数理解析研究所講究録
第533巻 1984年 40-61

$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]$ における乗法的Jordan分解と指数写像について

東大 理・数（大学院） 上野一男（UENO, Kazuo）

§0. 研究の目的と概要

$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_n$ を $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]$ の極大イデアルとする。$\mathfrak{m}$ は普通のベキ級数の演算に関して単位元をもたない $\mathbb{C}$ 代数と考える。すると $\mathbb{C}$ 代数自己同型群として $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]\simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m})$ $(\varphi\mapsto\varphi|_{\mathfrak{m}})$，右辺 $=\left\{\varphi : x_i\mapsto f_i\ (i=1,\dots,n) \,\middle|\, \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]^{\times}\right\}$ となる。この群，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m})$（以下 A と略記する）の構造に関して調べてみたいというのが1つの素朴な動機である。また $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m})$（以下 D と略記する）を $\mathfrak{m}$ の導分 $\mathbb{C}$ Lie 代数とすると，自然に $\exp : D\longrightarrow A$ が定義される。（$\mathfrak{m}$-adic filtration による射影極限を考えればよい。）これは形式解析的自励系常微分方程式の定める"流れ"と考えられるが，この指数写像と D の Lie 代数構造及び A の群構造との関わりに関心がある。

A の元は，"原点における形式解析的変換"とも考えられ，

特に複素解析的変換（または，少し立場は違うが，C^∞ 変換）については，今までにもいくつかの重要な研究がされている。しかし，Aそのものの群構造については（どういう観点からにせよ）余りよく知られていないように思われる。

一方Dの元の標準化についてはPoincaré以来の研究があり，現在も進行中のようである。70年代後半頃からDで加法的Jordan分解が成立することが次才に一般に知られるようになった。（認識されはじめたのはもう少し前のようだ。）ところで線形代数群の理論で基本的なこととして乗法的Jordan分解がある。そこでAの群構造を調べる1つの手段としてこの乗J分解の考え方が利用できないだろうかと考えられる。

Dで加J分解が成立することを示すのには，例えばGerard-Levelt（[GL]）の方法があるが，それをAの場合に“乗法的”におきかえて適用していくと，Aで乗J分解が成立することがわかる。（§1. 参照）

しかし，[St]，[Sc] などにおいて以前から知られているように exp : D → A は全射ではないし，勿論単射でもない。従ってAにおける乗J分解を指数写像を通じてDにおける加J分解に帰着させることはできない。むしろJordan分解と指数写像との間のからみ具合が問題となってくる。

§2.で示すように“巾零導分”と“巾単同型”は exp に

よって1対1に対応する。これは直観的には線形代数における巾零性と巾単性の対応が一般化（或は拡大）されたものと考えられるが，$\exp^{-1}=\log$ の well-definedness はそれ程自明ではない。しかしいずれにせよ，巾零導分上の exp も，巾単同型上の log も"本質的に多項式的"なので，この1対1対応には exp 特有の周期性は全く影響せず本質的に代数的である。

導分（又は同型）の半単純成分が 0（又は id）ではないときに exp の周期性が現われてくる。それに関連して exp D ($\neq$ A) の特徴付けが気になるが，§4. でその1つの説明を与える。これは結局 Jordan 分解を用いて問題を言い換えたにすぎないともいえる。§4. 以上のことを知るためには"Jordan 標準形"に類する理論が必要だと思われるが，著者の知る限り（加法的，つまり導分の場合にも）そういう研究は余り進んでいないように思われる。しかし乗J分解が問題点を整理していることは確かだろう。

以下の記述において基礎体は $\mathbb{C}$ とする。これは簡単のため，ということもあるが，理くつをつけるなら次のような事情による；加（又は乗）J分解そのものは任意の完全体上で考えることができる。しかし半単純＝対角型を要請するには代数閉体上で考える必要がある。また非自明な指数写像を考える

ためには，基礎体が$\mathbb{R}$を含んでいるのが望ましい。

勿論，以下の記述を適当な部分に限定して見ると，その部分については仮定を相当一般的なものにできる場合が多い。しかしそれは目的と必要に応じてそうすればよいと思われるので，ここでは余りこだわらないことにする。

加（又は乗）J分解が成立つ，というのは次のような意味に使う：半単純及び巾零（又は巾単）という性質が定義され，任意の元が半単純成分と巾零成分（又は巾単成分）の和（又は積），但しこの2成分は積について可換，として表現される。また，これが1意的である，というのは上の条件を充たす分解の2成分が1意的にきまるということである。

この記録には“収束性”（或はGevrey性 etc）に関する説明は全くない。それらの問題は今後の課題の1つで，すでに部分的には研究されている面もあると思われるが，ここでは“形式解析的な性質はそれ自身を抽出して整理した方がものごとの見通しがよくなる場合もある”ということに注意していただきたい。

§1. Dにおける加J分解とAにおける乗J分解

記号を再記しておくと，

$D := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}) = \{\sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i \mid f_i \in \mathfrak{m},\ \partial_i := \partial/\partial x_i,\ i =$

$1,\dots,n\}$

$A := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}) = \{\varphi : x_i \mapsto f_i \mid \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in$
$\mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!]^{\times} = \mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!] \setminus \mathfrak{m}\} \cong \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!].$

加(又は乗)J分解とは加法(又は乗法)的Jordan分解のことである。以下aJd(又はmJd)と略記する。

(ちょっと脇道にそれるが，Aが上の$\{\cdots\}$のように表わされるということはそう自明とは言えないかも知れない。ここでは深入りしない。)

以下更に若干の記号と定義を並べるが，いずれも初等的で自然なものである。

$F\mathfrak{m} := \{\mathfrak{m}^i \mid i=1,2,\dots\}$　$\mathfrak{m}$の$\mathfrak{m}$-adic filtration

$\mathfrak{gl} := \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}; F\mathfrak{m})$　$F\mathfrak{m}$を保つ$\mathfrak{m}$の$\mathbb{C}$線型自己射の全体のなす$\mathbb{C}$ Lie代数

$\mathbb{GL} := GL(\mathfrak{m}; F\mathfrak{m})$　$\mathfrak{gl}$の可逆元の全体のなす群

$$\left.\begin{array}{l} F\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1} := \{\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{i+1} \mid j=1,2,\dots\} \\ {}_i\mathfrak{gl} := \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}; F\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ {}_i\mathbb{GL} := GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}; F\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}) \end{array}\right\} \text{ $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}$ の商にはりひきおこされる}$$

$\{{}_j\mathfrak{gl} \to {}_k\mathfrak{gl} \mid j \geq k\}$は自然な射影系になる。すると，$\mathfrak{gl} = \varprojlim_i {}_i\mathfrak{gl}$. 同様にして，$\mathbb{GL} = \varprojlim_i {}_i\mathbb{GL}$.

また，$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{C}\bar{x}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\bar{x}_n \cong \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$線型同型)

かつ $F\,\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, 0\}$ は自明なfiltrationとなり，$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \ni \forall \bar{f}, \forall \bar{g} \Rightarrow \bar{f}\bar{g} = 0$，つまり積は自明なものとなることに注意すると，

$GL := {}_1\mathbb{GL} \cong GL_n(\mathbb{C})$,

$gl := {}_1 gl \cong gl_n(\mathbb{C})$ と同一視できる。

<u>Prop.1</u> 次の可換図式がなりたつ：

$$
(1)\quad
\begin{array}{ccccc}
GL & \hookrightarrow & A & \hookrightarrow & \mathbb{GL} \\
{\scriptstyle \exp}\uparrow & & {\scriptstyle \exp}\uparrow & & {\scriptstyle \exp}\uparrow \\
gl & \hookrightarrow & D & \hookrightarrow & gl
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{（群準射行）} \\ \\ \text{（}\mathbb{C}\text{Lie代数準射行）}
\end{array}
$$

ここでいずれのexpも，$\exp M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$ で定義される。

証明は略すが，例えば $gl \hookrightarrow D$ は $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)\partial_i$ で与えられる。//

<u>Prop.2</u> 図式(1)において，第1及び第3列のexpは全射である。第2列のexpは全射ではない。

略証）第1列については線型代数で知られている。第3列については，各 $i=1,2,\ldots$ について ${}_i gl \xrightarrow{{}_i\exp} {}_i\mathbb{GL}$ の全射性を（複素解析的）線形代数により示し，それらが射影極限と両立することを示す。第2列の非全射性については

[St], [Sc] を見よ。//

$\mathfrak{gl} \longrightarrow {}_i\mathfrak{gl}$ (又は $\mathbb{GL} \longrightarrow {}_i\mathbb{GL}$) の自然な射影を g_i と表わす。

Def. 3　$M \in \mathfrak{gl}$ とする。

1) M が半単純 $:\Longleftrightarrow$ $\forall i=1,2,\dots$, $g_i M \in {}_i\mathfrak{gl}$ が半単純 ($\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1}$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元線型空間だからこの定義は有効。以下同様).

2) M が巾零 $:\Longleftrightarrow$ $\forall i=1,2,\dots$, $g_i M \in {}_i\mathfrak{gl}$ が巾零.

$M \in \mathbb{GL}$ に対し, 半単純性は1)と同じく定義される。更に,

3) M が巾単 $:\Longleftrightarrow$ $\forall i=1,2,\dots$, $g_i M \in {}_i\mathbb{GL}$ が巾単.

Def. 3に従って次のような記号を用いる:

${}^s\mathbb{GL} := \{ M \in \mathbb{GL} \mid M は半単純 \}$

${}^{up}\mathbb{GL} := \{ \quad 〃 \quad \mid M は巾単 \}$

${}^s\mathfrak{gl}$, ${}^{np}\mathfrak{gl}$ も同様。また, ${}^sA := A \cap {}^s\mathbb{GL}$, ${}^{np}D := D \cap {}^{np}\mathfrak{gl}$, ${}^{up}GL := GL \cap {}^{up}\mathbb{GL}$ etc だが, 例えば ${}^{up}GL$ が本来の $GL_n(\mathbb{C})$ における巾単元の全体と一致することは上のDef. 3だけでは自明とはいえない。これらについては次のTh. 4及びTh. 5の説明の中で触れる。

$\boxed{\text{Th. 4}}$ ([Sa], [GL] 参照)

$\mathfrak{gl} \hookrightarrow D \hookrightarrow \mathfrak{gl}$ について,

1) 3つのそれぞれにおいて aJd が1意的になりたつ。

2) 1)の aJd と各 $\hookrightarrow$ とは両立する。

$\boxed{\text{Th. 5}}$ $GL \hookrightarrow A \hookrightarrow \mathbb{GL}$ について,

1) 3つのそれぞれにおいて mJd が1意的になりたつ。

2) 1)の mJd と各 $\hookrightarrow$ とは両立する。

Th.4, Th.5において $\mathfrak{gl}$ (又は GL)における aJd (又は mJd)は普通の線形代数におけるJordan分解である。

まずTh.4の $\mathfrak{gl}$ における aJd については[GL]に詳しく説明されている。(定義や記号の細部はここでのものと異なるが,本質的に同値になる。)簡単に言うと,各 $i=1,2,\cdots$ について $i\mathfrak{gl}$ で aJd が成立することを用いて,それらが射影極限と両立することにより $\mathfrak{gl}$ での aJd の成立を示す。

$\mathbb{GL}$ における mJd も同様に示される。($i\mathbb{GL} \subset i\mathfrak{gl}$ により aJd から mJd へ移るのは普通の線形代数のようにできる。)

さて D における aJd についても[GL]に詳しく証明が載っているが,射影極限をとるという操作を除けば,ポイントと

なるのは，次の導分に関する一般化されたLeibnizの公式である：（Lem.6とLem.7の仮定部分は多少一般化できる）

Lem.6　$\delta\in D$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$f,g\in\mathcal{M}$ とすると $\forall k\in\mathbb{N}$ に対して，

(2)　$(\delta-\alpha-\beta)^k(fg)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\delta-\alpha)^i f\cdot(\delta-\beta)^{k-i}g.$

$\delta\in D$ を，$D\hookrightarrow\mathfrak{gl}$ により $\mathfrak{gl}$ の元と見て aJd する：$\delta={}^{s}\delta+{}^{np}\delta$，${}^{s}\delta\in{}^{s}\mathfrak{gl}$，${}^{np}\delta\in{}^{np}\mathfrak{gl}$. 問題は，${}^{s}\delta,{}^{np}\delta\in D$ となるかどうかだが，それを示すのにLem.6が用いられる。

このやり方を見ると自然に次のように考えられる。つまり"$\varphi\in A$ を，$A\hookrightarrow GL$ により GL 内でmJdしたものを $\varphi={}^{s}\varphi\,{}^{up}\varphi$，${}^{s}\varphi\in{}^{s}GL$，${}^{up}\varphi\in{}^{up}GL$ とすると実際には，${}^{s}\varphi$，${}^{up}\varphi\in A$ ではないか？そしてそれを示すのにはLem.6に類する乗法的公式をつくればいいのではないか？"

この"…"に対する答は肯定的で，Lem.6に対応するのは次の公式である：（証明自体は簡単な帰納法である）

Lem.7　$\varphi\in A$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$f,g\in\mathcal{M}$ とすると，$\forall k\in\mathbb{N}$ に対して，

(3) $$(\varphi-\alpha\beta)^k(fg)=\sum_{0\leqq i,j,\ i+j\leqq k}\binom{k}{i+j}\binom{i+j}{i}\alpha^i(\varphi-\alpha)^{k-i}f\cdot\beta^j\times(\varphi-\beta)^{k-j}g.$$

(3)は(2)の乗法化と考えられると思うが，著者は自分で作るまでこういう公式が成立つことは知らなかった。

以上でTh.4とTh.5の1)の部分の概略は説明した。また，$D\hookrightarrow gl$ とaJd（又は $A\hookrightarrow GL$ とmJd）が両立するというのは上の説明から理解されるだろう。

ここまでaJd（mJd）を正式に定義せずに書いてきたが，形式的には gl（GL）の場合と全く同じである。重要なことは例えば ${}^s\delta\,{}^n\delta={}^n\delta\,{}^s\delta$ （$\delta\in D$） 又は ${}^s\varphi\,{}^u\varphi={}^u\varphi\,{}^s\varphi$ （$\varphi\in A$） となること，つまり半単純部分と巾零部分（又は巾単部分）が可換になるということである。

最後に $gl\hookrightarrow D$ とaJd（又は $GL\hookrightarrow A$ とmJd）が両立することに関してDef.3のあとに注意したことも含めて説明する。

<u>Lem.8</u> 1) $\delta\in{}^nD \iff \theta_1\delta\in gl$ が巾零.

2) $\varphi\in{}^uA \iff \theta_1\varphi\in GL$ が巾単.

右辺の巾零（巾単）性は普通の線型代数におけるものである。

略証) $\varphi\in A$ の場合を説明する。($\delta\in D$ についても同様。)

⇒は明らか。⇐を示すには，$i=1,2,\dots$ についての帰納法により $\forall i$, $g_i\varphi\in {}_iGL$，が巾単なことを示す。その際，Lem.7 の(3)式で，$\alpha=\beta=1$ とおいたものを用いる。それは，$g_i\varphi-1$ が巾零なことから $g_{i+1}\varphi-1$ が巾零なことを示したいから。//

上の Lem. 8 は，本質的には D の元や A の元が"次数を保つ"性質，つまり $\delta(fg)=\delta(f)\cdot g+f\cdot\delta(g)$ 又は $\varphi(fg)=\varphi(f)\cdot\varphi(g)$，を持っていることによる。半単純性については：

<u>Prop. 9</u> 1) ([Sa], [GL] 参照) $\delta\in{}^sD \iff \exists\psi\in A$,
$$\psi\delta\psi^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\partial_i,\quad \alpha_i\in\mathbb{C}.$$
2) $\varphi\in{}^sA \iff \exists\psi\in A$, $\psi\varphi\psi^{-1}: x_i\longmapsto\alpha_i x_i$, $\alpha_i\in\mathbb{C}^\times$.

2)を示すのにも [GL] P.157 の論法が使える。//

さて $GL\hookrightarrow A$ と mJd が両立するというのは次のことである：$g\in GL$ を GL 内で mJd したものを $g={}^sg\,{}^ug$，とすると，これは $g\in A$ と見たときの mJd と一致する。($\mathfrak{gl}\hookrightarrow D$ と aJd についても同様。) なぜならば，${}^sg$ に対し，$\exists h\in GL$, $h\,{}^sg\,h^{-1}$ は対角行列，とできるが，$GL\hookrightarrow A$ には

り $h\in A$ と見れば，${}^{s}g$ について Prop. 9 −2) の右辺が成立つから，${}^{s}g\in{}^{s}A$．また，$GL\hookrightarrow A\xrightarrow{g_1}GL$ によって ${}^{up}g$ は ${}^{up}g$ に戻ることと，Lem 8−2) により ${}^{up}g\in{}^{up}A$．${}^{s}g\,{}^{up}g={}^{up}g\,{}^{s}g$ だから，A における mJd の1意性により $g={}^{s}g\,{}^{up}g$ は A における mJd と一致する。//

Def. 3 のあとに触れたことに関しては，例えば ${}^{up}GL:=GL\cap{}^{up}\mathbb{GL}=GL\cap A\cap{}^{up}\mathbb{GL}=GL\cap{}^{up}A$，だが，Lem. 8−2) によりこれは $\{g\in GL\mid g_1g=g\in GL$ が巾単$\}$，つまり普通の線形代数における $GL\cong GL_n(\mathbb{C})$ の巾単元の全体に等しい。${}^{s}GL:=GL\cap{}^{s}\mathbb{GL}=GL\cap{}^{s}A\ni g$ とすると，Prop 9−2) により $\exists\psi\in A$，$\psi g\psi^{-1}: x_i\mapsto\alpha_i x_i$，$\alpha_i\in\mathbb{C}^\times$ となるが，$A\xrightarrow{g_1}GL$ により，$g_1\psi\cdot g_1g\cdot g_1\psi^{-1}=g_1\psi\cdot g\cdot(g_1\psi)^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$，$g_1\psi\in GL$，だから，$g$ は線型変換で対角化できる。逆は上で示した通り。よって ${}^{s}GL$ は $GL\cong GL_n(\mathbb{C})$ の半単純元の全体と一致する。(${}^{up}\mathfrak{gl}$, ${}^{s}\mathfrak{gl}$ についても同様。)//

上の2つの議論をよく見れば，$g_1: A\to GL$ (又は $D\to\mathfrak{gl}$) と mJd (aJd) が両立することもわかる。

Th. 4 と Th. 5 についての説明はこれで終る。形式解析的自励系常微分方程式の "Poincaré reduction" と上記の理論との関係に触れて，この §1. を閉じることにする。

Prop. 10　1)（[Sa], [GL] 参照）$\delta \in D$ について，$g_1\delta \in {}^s\mathfrak{gl}$，その固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とする。もし任意の $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $|m| := m_1 + \cdots + m_n \geqq 2$ に対して $\alpha_i \neq \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$ $(i = 1, \dots, n)$ ならば $\delta \in {}^s D$.
2) $\varphi \in A$ について，$g_1\varphi \in {}^s GL$，その固有値を $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}^\times$ とする。もし任意の $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geqq 2$ に対して $\beta_i \neq \beta_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \beta_n^{m_n}$ $(i = 1, \dots, n)$ ならば $\varphi \in {}^s A$.

略証）1) $\delta = {}^s\delta + {}^n\delta$, ${}^s\delta\,{}^n\delta = {}^n\delta\,{}^s\delta$ と D で aJd する。
Prop 9－1) により ${}^s\delta$ を対角型にしておいて，${}^s\delta$ と ${}^n\delta$ の可換性と Th. 4 を用いる。2) も同様。//

このProp. 10－1) は，形式解析的自励系常微分方程式の Poincaré reduction（対角化）を与えているが，注意すべきことは2点ある：一般化な aJd から系として与えられること，いわゆる resonance relation $(\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j)$ は形式解析的な性質であること。Prop 10－2) は，1) の乗法化である。ここでも $\beta_i = \beta_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \beta_n^{m_n}$ という関係は形式解析的性質であることに注意する。

§2.　巾零性と巾単性の対応

$\boxed{\text{Th.11}}$ 次の可換図式が成立つ：

$$
\begin{tikzcd}
{}^{np}\mathfrak{gl} \arrow[r, shift left, "\exp"] \arrow[d, hook] & {}^{up}GL \arrow[l, shift left, "\log"] \arrow[d, hook] \\
{}^{np}D \arrow[r, shift left, "\exp"] \arrow[d, hook] & {}^{up}A \arrow[l, shift left, "\log"] \arrow[d, hook] \\
{}^{np}\mathbb{gl} \arrow[r, shift left, "\exp"] & {}^{up}\mathbb{GL} \arrow[l, shift left, "\log"]
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

（普通の線形代数における対応）

左の図式は Prop. 1 の図式(1)を巾零元上に制限したものである。

(4)で $\log = \exp^{-1}$ は，ベキ級数 $\log x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$ で与えられる。

(4)の3行目は基本的には線形代数で，あとは射影極限の操作をすればよい。2行目の exp についても一般に導分の指数級数は定義される限り同型を与えることと，3行目の対応からわかる。問題は2行目の log の像が ${}^{np}D$ になるかどうかである。これには次の Lem. 12 を用いる。

<u>Lem.12</u> $\varphi \in A$ に対し，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\varphi - 1)^k$ が意味をもつ（つまり $\in \mathfrak{gl}$）とする。その時それは導分（$\in D$）になる。

証明は［Sc］P322－P323 を見よ。//

$\delta \in D$ に対し $\exp \delta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\delta^k$ が $\in A$ となることは2項定理（Leibniz の公式）からすぐわかるのに対し，上の Lem12.

の証明はそれ程すんなりといかない。今のところ著者はSchein-berg の証明しか知らない。

Cor.13　1) $SD := \{\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i \mid f_i(x)=x_i r_i(x),\ r_i(x)\in \mathfrak{m},\ (i=1,\dots,n)\} \subseteqq {}^{np}D$,　$SA := \{\varphi\in A: x_i\mapsto g_i \mid g_i(x)=x_i(1+s_i(x)),\ s_i(x)\in\mathfrak{m},\ (i=1,\dots,n)\}\subseteqq {}^{up}A$ とおく。SDはDの部分ℂLie代数，SAはAの部分群になる。

2) $SD \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} SA$ は1対1対応である。これは図式(4)の第2行を制限したものである。//

このCor.13 の証明は$\log=\exp^{-1}$がwell-defined なことがわかっていれば(Lem.12)比較的容易に(直接的に)できる。実はCor.13の内容はAにおける乗積分解の理論を作る少し前に別のやや技巧的方法によって得ていた。しかしTh.11の系とする方がずっと自然である。§0.で触れたようにTh.11は本質的に代数的だが，Cor.13はその点では更に徹底的で，基礎環は任意のℚ可換代数でよい。SAは[F]の中で基本的な変数変換として利用されている。$n=1$，つまり1変数の場合には$SD={}^{np}D$, $SA={}^{up}A$となるが$n\geqq 2$のときは左辺と右辺の差は大きいことに注意する。(Lem.8参照。)

§3. 実固有値の場合について

$\boxed{\text{Th.14}}$ ${}^{]-\infty,0]}D := \{\delta \in D \mid g_1\delta \in \mathfrak{gl}$ の全ての固有値$\in$ $]-\infty,0]\}$, ${}^{]0,1]}A := \{\varphi \in A \mid g_1\varphi \in GL$ の全ての固有値$\in]0,1]\}$ とおく。${}^{]-\infty,0]}D \xrightarrow{\exp} {}^{]0,1]}A$ は全射である。${}^{[0,+\infty[}D$, ${}^{[1,+\infty[}A$ も同様に定義すると，${}^{[0,+\infty[}D \xrightarrow{\exp} {}^{[1,+\infty[}A$ も全射である。

これの詳しい証明は省略するが，次の Lem.15 が必要となる。

<u>Lem.15</u> $\mu_j \in \mathbb{C}^\times$ $(j=1,\dots,n)$ に対し，$A \supseteq GL \ni T\binom{\mu_1 \cdots}{\cdots \mu_n}$ $: x_i \longmapsto \mu_i x_i$ $(i=1,\dots,n)$ とおく。そのとき，

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(T\binom{\mu_1 \cdots}{\cdots \mu_n} - id\right)^k$ が ($\mathfrak{gl}$ で) 収束する (意味をもつ) $\Longleftrightarrow \{\mu_j \mid j=1,\dots,n\} \subseteq]0,1]$. //

ここで注意すべきことは，(5) は $T\binom{\mu_1 \cdots}{\cdots \mu_n}$ を単に線形変換と考える場合には $|\mu_j - 1| \leqq 1$ $(j=1,\dots,n)$ の条件下で"$n\times n$-行列として"収束して $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の元を定める。しかし $T\binom{\mu_1 \cdots}{\cdots \mu_n} \in A$ と見なす場合には $x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n} \longmapsto (\mu_1^{i_1}\cdot\dots\cdot\mu_n^{i_n})\cdot x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$ $(|i| \geqq 1)$ の全てについて考慮するので，Lem.15 の条件となる。また，(5) は収束する時には $\in D$ で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\log \mu_i)\, x_i \partial_i$ を表わす。(Lem.12 参照。)

§4. $\exp D$の特徴付け

Prop.2で述べたように $\exp : D \longrightarrow A$ は全射ではない。そこでA内での$\exp D$の特徴付けが欲しくなる。

Lem.16 1) $\varphi, \psi \in A$ について、$\varphi \in \exp D \Longleftrightarrow \psi_* \varphi := \psi\varphi\psi^{-1} \in \exp D$.

2) $A \ni \varphi = {}^{s}\varphi\, {}^{up}\varphi\ (= {}^{up}\varphi\, {}^{s}\varphi)$ を乗J分解とし、$g_1\, {}^{s}\varphi \in GL$ の固有値の組を $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ $(\mu_i \in \mathbb{C}^\times)$ とする。Prop.9−2) により $\exists \psi \in A$, $\psi_* {}^{s}\varphi : x_i \longmapsto \mu_i x_i$ $(i=1,\dots,n)$ となるが、この時、${}^{s}(\psi_*\varphi) = \psi_* {}^{s}\varphi$ かつ ${}^{up}(\psi_*\varphi) = \psi_* {}^{up}\varphi$. 従って、この $\psi_* {}^{s}\varphi$ を T_μ と表わし、$\psi_* {}^{up}\varphi$ を U と表わすと、1)により、"$\varphi \in \exp D$ or not" を調べるには、$\varphi = T_\mu U\ (= U T_\mu)$ と仮定してよい。

証明は1)は明白。2)はLem.8, Prop.9とmJdの1意性からわかる。//

以下Lem.16−2)の記号を用い、$\varphi = T_\mu U\ (= U T_\mu)$, $T_\mu \in {}^{s}A$, $U \in {}^{up}A$, について"$\in \exp D$ or not"を調べる。

Prop.17 $\exp^{-1}(T_\mu) := \{\delta \in D \mid \exp\delta = T_\mu\}$, $N := \log U \in {}^{np}D$ (Th.11により1意的に存在する), $\mathrm{ad}N : D$

$\to D;\ \delta \mapsto [N, \delta]$ （いわゆるLieカッコ），とおく。

$\varphi \in \exp D \iff \exp^{-1}(T_\mu) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}N \neq \phi$.

証明）$\Longrightarrow$）$\exists \delta \in D$, $\exp\delta = \varphi$ とする。$\delta = S + N$, $S \in {}^{s}D$, $N \in {}^{np}D$, をaJdとすると，$[S, N] = 0$ により，$\varphi = \exp(S+N) = \exp S \exp N = \exp N \exp S$ ，かつ $\exp S \in {}^{s}A$ ，$\exp N \in {}^{up}A$.（Lem.8とProp.9参照。）よってmJdの1意性から ${}^{s}\varphi = \exp S$, ${}^{up}\varphi = \exp N$. そして $S \in \exp^{-1}({}^{s}\varphi) = \exp^{-1}(T_\mu)$, $0 = [N, S] = \mathrm{ad}N(S)$ ，よって $S \in \exp^{-1}(T_\mu) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}N$ ，右辺 $\neq \phi$ となる。」

$\Longleftarrow$）$\exists \delta_0 \in \exp^{-1}(T_\mu) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}N$ とすると，$\exp\delta_0 = T_\mu$, $[N, \delta_0] = 0$. $\delta_0 = S + N_0$, $S \in {}^{s}D$, $N_0 \in {}^{np}D$, をaJdとすると，上と同じ理由によって，${}^{up}(T_\mu) = \exp N_0 \in {}^{up}A$. しかし $T_\mu \in {}^{s}A$ だから 左辺 $= id$. つまり $N_0 = \log id = 0\ (\in {}^{np}D)$, $\delta_0 = S$ となる。$\delta := \delta_0 + N = S + N \in {}^{s}D + {}^{np}D \subseteqq D$ とおくと，$[N, S] = [N, \delta_0] = 0$ だから，$\exp\delta = \exp(S+N) = \exp S \exp N = \exp\delta_0 \cdot U = T_\mu U = \varphi$ ，よって $\varphi \in \exp D$. //

Prop.17は一般の $\varphi \in A$ に対しても，右辺の条件を"$\exp^{-1}({}^{s}\varphi) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\log {}^{up}\varphi \neq \phi$"とおきかえて成立つ。

<u>Lem.18</u>　$\lambda_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, n)$ を $e^{\lambda_i} = \mu_i$ となる1つの固

定された値，$C_A(\mu):=\{\theta\in A \mid \theta T_\mu = T_\mu \theta\}$（$T_\mu$ の A における中心化群），とおくと，次式がなりたつ。

$$\exp^{-1}(T_\mu)=\bigcup_{z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{Z}^n}\left\{\theta_*\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+z_i\, i\, 2\pi)x_i\partial_i \;\middle|\; \theta\in C_A(\mu)\right\},$$

但し，i は虚数単位。

証明は省略する。//

$\boxed{\text{Th.}19}$ 以上の記号及び，$S(z):=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+z_i\, i\, 2\pi)x_i\partial_i$，を用いると，

$$\varphi(=T_\mu U)\in\exp D \Longleftrightarrow \exists z\in\mathbb{Z}^n,\ \exists\theta\in C_A(\mu)\ ;\ \theta_*S(z)\cdot N = N\cdot\theta_*S(z).$$

証明は Prop.17 と Lem.18 から明白。//

<u>Rem.20</u> $A\ni\psi : x_i\mapsto g_i(x)=\sum_{|\alpha|\geq 1} g_{i,\alpha}x^\alpha$，について，Prop.10−2) と同様の考察によって，$\psi\in C_A(\mu)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall i=1,\dots,n$，$\forall|\alpha|\geq 1$ に対し "$g_{i,\alpha}\neq 0 \Rightarrow \mu_i=\mu^\alpha = \mu_1^{\alpha_1}\cdots\cdots\mu_n^{\alpha_n}$".

Th.19 は Prop.17 の言いかえだが，他にも2，3の言いかえの仕方がある。しかし本質的には Prop.17 以上のことは著者にはわかっていない。(§0.参照。)

<u>Cor. 21</u> ([St] 参照)　以上の記号を用い，更に $\lambda_i(z) := \lambda_i + z_i i2\pi$ $(z \in \mathbb{Z}^n)$ とおく。また次の条件："$\exists z \in \mathbb{Z}^n$, $\forall k = 1, \ldots, n$, $\forall \alpha$ $(|\alpha| \geqq 1)$ に対し，$\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)\alpha_i \notin i2\pi(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$." を (LS) と表わすと，

$\varphi = T_\mu U$ に対し (LS) が成立つ $\Rightarrow$ $\varphi \in \exp D$.

略証)　(LS) が成立つと仮定し，条件中の z を1つ固定すると，$\forall k = 1, \ldots, n$, $\forall |\alpha| \geqq 1$ について，"$\mu_k = \mu^\alpha \Rightarrow \lambda_k(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)\alpha_i$" が成立つ。このことから $\mathrm{Ker\,ad}\, S(z) = \{\delta \in D \mid T_\mu \delta = \delta T_\mu\}$ がわかる。$T_\mu U = U T_\mu$ だから，$T_\mu N = T_\mu \cdot \log U = T_\mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (U - id)^k = \log U \cdot T_\mu = N T_\mu$，つまり $N \in \mathrm{Ker\,ad}\, S(z)$，言いかえると，$S(z) \in \mathrm{Ker\,ad}\, N$. そこで $\theta = id \in C_A(\mu)$ とおけば，$\exists z \in \mathbb{Z}^n$, $\exists \theta \in C_A(\mu)$; $\theta_* S(z) \cdot N = N \cdot \theta_* S(z)$ となり，Th. 19 の右辺の条件がみたされる。//

上の条件 (LS) は [St] P.455 で述べられている。Sternberg はこの条件は Lewis (1940 年頃) によると書いているが著者はまだ確認していない。Sterberg は [St] の中で "(LS) は necessary"，つまり $\varphi \in \exp D \Rightarrow$ (LS) と述べているようである (著者の読みまちがいかも知れない) が，これには次のような簡単な反例がある。

Prop. 22 (LS)は $\varphi \in \exp D$ の必要条件ではない。

証明）(LS)の否定 $\neg$(LS):“$\forall z \in \mathbb{Z}^n,\ \exists k = 1, \dots, n,\ \exists |\alpha| \geqq 1;$
$\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)\alpha_i \in i2\pi(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$” が成立つような $\varphi \in \exp D$ の例を与える。

T_μ : $x_1 \longmapsto -x_1$, $x_i \longmapsto x_i$ $(i = 2, \dots, n)$, つまり $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) = (-1, 1, \dots, 1)$ とおく。対応する λ_i (Lem. 18 参照) を, $\lambda_1 = i\pi$, $\lambda_i = 0$ $(i = 2, \dots, n)$ とする。$\forall z \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $\lambda_1(z) = \lambda_1 + z_1 i2\pi = (1 + 2z_1)i\pi$, $\lambda_i(z) = \lambda_i + z_i i2\pi = 2z_i i\pi$, $(i = 2, \dots, n)$.

さて, $k = 1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (3, 0, \dots, 0)$ $(|\alpha| = 3 \geqq 1)$ とおくと, $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)\alpha_i = \lambda_1(z) - 3\lambda_1(z) = -2\lambda_1(z) = -2(1 + 2z_1)i\pi = -(1 + 2z_1)(i2\pi)$, $-(1 + 2z_1) \neq 0$ だから, この (k, α) に対し $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)\alpha_i \in i2\pi(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. よって $\varphi = T_\mu$ に対しては $\neg$(LS) が成立つ。一方明らかに $\varphi = T_\mu (= T_\mu \cdot id) = \exp(i\pi x_1 \partial_1) \in \exp D$. //

§5. 参考論文

[F] FRANÇOISE, J.-P. : Singularités de champs isochores, Duke Math. J. 47 (1980), 465–485

[GL] GÉRARD, R. et LEVELT, A.H.M. : Sur les connexions à singularités régulières dans le cas de plusieurs variables, Funkc. Ekvac. 19 (1976), 149–173

[Sa] SAITO, K.: Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperfläschen, Invent. Math. 14 (1971), 123–141

[Sc] SCHEINBERG, S.: Powerseries in one variable, J. M. A. A. 31 (1970), 321–333

[St] STERNBERG, S.: Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems, J. Math. Mech. 10 (1961), 451–474

以上.

(1984–1–11)