数理解析研究所講究録
第533巻 1984年 232-251



# F-mild hyperfunctions and characteristic boundary value problems

東大・理 大阿久 俊則 (Toshinori Ôaku)

§0. 序. 超函数 (hyperfunction) に対する非特性境界値問題は小松-河合[8]により定式化され，非特性的な境界の片側で定義された，線型偏微分方程式の零解であるような超函数は，境界上の超函数としての'境界値'を持つことが示された．簡単のため，$M$ を $\mathbb{R}^n (\ni x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$ の開集合として，$\mathring{M}_+ = \{x \in M ; x_1 > 0\}$，$N = \{x \in M ; x_1 = 0\}$ と置こう．$P$ を $M$ 上で定義された解析的係数の $m$ 階線型偏微分作用素でNはPに関して非特性的とすると，$Pu(x) = 0$ をみたす任意の $\mathring{M}_+$ 上の超函数 $u(x)$ に対して '境界値' $v_j(x') = (\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$ ($j = 0, 1, \cdots, m-1$) が $N$ 上の超函数として定まる．また，局所的には (即ち，$N$ の近傍と $\mathring{M}_+$ の共通部分では) $u(x)$ は $v_0(x'), \cdots, v_{m-1}(x')$ から unique に定まる．(即ち，$v_0 = \cdots = v_{m-1} = 0$ ならば $u(x) = 0$.) [8] では Cauchy-Kowalevsky の定理の双対を用いて境界値が定義されており，具体的な意味は余り明ら

かでなかったが，片岡[5,6,7]はmildな超函数という概念を導入し，境界値の意味を定義函数を用いて具体的に明らかにすると同時に，境界値の概念を超局所化して回折現象における解析的特異性の伝播の研究等に応用した．特に[5]によれば上の様な超函数$u(x)$は境界Nに沿ってmildとなり，境界値 $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$ が任意の $j = 0, 1, 2, \cdots$ に対してN上の超函数としてwell-definedである．

さて，我々はNがPに関して特性的な場合として，Pが$x_1$に関してBaouendi-Goulaouic[1]の意味でFuchs型の場合を考察する．この場合はもはや上記の$u(x)$はNに沿ってmildとは限らず(自然な意味の)$u(x)$の境界値 $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$ は一般には定義できない．そこで我々は境界値が自然に定義できるような超函数のクラスとしてF-mild超函数という概念を導入し，その枠内でFuchs型偏微分作用素に対する境界値問題がうまく定式化できることを示す．即ち，Pが[1]の意味でweight $m-k$ のFuchs型作用素(Nに関して)で$u(x)$は$Pu(x) = 0$をみたす$\mathring{M}_+$上の超函数であってNに沿ってF-mildとすると，境界値 $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$ は任意の $j = 0, 1, 2, \cdots$ に対してN上の超函数としてwell-definedであり，かつ$u(x)$は局所的には $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$ $(0 \leq j \leq m-k-1)$達により決定される．更にPが$\mathring{M}_+$で$x_1$方向に弱双曲型であれば，N上の任意の超

函数達 $v_0(x'),\cdots,v_{m-k-1}(x')$ に対して，$Pu(x)=0$，$(\partial/\partial x_1)^j u(+0,x')=v_j(x')$ $(0\leqq j\leqq m-k-1)$ をみたす超函数 $u(x)$ でNに沿ってF-mildであるものが，Nのある近傍と $\mathring{M}_+$ の共通部分の上で一意的に存在する．（但し，以上では，Pの特性指数は $m-k$ 以上の整数値をとらないと仮定しておく．）

F-mild超函数はmildな超函数の拡張となっており，境界値（Nへの）が定義函数の（Nの複素化への）制限のMへの境界値として自然に定義できるような超函数と言ってよい．mildな超函数の理論[5,7]はコホモロジー理論等も用いられやや難解な所もあるが，F-mild超函数の理論は（通常の超函数とマイクロ函数の理論を既知とすれば）正則函数の曲面波分解（cf. 片岡[4]，金子[2]）という初等的かつ具体的な方法のみを使って構成することができる．本稿で述べる結果の多くは，[9]に証明されているが，そこでは証明を短くするためもありmildな超函数の理論を何ヶ所かで援用している．そこで本稿ではF-mild超函数及びそれを用いたFuchs型境界値問題の理論が，mildな超函数の理論や従来の境界値問題の理論とは独立に，比較的初等的に構成できることを示すことを目標としたい．

§1. F-mild超函数．以下では簡単のため，$M=\mathbb{R}^n\ni x=(x_1,x')=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$M_+=\{x\in M;\ x_1\geqq 0\}$，

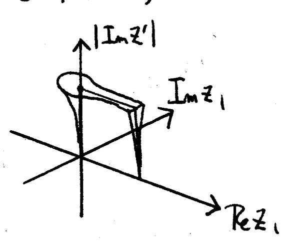
$N = \{ x \in M \,;\, x_1 = 0 \}$ とおく．（後で述べるように実はF-mild超函数は座標系によらずwell-definedなので，局所的な問題を考える限り，こうしても一般性は失なわれない．）さて，$\mathring{M}_+$（$M_+$の内部）から$M$への自然な埋め込み写像を$\iota$と書き$N$上の層$\mathcal{B}_{N|M_+}$を$\mathcal{B}_{N|M_+} = (\iota_* \iota^{-1} \mathcal{B}_M)|_N$により定義する（$\mathcal{B}_M$は$M$上の超函数の層）．$\mathring{x} = (0, \mathring{x}') \in N$とすると，$f$が$\mathcal{B}_{N|M_+}$の$\mathring{x}$におけるgermであるとは，$f$がある$\varepsilon > 0$に対して$\{ x \in \mathring{M}_+ \,;\, |x - \mathring{x}| < \varepsilon \}$で定義された超函数であることである．我々はF-mild超函数の層$\mathring{\mathcal{B}}^F_{N|M_+}$（以下では単に$\mathring{\mathcal{B}}^F$と書く）を$\mathcal{B}_{N|M_+}$の部分層として次の様に定義する．

<u>定義1.</u> $f(x)$を$\mathcal{B}_{N|M_+}$の$\mathring{x}$におけるgermとする．$f(x)$が$\mathring{x}$においてF-mildであるとは，ある$\varepsilon > 0$に対して$\{x \in \mathring{M}_+ ; |x - \mathring{x}| < \varepsilon\}$上で$f(x)$が次の様な一つの境界値表示を持つことと定義する：

$$f(x) = \sum_{j=1}^{J} F_j\,(x_1\,,\, x' + \sqrt{-1}\,\Gamma_j\, 0)\,;$$

ここで$J$は自然数，$\Gamma_j$達は$\mathbb{R}^{n-1}$の（原点を頂点とする）開凸錐，各$F_j(z)$は

$$D_+(\mathring{x}, \Gamma_j, \varepsilon) \underset{\mathrm{def.}}{=} \{ z = (z_1, z') \in \mathbb{C}^n ; \ |z - \mathring{x}| < \varepsilon\,,\ \mathrm{Re}\, z_1 \geq 0\,,$$
$$\mathrm{Im}\, z_1 = 0\,,\ \mathrm{Im}\, z' \in \Gamma_j \}$$




の（$\mathbb{C}^n$における）近傍で正則な函数である．

$N$の開集合$U$に対して，

$$\mathring{\mathcal{B}}^F(U) = \{ f(x) \in \mathcal{B}_{N|M_+}(U) ;\ f(x) \text{ は } U \text{ の各点で F-mild} \}$$

とおく．$\mathring{\mathcal{B}}^F$ は明らかに $\mathcal{B}_{N|M_+}$ の部分層となる．$\mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ を mild な超函数の層とすると，

$$\mathring{\mathcal{B}}_{N|M_+} \subsetneqq \mathring{\mathcal{B}}^F_{N|M_+} \subsetneqq \mathcal{B}_{N|M_+}$$

という包含関係が成り立つ．（［9］の§1の Example を参照）

次の2つの補題が我々の議論の基礎となる；

補題1．$\Gamma$ を $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐，$\varepsilon > 0$ として，$F(z)$ を $D_+(0, \Gamma, \varepsilon)$ の近傍で正則な函数とする．このとき，$\overline{\Gamma'} \cap S^{n-2} \subset \Gamma$ となる任意の開凸錐 $\Gamma' \subset \Gamma$ に対して，ある $c > 0$ が存在して，$F(z)$ は

$$\{ z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}^n ;\ |z| < c,\ y_1^2 < c|y'|^2(x_1 + c|y'|^2),\ y' \in \Gamma' \}$$

で正則となる．

証明．$F(w_1^2, z')$ は $\{ (w_1, z') \in \mathbb{C}^n ;\ |w_1| < \sqrt{\varepsilon/2},\ |z'| < \varepsilon/2,\ \mathrm{Im}\, w_1 = 0,\ \mathrm{Im}\, z' \in \Gamma \}$ で正則となる．Bochner の定理により，ある $\delta > 0$ が存在して $F(w_1^2, z')$ は

$$\{ (w_1, z') \in \mathbb{C}^n ;\ |w_1| < \sqrt{\delta},\ |z'| < \delta,\ |\mathrm{Im}\, w_1| < \delta |\mathrm{Im}\, z'|,\ \mathrm{Im}\, z' \in \Gamma' \}$$

で正則となる．これと $F(w_1, z')$ は $w_1 = 0$ なる点の近傍でも正則となることから結論が得られる．

補題2．$f(x)$ を $N$ の開集合 $U$ 上の F-mild 超函数とすると $f(x_1^2, x')$ は $U$ の $M$ における近傍で定義された $x_1$ を実解析パラメータとする超函数として well-defined である．

証明. $\mathring{x} \in U$ の近傍と $\mathring{M}_+$ の共通部分で
$$f(x) = \sum_{j=1}^{J} F_j(x_1, x' + \sqrt{-1}\,\Gamma_j\, 0)$$
と表示されているとしてよい; ここで, $\Gamma_j$達は $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐, $F_j(z)$ は $D_+(\mathring{x}, \Gamma_j, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ の近傍で正則な函数である.

そこで, $f(x_1^2, x')$ を ($x = \mathring{x}$ の M における近傍で)
$$f(x_1^2, x') = \sum_{j=1}^{J} F_j(x_1^2, x' + \sqrt{-1}\,\Gamma_j\, 0)$$
により定義しよう. $x_1 \neq 0$ の所では, $f(x_1^2, x')$は'代入'として定義函数のとり方によらずwell-definedである. また, 上の様に定義した $f(x_1^2, x')$ は $x_1$ を実解析パラメータに持つので超函数に対するHolmgrenの定理から $f(x_1^2, x')$ は $\mathring{x}$ の近傍で定義函数のとり方によらずwell-definedである. この議論を各 $\mathring{x}$ において行なってHolmgrenの定理を使って貼り合わせれば証明が完了する.

命題1. F-mildという性質は座標系のとり方によらない. 従って, 一般に実解析的な境界を持つ実解析多様体に対して, その境界上にF-mild超函数の層が定義される.

これは補題1から実際に計算して確かめられる.

*) 命題2. F-mild超函数の層はN上の軟層(soft sheaf)である.

証明. $x_1$を実解析パラメータとする超函数の層を $\mathcal{B}^a$ と書こう. Zを N の閉集合として, $f(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(Z)$ とすると, 補題2により, $f(x_1^2, x') \in \Gamma(Z; \mathcal{B}^a|_N)$ とみなせる.

$\mathcal{B}^a|_N$ は $N$ 上の soft sheaf（金子）なので，ある $g(x) \in \Gamma(N; \mathcal{B}^a|_N)$ が存在して，$g(x)$ の $Z$ への制限は $f(x_1^2, x')$ と一致する．

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(g(x_1, x') + g(-x_1, x')\right)$$

とおくと，$h|_Z = \frac{1}{2}\left(f(x_1^2, x') + f((-x_1)^2, x')\right) = f(x_1^2, x')$.

$h(x) = \tilde{f}(x_1^2, x')$ となるような $\tilde{f}(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(N)$ が存在することを示そう．$\tilde{f}$ は存在すれば局所的にも一意的（$x_1 > 0$ の部分で考えているので）だから，$N$ の各点 $\mathring{x}$ において $\tilde{f}$ を構成すればよい．さて，$\mathring{x}$ の近傍で

$$h(x) = \sum_{j=1}^{J} H_j\,(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0)$$

と表示されているとしよう．ここで $\Gamma_j$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐，$H_j$ は $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z - \mathring{x}| < \varepsilon,\ z_1 = x_1 \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}\, z' \in \Gamma_j\}$ $(\varepsilon > 0)$ の近傍で正則な函数である．$h(-x_1, x') = h(x)$ だから，

$$h(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} \left( H_j\,(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0) + H_j\,(-x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0)\right).$$

ある $0 < \delta \leqq \varepsilon$ と $D(\mathring{x}, \Gamma_j, \varepsilon)$ の近傍で正則な函数 $G_j(z)$ が存在して，$G_j(z_1^2, z') = \frac{1}{2}\left(H_j(z) + H_j(-z_1, z')\right)$ が成立する．そこで

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{J} G_j\,(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0)$$

とおけば，$\tilde{f}(x_1^2, x')|_Z = h(x)|_Z = f(x_1^2, x')$，従って $\tilde{f}(x)|_Z = f(x)$ となり，$\tilde{f}$ は $f$ の $N$ への拡張である．（証了）

---

*) 命題2は金子晃先生の御示唆によるものであり，この場を借りて感謝致します．

<u>定義2．（境界値）</u>　$f(x)$ を $N$ の開集合 $V$ 上で定義された F-mild 超函数とするとき，$f(x)$ の境界値 $f(+0, x') \in \mathcal{B}_N(V)$ を，$x_1$ を実解析パラメータとする超函数 $f(x_1^2, x')$ の $N$ への制限として定義する．

注意．$f(x)$ が $f(x) = \sum_{j=1}^{J} F_j(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0)$ と表示されるとき，$f(+0, x') = \sum_{j=1}^{J} F_j(0, x' + \sqrt{-1}\Gamma_j 0)$ となることは明らかである．

次に F-mild 超函数の特異スペクトルを定義するためにいくつかの記号を導入する．$\sqrt{-1}S^*M$，$\sqrt{-1}S^*N$ をそれぞれ $M$ と $N$ の純虚余接球束として，$\pi_M : \sqrt{-1}S^*M \longrightarrow M$，$\pi_N : \sqrt{-1}S^*N \to N$，$p : \sqrt{-1}S^*M|_N \setminus \sqrt{-1}S^*_N M \longrightarrow \sqrt{-1}S^*N$ をそれぞれ標準的な射影とする．通常の超函数の特異スペクトルを SS で表わす．

<u>定義3．（$p$-特異スペクトル）</u>　$f(x)$ を $N$ の開集合 $V$ 上の F-mild 超函数とするとき，その $p$-特異スペクトル $p\text{-}SS(f)$ を $\pi_N^{-1}(V) \subset \sqrt{-1}S^*N$ の開部分集合として

$$p\text{-}SS(f) = p\left(SS(u(x_1^2, x')) \cap (\sqrt{-1}S^*M|_N \setminus \sqrt{-1}S^*_N M)\right)$$

により定義する．

さて，$\langle z', \zeta' \rangle = z_2\zeta_2 + \cdots + z_n\zeta_n$，$z'^2 = z_2^2 + \cdots + z_n^2$ とおき，$W(z', \zeta')$ を次で定義する：$(z' = (z_2, \cdots, z_n),\ \zeta' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_n) \in S^{n-2})$

$$W(z', \zeta') = \frac{(n-2)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \frac{(1-\sqrt{-1}\langle z', \zeta' \rangle)^{n-3}\{1-\sqrt{-1}\langle z', \zeta' \rangle - (z'^2 - \langle z', \zeta' \rangle^2)\}}{\{\langle z', \zeta' \rangle + \sqrt{-1}(z'^2 - \langle z', \zeta' \rangle^2)\}^{n-1}}.$$

補題3. $K$を$N$のcompact部分集合で境界は$C^2$級なるものとする. $f(x)$は$K$上でglobalに

$$f(x)=\sum_{j=1}^{J}F_j(x_1,x'+\sqrt{-1}\Gamma_j 0)$$

により定義された$K$上の$F$-mild超函数とする; ここで, $\Gamma_j$は$\mathbb{R}^{n-1}$の開凸錐, $F_j$は $D_+(K,\Gamma_j,\varepsilon)=\bigcup_{x\in K}D_+(x,\Gamma_j,\varepsilon)$ の近傍で正則とする. $\mathring{x}\in\mathring{K}$, $\mathring{\xi}'\in S^{n-2}$とするとき, $\sqrt{-1}S^*N$の点$(\mathring{x},\sqrt{-1}\mathring{\xi}')$が$p$-$SS(f)$に含まれないための必要十分条件は, 長さが十分小さい任意の$a_j\in\Gamma_j$達に対して,

$$F(z;\xi')\underset{\mathrm{def}}{=}\sum_{j=1}^{J}\int_{K+\sqrt{-1}a_j}F_j(z_1,w')W(z'-w',\xi')dw'$$

が $(z,\xi')=(\mathring{x},\mathring{\xi}')$ において解析的となることである.

この補題の証明は初等的ではあるがやや長いので省略する([9]参照). この補題から直ちに次の2つの命題が得られる:

命題3. $f(x)$を$\mathring{x}\in N$の近傍で定義された$F$-mild超函数とする. このとき, $(\mathring{x},\sqrt{-1}\mathring{\xi}')\in\sqrt{-1}S^*N$ が $p$-$SS(f)$に含まれないための必要十分条件は, $\mathring{\xi}'\notin\Gamma_j^{\circ}\underset{\mathrm{def}}{=}\{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1};\langle y',\xi'\rangle\geq 0$ for all $y'\in\Gamma_j\}$ なる$\mathbb{R}^{n-1}$の開凸錐$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_J$ $(J\in\mathbb{N})$と$D_+(\mathring{x},\Gamma_j,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$の近傍で正則な函数$F_j(z)$が存在して, $\mathring{x}$の近傍と$\mathring{M}_+$の共通部分で

$$f(x)=\sum_{j=1}^{J}F_j(x_1,x'+\sqrt{-1}\Gamma_j 0)$$

と表示されることである.

<u>命題4</u>. $q \geq 1$ を自然数, $f(x)$ を $N$ の開集合 $U$ 上の F-mild 超函数とすると, $p\text{-}SS(f(x)) = p\text{-}SS(f(x_1^q, x'))$.

次の命題は通常の超函数に対する同様の結果と補題2から従う.

<u>命題5</u>. $K$ を $N$ のコンパクト部分集合, $\Gamma$ を $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐として, $f(x)$ は $K$ の近傍で定義された F-mild 超函数で $p\text{-}SS(f) \cap \pi_N^{-1}(K) \subset K \times \sqrt{-1}\Gamma^\circ$ なるものとする. このとき, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ (即ち, $\overline{\Gamma'} \cap S^{n-2} \subset \Gamma \cap S^{n-2}$) なる任意の開凸錐に対して, $\varepsilon > 0$ と $D_+(K, \Gamma', \varepsilon)$ の近傍で正則な函数 $F(z)$ が存在して, $K$ の近傍と $\mathring{M}_+$ の共通部分の上で

$$f(x) = F(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma' 0)$$

が成立する. 更にこの様な $F$ は一意的である.

## <u>§2. F-mild 超函数の超局所化.</u>

通常の超函数の層からマイクロ函数の層を定義する (cf. [2]) のと同様の方法で, F-mild 超函数の層を超局所化して F-mild microfunctions の層を定義することができる. $N$ の開集合 $U$, $S^{n-2}$ の開集合 $\Delta$ に対して, $U \times \sqrt{-1}\Delta$ に $\mathbb{C}$-加群 $\{f(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(U) \,;\, p\text{-}SS(f) \cap (\Omega \times \sqrt{-1}\Delta) = \phi\}$ を対応させる準層に同伴した層を $\mathcal{A}^{*F}$ で表わそう.

<u>定義4</u>. (F-mild microfunctions) $\mathring{\mathcal{C}}^F \underset{\text{def.}}{=} \pi_N^{-1}\mathring{\mathcal{B}}^F / \mathcal{A}^{*F}$.

$\mathcal{B}^A \underset{\text{def.}}{=} \mathcal{B}^a|_N$ , $\mathcal{C}^A \underset{\text{def.}}{=} \rho_!(\mathcal{C}_M|\sqrt{-1}S^*M|_N \setminus \sqrt{-1}S^*_N M)$

とおく.（$\mathcal{C}_M$ はマイクロ函数の層）$\mathcal{C}_M$ の flabbiness から次の補題が従う.

補題 4. (cf. [2]) (i) $K$ を $N$ の閉集合, $\Delta$ を $S^{n-2}$ の compact 集合とするとき,

$$\mathcal{C}^A(K \times \sqrt{-1}\Delta) = \mathcal{B}^A(K)/\{f \in \mathcal{B}^A(K);\ SS(f) \cap \rho^{-1}(K \times \sqrt{-1}\Delta) = \phi\}$$

が成立する. 特にスペクトル写像 $sp : \pi_N^{-1}\mathcal{B}^A \longrightarrow \mathcal{C}^A$ は全射.

(ii) $\mathcal{C}^A$ は $\sqrt{-1}S^*N$ 上の soft sheaf.

命題 6. $K$ を $N$ の閉集合, $\Delta$ を $S^{n-2}$ の compact 集合とすると,

$$\mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{-1}\Delta) = \mathring{\mathcal{B}}^F(K)/\{f \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K);\ \rho\text{-}SS(f) \cap K \times \sqrt{-1}\Delta = \phi\}.$$

証明. $0 \to \{f \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K); \rho\text{-}SS(f) \cap K \times i\Delta = \phi\} \to \mathring{\mathcal{B}}^F(K) \to \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{-1}\Delta)$ が完全列であることは明らかなので, $\mathring{\mathcal{B}}^F(K) \longrightarrow \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{-1}\Delta)$ が全射であることを示せばよい. 層準同型 $\mathring{\mathcal{B}}^F \ni f(x) \longmapsto f(x_1^2, x') \in \mathcal{B}^A$ は単射層準同型 $\mathring{\mathcal{C}}^F \longrightarrow \mathcal{C}^A$ を引き起こす. $u(x) \in \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times i\Delta)$ とすると, $u(x_1^2, x') \in \mathcal{C}^A(K \times \sqrt{-1}\Delta)$ が well-defined. 補題4により, ある $g(x) \in \mathcal{B}^A(K)$ が存在して, $u(x_1^2, x') = sp(g(x))|_{K \times i\Delta} = \frac{1}{2} sp(g(x) + g(-x_1, x'))|_{K \times i\Delta}$ となる. 命題2の証明と同様にして, $h(x_1^2, x') = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x_1, x'))$ となる $h(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K)$ をとれる. $sp(h(x_1^2, x')) = u(x_1^2, x')$ on $K \times i\Delta$ から, $sp(h(x))|_{K \times \sqrt{-1}\Delta} = u(x)$ を得る.（証了）

系. $0 \to \mathcal{A}_M|_N \longrightarrow \mathring{\mathcal{B}}^F \longrightarrow \pi_{N*}\mathring{\mathcal{C}}^F \to 0$ は完全列.

証明. 命題5より, $f \in \mathring{\mathcal{B}}^F{}_{\mathring{x}}$ に対して, $\rho\text{-}SS(f) \cap \pi_N^{-1}(\mathring{x}) = \phi$ と $f \in \mathcal{A}_{M,\mathring{x}}$ が同値であることに注意すれば, 命題6で $\Delta = S^{n-2}$ とおくことにより上の完全列が得られる.

命題7. $\mathring{\mathcal{C}}^F$ は $\sqrt{-1}S^*N$ 上の soft sheaf である.

証明. $Z$を$\sqrt{-1}S^*N$の閉集合とし, $u(x) \in \Gamma(Z; \mathring{\mathcal{C}}^F)$ とすると, $u(x_1^2, x') \in \Gamma(Z; \mathcal{C}^A)$. $\mathcal{C}^A$ は soft sheaf なので $\exists\ v(x) \in \Gamma(\sqrt{-1}S^*N; \mathcal{C}^A)$ such that $v|_Z = u(x_1^2, x')$.
補題4により, ある $g(x) \in \mathcal{B}^A(N)$が存在して, $sp(g) = v$.
$h(x_1^2, x') = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x_1, x'))$ なる $h(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(N)$ が存在する. $Z$上で $sp(h(x_1^2, x')) = \frac{1}{2}(v(x) + v(-x_1, x'))$ $= v(x) = u(x_1^2, x')$ が成立するので, $Z$上で $sp(h(x)) = u(x)$ が成立する. (証了)

## §3. コンパクト台のF-mild超函数と解析汎函数.

$R > 0$ として, $B_R = \{x' \in N;\ |x'| \leq R\}$ とおく. また, $\mathbb{C}^{n-1}$の部分集合Kと$\delta > 0$に対して $K_\delta = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1};\ dist(z', K) < \delta\}$ (Kの複素$\delta$-近傍) とおく. $\mathbb{C}^{n-1}$の有界開集合$\Omega$に対して, $\mathcal{O}_c(\Omega) = \{f(z) \in C^0(\overline{\Omega});\ f(z)$は$\Omega$で正則$\}$ とおく. $\mathcal{O}_c(\Omega)$はノルム $\|f\| = \sup_{z' \in \Omega}|f(z')|$ によりBanach空間となる. さらに, $F(\Omega)$により$\mathcal{O}_c(\Omega)$における$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$

($\mathbb{C}^{n-1}$ 上の整函数全体)の閉包を表わそう. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ を2つの連結有界開集合とすると, $F(\Omega_2) \subset F(\Omega_1)$, $F'(\Omega_1) \subset F'(\Omega_2)$ とみなせる.

$f(x)$ を $N$ 上の $F$-mild 超函数で $\mathrm{supp}\, f$ ($f$ の台)が $\mathring{B}_R$ に含まれるものとすると, $f(x)$ は $\{x \in M\,;\, 0 < x_1 < {}^{\exists}\varepsilon\}$ 上定義された $x_1$ を実解析パラメータに持つ超函数で $\mathrm{supp}\, f \subset (0, \varepsilon) \times \mathring{B}_R$ なるものとみなせる. 従って, $\varphi(x') \in \mathcal{A}(B_R)$ に対して,

$$\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x')\varphi(x')dx'$$

は $(0, \varepsilon)$ 上の実解析函数となる.

命題8. 以上の仮定のもとで, 任意の $s > 0$ に対して, $f(x_1, \cdot)$ は上記の pairing で $F'((B_R)_s)$-値の正則函数として $x_1 = 0$ の($\mathbb{C}$ における)近傍へ接続される.

証明. $\mathcal{C}^F$ の softness (命題7)と命題6, 命題5を用いると, $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_J$ と $\varepsilon > 0$, $D_+(B_R, \Gamma_j, 2\varepsilon)$ の近傍で正則な函数 $F_j(z)$ が存在して, $(B_R)_{2\varepsilon} \cap \mathring{M}_+$ 上で

$$f(x) = \sum_{j=1}^{J} F_j(x_1, x' + \sqrt{-1}\,\Gamma_j 0)$$

が成立する. 十分小さな $a_j \in \Gamma_j$ $(j = 1, \cdots, J)$ を固定して,

$$F(z\,;\,\xi') = \sum_{j=1}^{J} \int_{B_{R+\varepsilon} + \sqrt{-1}a_j} F_j(z_1, w')W(z' - w', \xi')dw'$$

とおくと, 補題3により, $F(z\,;\,\xi')$ は $(z, \xi') \in \{0\} \times \partial B_R \times S^{n-2}$

の近傍で解析的である．$\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ を $\mathbb{R}^{n-1}$ の固有凸閉錐で，$\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n = \mathbb{R}^{n-1}$，$|\Delta_j \cap \Delta_k| = 0 \ (j \neq k)$ なるものとし，

$$G_k(z) = \int_{\Delta_k \cap S^{n-2}} F(z; \xi') \, d\sigma(\xi')$$

とおく（$d\sigma(\xi')$ は $S^{n-2}$ 上の体積要素）と，任意の $V_k \subset\subset \mathring{\Delta}_k$ なる開凸錐 $V_k$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$G_k(z)$ は $D_+(B_R, V_k, \delta) \cup \{z \in \mathbb{C}^n ; |z_1| < \delta, \mathrm{dist}(z', \partial B_R) < \delta\}$ で正則となり，$f(x) = \sum_{k=1}^{n} G_k(x_1, x' + \sqrt{-1} V_k 0)$ が成立する．

補題 1 により，$G_k(z)$ は（必要なら $\delta > 0$ を取り直して）$\{z = x + \sqrt{-1} y \in \mathbb{C}^n ; |z_1| < \delta, \mathrm{dist}(z', B_R) < \delta, x_1 > -\delta |y'|^2,$
$|y_1| < \delta |y'|^2, y' \in V_k\}$ で正則となる．$0 < s < \delta/4$ と仮定してよい．$C^2$-写像 $\varepsilon_k : B_R \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ を

(i) $\varepsilon_k(x') = 0$ for $x' \in \partial B_R$,

(ii) $\varepsilon_k(x') \in V_k$, $|\varepsilon_k(x')| \leqq s/2$ for $x' \in \mathring{B}_R$,

(iii) $|\varepsilon_k(x')| = s/2$ for $x' \in B_R \setminus B_{R-\frac{\delta}{2}}$

をみたすようにとり，$\gamma_k = \{x' + \sqrt{-1} \varepsilon_k(x') ; x' \in B_R\}$ とおく．超函数の積分の（定義函数を用いた）定義から，$\varphi(z') \in \mathcal{F}((B_R)_s) = \mathcal{O}_c((B_R)_s)$ に対して

$$\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} G_k(x_1, w') \varphi(w') \, dw'$$

が成立する．この右辺の表示は $x_1 = z_1$ を複素変数として，

$$\{z_1 = x_1 + \sqrt{-1} y_1 \in \mathbb{C} ; |z_1| < \delta/4, x_1 > -\delta s^2/4, |y_1| < \delta s^2/4\}$$

上で正則であり，命題 8 の結論を得る．（証了）

次に，$f(x)$ の $p$-特異スペクトルが解析汎函数の支え (carrier) を用いて記述できることを示そう．

$$\Phi(z', \xi') = \langle z', \xi' \rangle + \sqrt{-1}\,(z'^2 - \langle z', \xi' \rangle^2)$$

とおき，$w' \in \mathbb{C}^{n-1}$ と $\xi' \in S^{n-2}$ に対して，$\mathbb{C}^{n-1}$ の開集合 $U(w', \xi')$ を $U(w', \xi') = \{ z' \in \mathbb{C}^{n-1} ; \operatorname{Im} \Phi(w'-z', \xi') > -(\operatorname{Re} \Phi(w'-z', \xi'))^2 \}$ により定義する．$\mathring{\xi}' \in S^{n-2}$ と $s, r > 0$ に対して，

$$V(\mathring{\xi}', s, r) = (B_R)_s \cap \operatorname{int} \Big( \bigcap_{(w', \xi') \in K_r} U(w', \xi') \Big),$$

$K_r = \{ (w', \xi') \in \mathbb{C}^{n-1} \times S^{n-2} ; |w'| \leqq r,\ |\mathring{\xi}' - \xi'| \leqq r \}$ とおく．$V(\mathring{\xi}', s, r)$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ の多項式凸な開集合である．

命題 9．$f(x)$ は台が $\mathring{B}_R$ に含まれる $N$ 上の $F$-mild 超函数とすると，次の (i) ～ (iii) は同値である：

(i) $(0, \sqrt{-1}\,\mathring{\xi}') \notin p\text{-}SS(f)$

(ii) 任意の $s > 0$ に対しある $r > 0$ が存在して，$f(x_1, \cdot)$ は $F'(V(\mathring{\xi}', s, r))$-値の正則函数として，$x_1 = 0$ のある複素近傍へ解析接続される．

(iii) ある $s, r > 0$ が存在して，$f(x_1, \cdot)$ は $F'(V(\mathring{\xi}', s, r))$-値の正則函数として，$x_1 = 0$ のある複素近傍へ解析接続される．

この命題の証明には，命題 8 の証明で用いた $\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle$ の具体的表示と，$\delta$ 函数の曲面波分解の公式を用いる．詳しくは [ 9 ] の Prop. 8 の証明を参照されたい．

## §4. Fuchs型偏微分方程式に対する境界値問題.

$D_j = \partial/\partial x_j$ , $D = (D_1, D_2, \cdots, D_n) = (D_1, D')$ , $D' = (D_2, \cdots, D_n)$ という記号を用いる. $P$ を $\mathring{x} = (0, \mathring{x}') \in N$ の $M$ における近傍で定義された（複素数値）実解析函数を係数とする線型偏微分作用素とする. $P$ が $N$ に関して weight $(m-k)$ の Fuchs型作用素であるとは, $P$ が $0$ とならない実解析函数倍を除いて次の様に書けることである (cf. Baouendi-Goulaouic [ ]);

$$P = x_1^k D_1^m + A_1(x, D') x_1^{k-1} D_1^{m-1} + \cdots + A_k(x, D') D_1^{m-k} + A_{k+1}(x, D') D_1^{m-k-1} + \cdots + A_m(x, D');$$

ここで, (i) $k, m$ は $0 \leqq k \leqq m$ なる整数,

(ii) $1 \leqq j \leqq m$ のとき, $A_j(x, D')$ の階数は高々 $j$,

(iii) $1 \leqq j \leqq k$ のとき, $A_j(0, x', D')$ の階数は $0$ (i.e. 函数).

$A_j(0, x', D') = a_j(x')$ $(1 \leqq j \leqq k)$ とおいて $\mathcal{C}(\lambda, x')$ を

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x')\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + a_k(x')\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$

により定義する. $\mathcal{C}(\lambda, \mathring{x}') = 0$ の根を $\lambda = 0, \cdots, m-k-1$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ （重根は重複度の数だけ並べる）と書き, $P$ の $\mathring{x}$ における特性指数と呼ぶ. Fuchs 型という概念や特性指数は, 座標系によらず $N$ のみから定まるので, 一般に $M$ の実解析的超曲面に対して定義されることを注意しておく. (cf. [1])

<u>定理1</u>. $\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z} ; \nu \geqq m-k\}$ $(j = 1, \cdots, k)$ と仮定

する．$u(x)$ は $\mathring{x}$ の近傍で定義された F-mild 超函数で，$(\mathring{x}, \sqrt{-1}\mathring{\xi}') \notin p\text{-}SS(\mathcal{P}u)$，$(\mathring{x}, \sqrt{-1}\mathring{\xi}') \notin SS(D_1^j u(+0, x'))$ $(0 \leqq {}^\forall j \leqq m-k-1)$ とする．($\mathring{\xi}'$ は $S^{n-2}$ の点.) このとき，$(\mathring{x}, \sqrt{-1}\mathring{\xi}') \notin p\text{-}SS(u)$ が成立する．

証明．$R>0$ を十分小さくとって，$B_R \cap N$ の各点における $P$ の特性指数が定理の条件をみたすとしておく．(最初から $\mathring{x}=0$ としておいてよい．) $\mathring{\mathcal{B}}^F$ の softness により，$\operatorname{supp} v \subset \mathring{B}_R$ なる $\mathring{\mathcal{B}}^F(N)$ の元 $v$ で $0$ の近傍で $v(x)=u(x)$ をみたすものが存在する．$g(x) = \mathcal{P}v(x)$ とおくと，$g(x_1, \cdot)$ は $0 \leqq x_1 < {}^\exists\varepsilon$ の複素近傍での $F'(V(\mathring{\xi}', s, r))$-値の正則函数に接続される．$v_j = D_1^j v(+0, x') \in \mathcal{A}'(B_R) \cap F'(V(\mathring{\xi}', s, r))$ $(j=0, \cdots, m-k-1)$ とみなせる．$V(\mathring{\xi}', 2s, r/2) \supset V(\mathring{\xi}', s, r)$ なので，$V(\mathring{\xi}', 2s, r/2) \supset V(\mathring{\xi}', s, r)_\delta$ なる $\delta > 0$ をとれる．Baouendi-Goulaouic [1] の Theorem 3 により (そこでは $\mathbb{R}^{n-1}$ の部分集合の場合に書いてあるが，その証明は $V(\mathring{\xi}', s, r)$ の場合にもそのまま通用する)，$x_1 = 0$ の複素近傍で定義された $F'(V(\mathring{\xi}', s, r)_\delta)$-値正則函数 $\tilde{v}(x_1, \cdot)$ が存在して，

$$\mathcal{P}\tilde{v} = g, \qquad D_1^j \tilde{v}(0, \cdot) = v_j \quad (0 \leqq j \leqq m-k-1)$$

をみたす．このような $\tilde{v}$ は一意的なので，$v(x_1, \cdot) = \tilde{v}(x_1, \cdot)$ は $F'(V(\mathring{\xi}', 2s, r/2))$-値の正則函数として

$x_1 = 0$ の近傍へ接続される．従って，命題9により，
$(0, \sqrt{-1}\mathring{\xi}') \notin p\text{-}SS(v)$ 即ち，$(0, \sqrt{-1}\mathring{\xi}') \notin p\text{-}SS(u)$ が成立する．（証了）

<u>系</u>．$\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z}; \nu \geqq m-k\}$ $(1 \leqq {}^\forall j \leqq k)$ とする．$u(x)$ を $\mathring{x}$ の近傍で定義された F-mild 超函数で，$Pu(x) = 0$，$D_1^j u(+0, x') = 0$ $(0 \leqq {}^\forall j \leqq m-k-1)$ をみたすとすると，$\mathring{x}$ の近傍で $u(x) = 0$ が成立する．

証明．定理1により，$p\text{-}SS(u) \cap \pi_N^{-1}(\mathring{x}) = \phi$ を得るから，$u(x)$ は $x_1 = 0$ の $M$ における近傍で実解析的となる．Fuchs型方程式に対する Cauchy-Kowalevsky の定理（[10]）により $u(x) = 0$ を得る．

最後に境界値問題の局所可解性に関する定理を述べよう．$P$ は前と同様として，その主シンボルを $p_m(x, \sqrt{-1}\xi)$ で表わす．

<u>定理2</u>．ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$P$ は $\{x \in \mathring{M}_+; |x-\mathring{x}| < \varepsilon\}$ で $x_1$ 方向に弱双曲型，即ち，$x \in \mathring{M}_+$，$|x-\mathring{x}| < \varepsilon$，$\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$，$\mathrm{Re}\,\zeta_1 \neq 0$ のとき，$p_m(x, \zeta_1, \sqrt{-1}\xi') \neq 0$ であるとする．また，$\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z}; \nu \geqq m-k\}$ $(1 \leqq j \leqq k)$ を仮定する．以上の条件の下で，任意の $f(x) \in \mathring{\mathcal{B}}F_{\mathring{x}}$ と任意の $v_0(x'), \cdots, v_{m-k-1}(x') \in \mathcal{B}_{N,\mathring{x}}$ 達に対して，

$$Pu(x) = v(x), \quad D_1^j u(+0, x') = v_j(x') \quad (0 \leqq j \leqq m-k-1)$$

をみたす $u(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F_x$ が unique に存在する.

この定理の証明には Fuchs 型方程式に対する Cauchy-Kowalevsky の定理と柏原-河合[3]による解析接続の論法を用いるが, 詳細は別の機会に譲る. (田原[10]を参照.)

## 文献

[1] Baouendi, M.S. and Goulaouic, C., Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), 455-475.

[2] 金子晃, 超函数入門, 上. 東京大学出版会, 1980.

[3] Kashiwara, M. and Kawai, T., Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 359-404.

[4] Kataoka, K., On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981), 331-413.

[5] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems I, Ibid. 27 (1980), 355-399.

[6] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems II, Ibid. 28 (1981), 31-56.

[7] Kataoka, K., Some properties of mild hyperfunctions and an application to propagation of micro-analyticity in boundary value problems, Ibid.30 (1983), 279-297.

[8] Komatsu, H. and Kawai, T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS 7 (1971), 95-104.

[9] Ôaku, T., F-mild hyperfunctions and Fuchsian partial differential equations, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

(Group representations and systems of differential equations).
[10] Tahara, H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math. 5 (1979), 245-347.