数理解析研究所講究録
第533巻 1984年 73-85

Unfoldings and Determinacy of Analytic Foliation Singularities

北大理(教養) 諏訪 立雄 (T. SUWA)

我々の目的は，Mather 達によって得られた関数芽の特異点に関する結果を余次元1の葉層構造芽の場合に拡張することである．関数芽の場合は，Malgrange 予備定理，中山の補題等を用いて，C^∞の場合も同様に扱えるが，葉層構造の場合は今だに困難が大きく，複素解析的な場合のみを扱う．ここでは有限既定性問題を考えるが，これは開折理論とも深く関るので，開折理論にもふれておく．この問題はベクトル場，あるいは微分方程式の線型化，標準化の問題とし Poincaré，Siegel 等の人々により古くから研究されているものである．

1. $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$ を n 変数収束巾級数環とし，m をその極大 ideal とする．さらに，L_n を双正則写像芽：$(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ のなす群とする．芽 $f \in \mathcal{O}_n$ が k-既定であるとは，$j^k g = j^k f$ なる $\mathcal{O}_n$ の任意の芽 g に対し，

$g=\varphi^* f$ となる L_n の元 φ が存在することである. $J(f)$ を $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ で生成された $\mathcal{O}_n$ の ideal とし, 次の4つの条件を考える:

(1.1) $m^k \subset mJ(f)$,

(1.2) f は k-確定,

(1.3) $m^{k+1} \subset mJ(f)$,

(1.4) $j^k f_t = j^k f$, $f_0 = f$, なる任意の族(変形, 解析) $\{f_t\}$ に対し, L_n の元の族 $\{\varphi_t\}$ が存在し, $f=\varphi_t^* f_t$ が 0 に十分近いすべての t に対して成りたつ.

そうすると, 次の implications

$$(1.1) \Rightarrow (1.2) \Rightarrow (1.3) \Rightarrow (1.4)$$

は周知である(例えば [3],[11]). 条件 (1.3) は次のように幾何学的に解釈できる. すなわち, $mJ(f)$ は f の L_n-軌道 $L_n f$ の f における接空間, m^{k+1} は $\{g \in \mathcal{O}_n \mid j^k g = j^k f\}$ の f における接空間であるので, (1.3) は infinitesimal な k-確定性ということができる. 以下 implication (1.3) $\Rightarrow$ (1.4) を葉層構造芽の場合に拡張する.

2. $\mathcal{O}_n$, L_n は前節と同様とし, Ω_n, Θ_n をそれぞれ, $\mathbb{C}^n$ の 0 における正則1形式芽および正則ベクトル場芽のな

す $\mathcal{O}_n$-加群とする。さらに $\mathcal{U}_n$ を $\mathcal{O}_n$ の units のなす群とする．群 $\mathcal{L}_n$ は $\mathcal{U}_n$ に引きもどしにより自然に作用しているので，半直積 $G_n = \mathcal{U}_n \ltimes \mathcal{L}_n$ が構成できる．G_n は次により Ω_n に自然に作用する：

$$G_n \times \Omega_n \longrightarrow \Omega_n, \qquad ((u,\varphi),\omega) \longmapsto u\varphi^*\omega.$$

Ω_n の芽 ω と $\mathcal{O}_n$ の ideal I に対し，

$$L_I(\omega) = \{ L_X\omega \mid X \in I \cdot \Theta_n \}$$

とおくと次を得る．

(2.1) 補題. 正則1形式芽 ω の G_n-軌道 $G_n\omega$ の ω における接空間 $= L_{\mathfrak{m}}(\omega) + \mathcal{O}_n\omega$.

3. $\mathcal{F}=(\omega)$ を $\mathbb{C}^n$ の 0 における余次元1の葉層構造とする。つまり，$\mathcal{F}$ は Ω_n の rank 1 の自由部分 $\mathcal{O}_n$-加群で，積分可能 $d\omega\wedge\omega=0$ な生成元 ω をもつものである([4], [5], [6])．$S(\mathcal{F})=\{x \mid \omega(x)=0\}$ を $\mathcal{F}$ の特異点集合とし，以下 codim $S(\mathcal{F}) \geq 2$ とする．$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折とは，$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m=\{(x,t)\}$ の 0 における余次元1の葉層構造 $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ で，$\iota^*\tilde{\omega}=\omega$ なる生成元 $\tilde{\omega}$ をもつものである．ここで ι は $\iota(x)=(x,0)$ で与えられる $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ への埋込である．$\mathbb{C}^m$ を $\tilde{\mathcal{F}}$ のパラメタ空間とよぶ．

(3.1) 定義. $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$, $\mathcal{F}'=(\tilde{\omega}')$ をそれぞれ $\mathbb{C}^m=\{t\}$, $\mathbb{C}^l=\{s\}$ をパラメタ空間とする F の開折とする.

(I) $\mathcal{F}'$ から $\mathcal{F}$ への R-morphism は次をみたす (Φ, φ, u) から成る:

(a) Φ, φ は次の図式を可換にする写像芽

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m, 0) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^m, 0)
\end{array}$$

従って ある写像芽 $\psi : (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ に対し, $\Phi(x, s) = (\psi(x,s), \varphi(s))$ とかける. u は $\mathcal{O}_{n+l}$ の unit.

(b) $\psi(x, 0) = x$, $u(x, 0) = 1$

(c) $u\tilde{\omega}' = \Phi^*\tilde{\omega}$.

(II) $\mathcal{F}'$ から $\mathcal{F}$ への RL-morphism は次をみたす $(\Phi, \varphi, u, \alpha)$ から成る: Φ, φ, u は (I) と同じで, (a), (b) をみたす. α は Θ^l_{n+l} の元で

(c)′ $$u\tilde{\omega}' = \Phi^*\tilde{\omega} + \sum_{k=1}^{l} \alpha_k ds_k$$

をみたす.

R-morphism は関数芽の場合の (strict) right-morphism の, RL-morphism は right-left-morphism の拡張である.

$\tilde{F}=(\tilde{\omega})$ を $F=(\omega)$ の開折とし, 簡単のためパラメタ空間は一次元とする. $\tilde{\omega}$ を t の級数に展開し

(3.2) $\quad \tilde{\omega}=\sum_{p\geq 0}\omega^{(p)}t^p+\sum_{p\geq 1}p\,\ell^{(p)}t^{p-1}dt\,,\quad \omega^{(0)}=\omega$

と表わす. ここで $\omega^{(p)}$ は Ω_n の元で, $\ell^{(p)}$ は $\mathcal{O}_n$ の元である. 積分可能条件 $d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}=0$ より

(3.3) $\quad \ell^{(1)}d\omega+(\omega^{(1)}-d\ell^{(1)})\wedge\omega=0$

を得るが, 逆に (3.3) から $d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}\equiv 0 \mod. t^2, tdt$ が示される. 従って

$$I(\omega)=\{\ell\in\mathcal{O}_n \mid \ell\, d\omega=\eta\wedge\omega,\ \exists\eta\in\Omega_n\}$$

とおくと, $I(\omega)$ は F の1次開折のなす集合と解釈できる. さらに

$$J(\omega)=\{\langle X,\omega\rangle \mid X\in\Theta_n\}\quad (\text{Jacobian ideal})$$

$$K(\omega)=\{g\in\mathcal{O}_n \mid g\,d\omega=dg\wedge\omega\}\quad (\text{積分因子})$$

$$\Omega(\omega)=\{\theta\in\Omega_n \mid \exists h\in\mathcal{O}_n,\ \theta\wedge\omega=dh\wedge\omega-h\,d\omega\}$$

とおく。

積分可能条件 $d\omega\wedge\omega=0$ より次を得る.

(3.4) 補題. Θ_n の任意の元 X に対し,
$$\langle X,\omega\rangle d\omega + (L_X\omega - d\langle X,\omega\rangle)\wedge\omega = 0.$$
(3.5) 系. $J(\omega)\subset I(\omega)$.
(3.6) 系. すべての X に対し, $L_X\omega\in\Omega(\omega)$ 従って特に
$$L_m(\omega)+\mathcal{O}_n\omega \subset \Omega(\omega).$$

(3.7) 補題. $\mathcal{O}_n$ の任意の ideal I に対し
$$I(\omega)/I\cdot J(\omega)+K(\omega) \simeq \Omega(\omega)/L_I(\omega)+\mathcal{O}_n\omega.$$

商 $I(\omega)/J(\omega)$, $I(\omega)/J(\omega)+K(\omega)$ はそれぞれ, R-morphisms, RL-morphisms に関する F の一次開折の同値類に一致する. またそれぞれの場合に, 普遍性定理がなりたつ ([4], [10]). すなわち, $F=(\tilde{\omega})$ が, $C^m=\{(t_1,\cdots,t_m)\}$ をパラメータ空間とする $F=(\omega)$ の開折で, h_k $(\in\mathcal{O}_n)$, $k=1,\cdots,m$, を dt_k の係数としたとき, $h_1,\cdots,h_m$ の類が $I(\omega)/J(\omega)$ 又は $I(\omega)/J(\omega)+K(\omega)$ を生成すれば, それぞれ, R-morphism 又は RL-morphism に関し普遍である. 以下 2, 3 の特別な場合を考える.

(I) $\omega=df$, $f\in\mathcal{O}_n$, のとき. このときは, $I(\omega)=\mathcal{O}_n$,

$J(\omega)=J(f)$, $K(\omega)=f^*\mathcal{O}_1$ で、$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折理論は f の開折理論と同値である。

(II) $\omega=g\,df-f\,dg$, $f, g\in\mathcal{O}_n$ のとき。このとき $I(\omega)=(f, g)$ で、$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折理論は有理型関数 f/g の開折理論と同値であることが示される([7])。

(III) $\omega=f_1\cdots f_p\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{df_i}{f_i}$, $f_i\in\mathcal{O}_n$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$ のとき。

このときは、$I(\omega)=(f_1\cdots\hat{f_i}\cdots f_p)$ (f_i を一つずつのぞく) で、一般の f_i, λ_i に対しては、$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折理論は多価関数 $f_1^{\lambda_1}\cdots f_p^{\lambda_p}$ の開折理論と同値であることが示される([8])。

4. 一般に、Ω_n の元 $\theta=\sum_{i=1}^{n}f_i\,dx_i$ の k-jet $j^k\theta$ を、$j^k\theta=\sum_{i=1}^{n}j^{k-1}f_i\cdot dx_i$ により定め、$J^k\Omega_n$ を Ω_n の k-jets のなす空間とし、写像 $\pi_k:\Omega_n\to J^k\Omega_n$ を $\pi_k(\theta)=j^k\theta$ により定める。

$(\mathbb{C}, 0)$ をパラメータ空間とする $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折 $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ を考え、ι_t を $\iota_t(x)=(x, t)$ で定義される $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ への埋込とし、$\omega_t=\iota_t^*\tilde{\omega}$ とする。$\tilde{\omega}$ を (3.2) のように表わしておく。ここで、$j^k\omega_t=j^k\omega$ が、すべての $(0\leq t\leq 1)$ t に対して成りたつと仮定すると

$$\omega^{(p)}\in\pi_k^{-1}(0)\quad, \quad p\geq 1$$

であるので，特に一次の項 ω^{1} は $\pi_k^{-1}(0)\cap\Omega(\omega)$ の元である．従って我々の場合，infinitesimal k-既定性の条件は

(4.1) $\pi_k^{-1}(0)\cap\Omega(\omega)\subset L_m(\omega)+\mathcal{O}_n\omega$

と表わせる．さらに

$$I^{(k+1)}(\omega)=\{h\in\mathcal{O}_n \mid {}^{\exists}\theta\in\pi_k^{-1}(0),\ \theta\wedge\omega=dh\wedge\omega-hd\omega\}$$

とおくと (4.1) は

(4.2) $I^{(k+1)}(\omega)\subset mJ(\omega)+K(\omega)$

と同値である．これはまた

(4.3) $m^{k+1}I(\omega)\subset mJ(\omega)+K(\omega)$

と同値であるのではないかと考えられる．

<u>(4.4)定理.</u> $\mathcal{F}=(\omega)$ を $\mathbb{C}^n$ の 0 における余次元 1 の葉層構造とする．もし $\mathcal{F}$ が infinitesimally に k-既定，つまり (4.1) が成りたつならば，$\mathcal{F}$ の unfolding $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ で $j^k\omega_t=j^k\omega$ が任意の t について成りたつものは $\mathcal{F}$ の自明な開折に RL-isomorphic である．従って特に，十分 0 に近い任意の t に対し $\mathcal{F}_t=(\omega_t)$ と $\mathcal{F}=(\omega)$ とは葉層構造として同型である．

証明には次をみたす (Φ,u,α) を構成する．

(a) Φは次の図式を可換にする写像芽：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C},0) & \xrightarrow{id} & (\mathbb{C},0) \end{array}$$

従ってある写像芽 $\varphi:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ に対し、$\Phi(x,t)=(\varphi(x,t),t)$ とおける。u,α は $\mathcal{O}_{n+1}$ の元で、u は unit.

(b) $\varphi(x,0)=x$, $u(x,0)=1$, $\varphi(0,t)=0$.

(c) $\omega=u\Phi^*(\tilde{\omega}+\alpha dt)$.

$\tilde{\omega}=\sum_{i=1}^n f_i(x,t)dx_i+h(x,t)dt$ と書いておき、各 t に対し、$\varphi_t(x)=\varphi(x,t)$, $u_t(x)=u(x,t)$, $\alpha_t(x)=\alpha(x,t)$ $h_t(x)=h(x,t)$ とすると、(c)は次の2つの方程式と同値である。

(c-1) $u_t\varphi_t^*\omega_t=\omega$,

(c-2) $\sum_{i=1}^n f_i(\varphi(x,t),t)\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\varphi_t^*\alpha_t+\varphi_t^*h_t=0$.

さらに条件(b)の下で(c-1)は

(c-1)′ $\dfrac{\partial u_t}{\partial t}\cdot\varphi_t^*\omega_t+u_t\dfrac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\omega_t)=0$

に同値である。従って微分方程式 (c-1)′, (c-2) を解けば

良いわけであるが，まず次のように方程式を線型化する：

(4.5) 補題. 写像芽 $\xi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0\times\mathbb{C}) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ と関数芽 $g \in \mathcal{O}_{n+1}$ で

(C-3) $g_t\omega_t + L_{X_t}\omega_t + \frac{\partial}{\partial t}\omega_t = 0$,

(C-4) $\langle X_t, \omega_t\rangle + \alpha_t + h_t = 0$

をみたすものがあれば，(a), (b), (c) をみたす Φ, u, α が存在する．ここで $X_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$．

実際上のような ξ, g がみつかれば，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi(\varphi(x,t),t), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(\varphi(x,t),t)$$

を初期条件 $\varphi(x,0)=x$, $v(x,0)=0$ の下で解き，$u=e^v$ とすればよい．

以上より，微分方程式 (C-3) および方程式 (C-4) をみたす ξ, g, α を求めればよい．我々は巾級数の方法により求める．まず，ξ, g, α への形式巾級数としての解の存在を示し，次に収束解の存在を示す．収束解の存在には，小平–Spencer の優級数を modify したものとの比較によるが，評価には Malgrange の特異近似定理 ([2]) を用い，次のように行う．すなわち，θ が Ω_n の元で a が $\mathcal{O}_n$ のとき，

(4.6) $g\omega + L_X\omega + \theta = 0$, (4.7) $\langle X, \omega \rangle + \alpha + a = 0$

をみたし，うまく評価のできる g, X, α を求めるわけであるが，まず (4.7) から X, α を求め次に (4.6) から g を求める．

(4.4)定理の条件にさらに $K(\omega) \subset m J(\omega)$ をつけ加えると，$\mathcal{F}$ は F の自明な開折に R-isomorphic になる．また，3節で論じた場合 (I), (II), (III) の場合には，条件 (4.1)（又は (4.2)）を $m^{k+1} I(\omega) \subset J(\omega)$ でおきかえると各種関数に対する（局所）有限決定性が得られる．この場合には [1] にも同様の結果がある．

References

[1] D. Cerveau et J.-F. Mattei, Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque 97, Soc. Math. France, 1982.

[2] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1. Codim. un, Publ. Math. I.H.E.S. 46, 163–173 (1976).

[3] J. Mather, Unpublished notes on right equivalence.

[4] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. math. 65, 29–48 (1981).

[5] T. Suwa, Singularities of complex analytic foliations, Proc. Symposia in Pure Math. AMS 40, 551–559 (1983).

[6] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, Japan. J. Math. 9, 181–206 (1983).

[7] T. Suwa, Unfoldings of meromorphic functions, Math. Ann. 262, 215–224 (1983).

[8] T. Suwa, Unfoldings of foliations with multiform first integrals, Ann. Inst. Fourier (to

appear).
[9] T. Suwa, Determinacy of analytic foliation germs, in preparation.
[10] T. Suwa, The versality theorem for RL-morphisms of foliation unfoldings, in preparation.
[11] G. Wassermann, Stability of unfoldings, Lecture notes in Math. 393. Springer 1974.