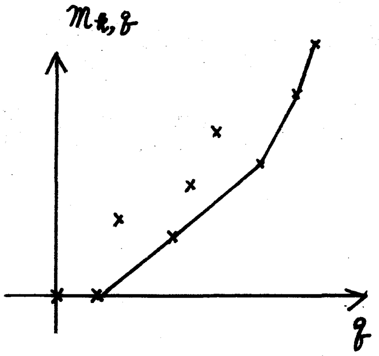

図 1

次に方程式

$$\sum_{(q,\, m_{k,q}) \in L_{k,j}} \beta_{kq}\, \lambda^{N-q} = 0$$

の根を $\lambda_{k,j,l}$ ($l = 1, \dots, l(k,j)$) とする。ここで $l(k,j)$ はこの方程式の次数とする。さらに $P(t)$ を P_0 の特性多項式とする。このとき 次の表現定理が成立する。

<u>定理4.3</u>　$P(t) \neq 0$ と仮定する。このとき次が成立する。

$$E(P_0) = \bigcup_{k=1}^{k_0} \bigcup_{j=1}^{j_0(k)} \bigcup_{l=1}^{l(k,j)} \bigcup{}^{*} \left\{ z = t^{\sigma_{k,j}} \lambda_{k,j,l} \;;\; t \in F_{m/\sigma_{k,j}}(\tau_k) \right\}.$$

ここで $\bigcup^{*}$ は $t^{\sigma_{k,j}}$ の可能なすべての分枝にわたって和をとる。$\sigma_{k,j}$ は有理数なのでこれは有限和となることに注意する。

<u>注意</u>　a) $P(t) \neq 0$ の仮定をはずしても必要な修正を施せば定理4.3と同じような結果は成立する。

b) $E(P_0)$ は 原点を通る有限ケの直線に含まれる閉集合になることが上の定理より従う。

次にこの事実の逆が成立することを示そう。

定理4.4（逆問題の存在定理と非一意性）　$\mathbb{C}$上で原点を通る有限ケの直線とその上の閉集合Fを任意に与えると，連続濃度の方程式$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が存在して$\forall\lambda\in\Lambda$に対して$E(P_\lambda)=F$をみたす。

注意　さらに次の事実が成立する。

定理4.4で存在の示された$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$の中から任意の$P_\lambda$を1つとってくる。そのとき任意の閉集合$F'$でFと同様の条件を満たすものに対し$P_\lambda$の任意に小さな近傍の中に連続濃度の$\{Q_\mu\}$で$E(Q_\mu)=F'$をみたすものが存在する。

応用：　定理4.3の証明法をそのまま用いることによってフラットトーラス$T^2=S^1\times S^1$上の定数係数m次斉次 Leray Volevich 系 P_0に対して$E(P_0)$の表現定理を得ることができる。但し$E(P_0)$の定義等は必要に応じて修正しておくとする。

ここで$E(P_0)$と$(P_0-\lambda)u=f$の形式解の収束の関係を述べておこう。

定理4.4　$^{\exists}E\subset E(P_0)$でルベグ測度0なる集合が存在して$(P_0-\lambda)u=f$の形式解が常に収束するための必要十分条件は$\lambda\notin E$なることである。

注意: a) $E(P_0)$は原点を通る有限ケの直線に含まれたのでEのルベグ測度は自然に定義できる。

b) Eは$E(P_0)$で稠密になることがある。たとえば$N=1$として$P_0=(x_1\partial_1 - t x_2\partial_2)^{2m+1}$ $t>0$ 無理数 とすると$E(P_0)=\mathbb{R}^1$であり 直接に計算してわかるようにEは$\mathbb{R}^1$で dense になる。

次に$0\notin E$を判定するための手段としてLerayが導入した数論的な補助関数が有用であることを示しておく。まず

$$\rho = \min_{\substack{1\le p\le p_0 \\ \tau_p\ge 0}} \tilde{\rho}(\tau_p)^{\frac{m_p}{1+\tau_p}}, \quad \tilde{\rho}(\theta) = \liminf_{k\to\infty} \inf_{l\in N} \left|\theta - \frac{l}{k}\right|^{\frac{1}{k}}$$

によってρを定義する。ここで$\tilde{\rho}(\theta)$はLerayによって[2]でGoursat問題のnon-Fredholm性を示すときに用いられた関数で$\theta>0$のとき それはθの超越性と深いつながりをもっている。これを用いて次を得る。

命題4.5 $\quad 0\notin E \Leftrightarrow \rho>0.$

この命題の直接の帰結として次を得る。

系 4.6 $\quad P_0 u = f$の形式解が常に収束 $\Leftrightarrow \rho>0$

参考文献

[1] Kashiwara, Kawai, Sjöstrand, On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge. Ark. fur Math. 1979

[2] J. Leray, Caractère non Fredholmien du problème de Goursat, J. Math. Pures Appl. 53 (1974), 133-136.