数理解析研究所講究録
第 533 巻 1984 年 165-177

Quasi-Positive Pseudo-Differential Operators

都立大理 片岡清臣 (Kiyômi Kataoka)

§0. エルミート正値性と超局所解析

集合Sに対して$S\times S$上の$\mathbb{C}$値関数$K(x,u)$がエルミート正値核であるとは

イ) $\overline{K(u,x)}=K(x,u)\quad \forall x, \forall u\in S,$

ロ) $\forall N=1,2,\ldots, \forall x_1,\ldots,\forall x_N\in S, \ \forall \xi\in\mathbb{C}^N,$

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(x_j,x_k)\xi_j\overline{\xi_k}\geqq 0,$$

を満たす事をいう。特にSが$\mathbb{C}^n$の開集合で$K(x,\overline{u})$が$S\times S^c$ (S^cはSの複素共役)上整型であるとき，解析接続と正値性に関していくつかの興味深い事実が知られている.([4], [5], [8], [9], [10]など)。[6]においては，これら正値エルミート整型核の基本性質をマイクロ関数論と結びつけて，"エルミートマイクロ核"の正値性に関していくつかの重要な性質を導いた。本稿ではエルミートマイクロ核に作

用する，いわゆる正値エルミート型擬微分作用素についていくつかの結果を述べたい。この中で特に重要な結果は次の通りである。：$Q(t,x,D_x)$ なる μ 階擬微分作用素がもし

$$\mathrm{Re}\,\sigma(Q)(t,x,\xi) \geqq C|\xi|^{\mu} \quad ({}^{\exists}C>0,\ \mu>\tfrac{7}{8})$$

を満たせば，$Q(t,x,D_x)+\overline{Q(t,u,D_u)}$ は正値ではないが t について一様に quasi-positive，すなわちある可逆な無限階正値エルミート型擬微分作用素 $R(x,u,D_x,D_u)$ が存在して，

$$R(x,u,D_x,D_u)\,(Q(t,x,D_x)+\overline{Q(t,u,D_u)})$$

は正値エルミート型となる。この意味で例えば t を C^{ω} パラメータにもつ超関数 $f(t,x)$ に対して

$$E(x,u) = \int_{I} \{Q(t,x,D_x)+\overline{Q(t,u,D_u)}\} f(t,x)\overline{f(t,x)}\,dt$$

は "quasi-positive" なエルミートマイクロ核になる。なお，証明など詳しくは［7］を参照されたい。

§1. 正値エルミート型擬微分作用素.

$p_0=(z_0,\bar{z}_0\,;\,\xi_0 dz+\bar{\xi}_0 dw)\in T^*(\mathbb{C}^{n+n})$ $(|\xi_0|=1)$ とおく。p_0 における擬微分作用素の simple symbol（つまり $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の単表象）$p(z,w,\xi,\eta)$ が

$$p(z,w,\xi,\eta)-\overline{p(\bar{w},\bar{z},\bar{\eta},\bar{\xi})}\sim 0$$

を満たすとき $p(z,w,D_z,D_w)$ はエルミート型であるという。（擬微分作用素 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の symbol calculus については T. Aoki の一連の論文を参照されたい。特に [3] はまとまっていて読み易い）。このとき $\frac{1}{2}(p(z,w,\xi,\eta)+\overline{p(\overline{w},\overline{z},\overline{\eta},\overline{\xi})})$ を考えれば symbol 自体がエルミート的になっている。さらに $p(z,w,D_z,D_w)$ が正値であることはこのエルミートな symbol で正値なものがとれることと定義できる。しかしここでは後の応用を考えて formal symbol に対して一挙にエルミート正値性を定義する。

定義 1. $p_0=(z_0,\overline{z_0};\xi_0dz+\overline{\xi_0}dw)\in T^*\mathbb{C}^{n+n}$ $(|\xi_0|=1)$ とする。

$$P=\sum_{j,k=0}^{\infty}P_{jk}(z,w,\xi,\eta)$$

が p_0 における積エルミート型の formal symbol であるとは、

i) $\exists r,d>0$, s.t. $P_{jk}(z,w,\xi,\eta)$ は $V_j\times V_k^c$ で整型 $(\forall j,k\geqq 0)$,

但し

$$V_j=\{(z;\xi)\in\mathbb{C}^{n+n};|z-z_0|<r,\left|\frac{\xi}{|\xi|}-\xi_0\right|<r,\ |\xi|>(j+1)d\}$$

ii) $0<\exists A<1$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$, s.t.

$$|P_{jk}(z,w,\xi,\eta)|\leqq C_\varepsilon A^{j+k}\exp(\varepsilon(|\xi|+|\eta|))\quad\text{on } V_j\times V_k^c.$$
$$(\forall j,k=0,1,2\ldots)$$

iii) $P_{jk}(z,w,\xi,\eta)=\overline{P_{kj}(\overline{w},\overline{z},\overline{\eta},\overline{\xi})}$ on $V_j\times V_k^c$ $\forall j,k=0,1,2\ldots$

を満たすことをいう。さらに $P \gg 0$ at p_0 (p_0 で正値エルミート型) であるとは上の i)〜iii) と次の iv) を満たすことという。

iv) $S = \coprod_{j=0}^{\infty} \{j\} \times V_j$ とおいて, $\{P_{jk}(z, \bar{w}, \zeta, \bar{\eta})\}_{jk}$ を $S \times S$ 上のエルミート核とみなした時正値である。

注1)。積エルミート性は, 正値なエルミート symbol は必らず直積型近傍まで解析接続されることの帰結である。

注2)。iv) は simple symbol $P = P_{00}$ に対しては単に $P(z, \bar{w}, \zeta, \bar{\eta})$ の正値性をいっているにすぎない。

積エルミート型の formal symbol は自然に $V \times V^c$ 上の擬微分作用素の section を与える (V を $(z_0; \zeta_0 dz)$ の conic nbd として)。しかしここでは formal symbol の間に次の様な, より細かい同値関係を定義しておく。

<u>定義2.</u> $\sum_{j,k=0}^{\infty} P_{jk}$ を p_0 における積エルミート型の formal symbol とする。このとき $\sum_{j,k=0}^{\infty} P_{jk} \sim 0$ を次の様に定義する: $\exists\, r, d, \alpha > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$\left|\sum_{j=0}^{s} \sum_{k=0}^{t} P_{jk}(z, w, \zeta, \eta)\right| \leq C_\varepsilon \exp(-\alpha \cdot \min\{s, t\} + \varepsilon(|\zeta| + |\eta|))$$

on $V_s \times V_t^c$ for $\forall s, t \geq 0$.

この条件は simple symbol $P=P_{00}$ に対しては次と同値である：$\exists\delta>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$ s.t.

$$|P(z,w;\xi,\eta)|\leqq C_\varepsilon\exp(-\delta|\xi|+\varepsilon|\eta|)\quad\text{on } V_0\times V_0^c\cap\{|\xi|\leqq|\eta|\}$$

命題3. $P=\sum_{j,k=0}^{\infty}P_{jk}$ を p_0 における積エルミート型 formal symbol とする。そのとき $\exists Q(z,w,\xi,\eta)$：積エルミート型単シンボル s.t. $P\sim Q=Q_{00}$. さらに P が正値エルミート型の時は Q も正値エルミート型にとれる。

例4. $p=p(z,\xi)$ を $(z_0;\xi_0dz)$ で定義された $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の simple symbol とする。$p^*(w,\eta)\equiv\overline{p(\overline{w},\overline{\eta})}$ とおく。そのとき

$$p(z,\xi)+p^*(w,\eta),\qquad p(z,\xi)\cdot p^*(w,\eta)$$

はともに $(z_0,\overline{z}_0;\xi_0dz+\overline{\xi}_0dw)$ における積エルミート型の simple symbol であり後者は正値でもある。

例5. $P=P(z,\xi)$ を $(z_0;\xi_0dz)$ で定義された $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の simple symbol で $\exists C>0$, $\exists m\geqq0$ に対し

$$\mathrm{Re}\,P(z,\xi)\geqq C|\xi|^m,\qquad |P(z,\xi)|\leqq C^{-1}|\xi|^m$$

を満たしているとする。このとき $(p(z,D_z)+p^*(w,D_w))^{-1}$ は $(z_0,$

$\Xi_0 ; \xi_0 dz + \bar{\xi}_0 d\bar{w})$ において正値エルミート型の擬微分作用素となる。実際、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$(i\lambda + p(z, D_z))^{-1} =: \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(z, \xi ; \lambda) :$$

と $(i\lambda + p(z,\xi))^{-1}$ の巾で展開したとする。(i.e. $Q_0 = (i\lambda + p(z,\xi))^{-1}$, $Q_1 = (i\lambda+p)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (\partial p/\partial \xi_j) \cdot (\partial p/\partial z_j)$, ……). そのとき

$$(p(z, D_z) + p^*(w, D_w))^{-1} =: \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_j(z, \xi ; \lambda) \overline{Q_k(\bar{w}, \bar{\eta} ; \lambda)}\, d\lambda :$$

と書けて、正値性が明らかとなる。

命題6. $P = \sum_{j,k=0}^{\infty} P_{jk}(z, w, \xi, \eta)$, $Q = \sum_{j,k=0}^{\infty} Q_{jk}(z, w, \xi, \eta)$ を p_0 における積エルミート型の formal symbol とする。このとき積 $R = P \cdot Q$ を

$$R_{jk} = \sum_{\substack{j=|\alpha|+l+l' \\ k=|\beta|+m+m'}} \frac{1}{\alpha! \cdot \beta!} \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} P_{lm}}{\partial \xi^\alpha \partial \eta^\beta} \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} Q_{l'm'}}{\partial z^\alpha \partial w^\beta} \qquad j, k = 0, 1, 2 \ldots$$

として定義すると $R = \sum_{j,k=0}^{\infty} R_{jk}$ は再び p_0 における積エルミート型の formal symbol になる。又、この積は定義2の同値関係と両立し、通常の擬微分作用素としての積とも両立する。さらに $P \gg 0$ & $Q \gg 0 \Rightarrow R = P \cdot Q \gg 0$.

命題7. $p_0=(x_0,x_0;i\eta_0 dx-i\eta_0 du)\in iS^*\mathbb{R}^{n+n}$ とおく. $P=\sum_{j,k=0}^{\infty}P_{jk}$ をp_0における正値エルミート型のformal symbol, $k(x,u)$をp_0における正値エルミート・マイクロ核とする. そのとき
$P(x,u,D_x,D_u)k(x,u)$ は再びp_0で正値.

§2. 制限エルミート型作用素と指数計算.

積エルミート性は作用素積について閉じていることを§1で見たが, 例5の様な逆作用素もまた積エルミート型になることがある. しかし一般に逆作用素が積エルミート型になるかどうかを判定するのは難しい. これは例えば0階楕円型の積エルミート simple symbol $p(z,w,\zeta,\eta)$ に対して iteration

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(:1/p(z,w,\zeta,\eta)::p(z,w,\zeta,\eta):-1)^j$$

などで逆を構成しようとすると低階項 ζ/η^2 などの処理に困るからである. ($V\times V^c$ の形の集合上で ζ/η^2 は非有界!). そこで逆に対しても閉じている様な積エルミート型作用素のsubclassである次の様な作用素を考える.

定義8. $\exp(P(z,w,\zeta,\eta))$ が $p_0=(z_0,\bar{z}_0;\zeta_0dz+\bar{\zeta}_0dw)\in T^*\mathbb{C}^{n+n}$ における制限エルミート型の simple symbol であるとは,
i) $P(z,w,\zeta,\eta)$ は次の領域で整型:

$V(r)=\{(z,w,\xi,\eta)\in\mathbb{C}^{n+n+n+n};\ |z-z_0|<r,\ |w-\bar{z}_0|<r,$

$|(\xi/|\xi|)-\xi_0|<r,\ |(\eta/|\eta|)-\bar{\xi}_0|<r,\ |\xi|>r^{-1},\ |\eta|>r^{-1}\}.$

ii) $\exists C>0,\ 0\leqq{}^{\exists}\sigma<1$ s.t.

$$\begin{cases} |\mathrm{grad}_{(z,w)}P|\leqq C\cdot\min\{|\xi|^{\sigma},|\eta|^{\sigma}\} & \text{on } V(r), \\ |\mathrm{grad}_{(\xi,\eta)}P|\leqq C\cdot(|\xi|+|\eta|)^{\sigma-1} & \text{on } V(r). \end{cases}$$

iii) $p(z,w,\xi,\eta)=\overline{p(\bar{w},\bar{z},\bar{\eta},\bar{\xi})}$ on $V(r)$.

注1). ii) から直ちに $\exists M>0$. s.t.

$$|P(z,w,\xi,\eta)|\leqq M(|\xi|^{\sigma}+|\eta|^{\sigma}),$$

が得られるので $\exp(p(z,w,\xi,\eta))$ は積エルミート型の simple symbol である。

注2). ii) の条件は座標不変ではないが後の都合上この方が利用しやすい。ii) の代りに次の ii)′ にすれば座標不変となるが $\xi_1+\eta_1=\exp(\log(\xi_1+\eta_1))$ などの作用素は排除される.

ii)′ $\exists C>0,\quad 0\leqq{}^{\exists}\sigma<1$ s.t.

$$\begin{cases} |\mathrm{grad}_{(\xi,\eta)}P|\leqq C\cdot(|\xi|+|\eta|)^{\sigma-1} & \text{on } V(r), \\ |P|\leqq C\cdot\min\{|\xi|^{\sigma},|\eta|^{\sigma}\} & \text{on } V(r). \end{cases}$$

(ii) より ii)′ の方が強い条件である).

例9. $(0,0;dz_1+dw_1)$ で考えて, $\exp\left((\xi_1\eta_1)^{\frac{\sigma+2}{2}}/(\xi_1+\eta_1)^2\right)$

は i) ii)′ iii) をみたす。一方 $\xi_1+\eta_1 = \exp(\log(\xi_1+\eta_1))$ は i) ii) iii) をみたす。

次の定理は Aoki [1] の中の計算と同様にして導かれる。

定理10. $\exp(P(z,w,\xi,\eta))$ 及び $\exp(Q(z,w,\xi,\eta))$ を p_0 における制限エルミート型 simple symbol とする。但し $0\leqq\sigma<\frac{1}{2}$ として ii) をみたしているとする。このとき p_0 で定義された積エルミート simple symbols S_1, S_2 で、次の条件をみたすものが存在する。

イ) $\exists\, B>0$, s.t. $|S_\ell(z,w,\xi,\eta)|\leqq B(|\xi|+|\eta|)^{2\sigma-1}$ $\ell=1,2$.

ロ) $:e^P::e^Q: = :\exp(P+Q+S_1):$, $:e^P:^{-1} = :\exp(-P+S_2):$

従って制限エルミート性は積及び逆に関して閉じている(但し σ は大きくなる)。

注) $\sigma<\frac{1}{2}$ の仮定は最近の Aoki 氏の一連の仕事に関連して取り除けることが十分期待できる。

§3. Quasi-Positivity.

定理10と Bergman 核関数の具体形を用いることにより本稿の主題である次の定理の中の無限階可逆正値エルミート擬微

分作用素 $R(z, w, D_z, D_w) = :\exp(P(z, w, \xi, \eta)$: が構成できる(強い意味での制限エルミート型になる. cf. 例9.).

<u>定理11.</u> $p_0 = (z_0, \bar{z}_0; \xi_0 dz + \bar{\xi}_0 dw) \in T^*\mathbb{C}^{n+n}$ とおく。p_0 における積エルミート型 simple symbol の族 $\{Q_\lambda(z, w, \xi, \eta); \lambda \in \Lambda\}$ が次の条件をみたしているとする。

i) $\exists r > 0$, $Q_\lambda(z, w, \xi, \eta)$ は

$$V(r) = \{(z, w, \xi, \eta) \in \mathbb{C}^{n+n+n+n};\ |z - z_0| < r,\ |w - \bar{z}_0| < r,$$
$$|(\xi/|\xi|) - \xi_0| < r,\ |(\eta/|\eta|) - \bar{\xi}_0| < r,\ |\xi| > r^{-1},\ |\eta| > r^{-1}\}$$

で整型 $(\forall \lambda \in \Lambda)$, かつエルミート。

ii) $Q_\lambda(z, w, \xi, \eta) \notin \mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R}; t \leq 0\}$. on $V(r)$ for $\forall \lambda \in \Lambda$.

iii) $\exists A, \sigma > 0$ $(0 < \sigma < 1/8)$, $\exists m_\lambda \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{cases} \sup\{|m_\lambda|; \lambda \in \Lambda\} \leq A \\ A^{-1} \leq |Q_\lambda(z, w, \xi, \eta)/(|\xi| + |\eta|)^{m_\lambda}| \leq A & \text{on } V(r) \\ |\mathrm{grad}_{(\xi, \eta)} Q_\lambda| \leq A(|\xi| + |\eta|)^{m_\lambda + \sigma - 1} & \text{on } V(r) \end{cases}$$

for $\forall \lambda \in \Lambda$.

そのとき制限エルミート型かつ正値の simple symbol $R = \exp(P(z, w, \xi, \eta))$ (λ によらない!) が存在して

$$:\exp(P(z, w, \xi, \eta)) : \ : Q_\lambda(z, w, \xi, \eta) : \ \gg 0 \quad \text{at } p_0$$

とできる。

注1) $\exp(p(z,w,\zeta,\eta))$ は強い意味(ii)′)での制限エルミート型となれる。

注2) $\sigma<\frac{1}{8}$ の仮定は定理10の改良によって不要となると思われる。

注3). $\lambda\in\Lambda$ は主に C^{ω} パラメータ $t\in U\subset\mathbb{R}^{d}$ などである。

例12. $(z_0;\zeta_0 dz)\in T^*\mathbb{C}^n$ $(|\zeta_0|=1)$ における simple symbol の族 $\{Q_\lambda(z;\zeta);\lambda\in\Lambda\}$ が $\exists r>0$ (λ によらぬ Const.)

$$U=\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^{n+n};\ |z-z_0|<r,\ \left|\frac{\zeta}{|\zeta|}-\zeta_0\right|<r,\ |\zeta|>r^{-1}\}$$

で定義され、U 上 $\exists C>0$ (λ によらぬ)

$$C^{-1}|\zeta|^{m_\lambda}\leq \operatorname{Re} Q_\lambda\leqq |Q_\lambda|\leqq C|\zeta|^{m_\lambda}\quad (m_\lambda>\frac{7}{8},\ {}^{\forall}\lambda\in\Lambda).$$

をみたすとき、$\{Q_\lambda(z,\zeta)+\overline{Q_\lambda(\overline{w},\overline{\eta})};\lambda\in\Lambda\}$ は定理11の条件をみたす積エルミート型 simple symbol の族。

文献.

[1] T. Aoki : Invertibility for microdifferential operators of infinite order. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18, 1−29 (1982).

[2] ——: The Exponential Calculus of Microdifferential Operators of Infinite Order. I〜III. Proc. Japan Acad, 58 (1982), 58-61 / 58 (1982), 154-157 / 59 (1983), 79-82.

[3] 青木貴史：無限階擬微分作用素の表象理論，数理研講究録 468, 1〜61 (1982).

[4] S. Bergman: The Kernel Function and Conformal Mapping, Math. Surveys No. V, Amer. Math. Soc., New York, 1950 / Second Edition 1970.

[5] W. F. Donoghue Jr.: Reproducing Kernel spaces and analytic continuation, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), 85-97.

[6] 片岡清臣：代数解析におけるエネルギー法，数理研講究録 431, 207-235 (1981).

[7] K. KATAOKA: Microlocal Energy Methods and Some Applications to Pseudo-Differential Equations. To appear.

[8] M. G. Kreĭn: Hermitian-positive kernels on homogeneous spaces. I. Ukrain. Mat. Žurnal 1. No. 4 (1949), 64-98; Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 34 (1963), 69-108.

[9] H. Meschkowski: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion, Springer, 1962.

[10] F. Sommer, J. Mehring: Kernfunktion und Hüllenbildung

in der Funktionentheorie mehrer Veränderlichen, Math. Ann., 131 (1956), 1-16.