数理解析研究所講究録
第535巻 1984年 57-60

$\mathbb{CP}_2$ 上の rank 3 の微分方程式

九大 理　吉田正章(Masaaki YOSHIDA)

§1　$X=\mathbb{CP}^2$ 上定義された 線型，Fuchs 型，解空間の次元 (rank) 有限なる 偏微分方程式系 を考える。

定義 "よい" 方程式とは，上記の様な方程式でかつ

(1) Orbifold-uniformizing differential equation (OUDE) で，

(2) Accessory parameter free で，

(3) irreducible であるものを言う。

ここで，上で使った言葉を簡単に説明する.

Obifold とは 多様体 X と分岐曲線 C_i と分岐指数 b_i の組のことである。これを (X, b) と書くことにする.

OUDE：方程式 (E) が orbifold (X, b) の OUDE であるとは，M を (X, b) の universal uniformization (i.e. C_i 上 b_i 次の分岐をする最大の分岐 covering) としたとき projection $: M \to X$ の逆写像が (E) の解の組になっていること。

Acc. par. free：方程式が特異点のまわりの local behavior で定ってしまうこと。

Irred.：対応する vector bdle が階数の低いものの直和に分解しないこと。Reducible のことをここでは"自明"と呼ぼう.

§2　前節をよりよく理解する為に $X = \mathbb{CP}_1$ のときを復習しよう。

分岐点の数	(X, b)	OUDE	M	判定
1ヶ	un-uniformizable	なし	なし	"だめ"
2ヶ	$b_0 = b_1 (= b)$ のときだけ uniformizable	$w'' + \frac{1 - 1/b^2}{x^2} w = 0$ 解はベキ函数	$\mathbb{CP}_1$	"自明"
3ヶ	b_0, b_1, b_∞ 任意	Gauß HGDE $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$		
	$1/b_0 + 1/b_1 + 1/b_\infty > 1$	$b_0 = 1/\lvert 1-\gamma \rvert$	$\mathbb{CP}_1$	"よい"
	〃 $= 1$	$b_1 = 1/\lvert \gamma - \alpha - \beta \rvert$	$\mathbb{C}$	
	〃 < 1	$b_\infty = 1/\lvert \alpha - \beta \rvert$	D	
$\geqq 4$	b_j 任意	Acc. par. あり	D	"むず" ↑ むずかしいの略

要するに 一次元のときは，Gauß HGDE（hypergeometric differential equation）だけが"よい"方程式で，あとは，"自明"か"むず"となる。

§3　二次元のときは，分岐点でなく曲線になるので，だめ，自明，よい，むず の区別が，点の数という訳にはゆかない。

だめな例：　非特異 r 次曲線と b（イト）等.

自明な例：　$xyz = 0$　等々.

問題 "よい"方程式をみつけて 研究せよ.

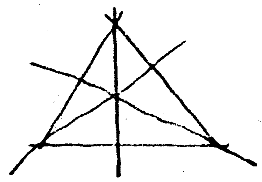
現在までに知られている"よい"方程式と 対応する orbifold を報告する. Rank = 3 でなくてはならない。方程式の形は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_1^2 P_{ij}^k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} + P_{ij}^0(x) w \qquad i,j=1,2$$

となる. 係数は有理式. $P_{ij}^0(x)$ は $P_{ij}^k(x)$ で定る. P_{ij}^k の分子の次数は分母の次数より少くとも1つ小さい。$P_{ij}^k(x)$, $i,j,k=1,2$ の共通分母を $F(x)$ とおく.

[1] 完全四辺形 $F(x) = xy(x-1)(y-1)(x-y)$.

OUDE は Appell の2変数超幾何微分方程式 F_1 といわれているものになる. これは, Picard, 寺田俊明, 志賀弘典, 佐々木武, Deligne, Mostow 等により研究され, ほぼ完成した. 今や有名だろうと思う。



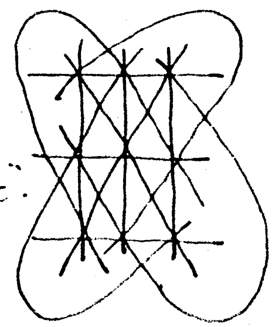
[2] Hessian configuration

$$F(x) = xy \prod_{\nu,\mu=0}^{2} (\omega^\nu x + \omega^\mu y + 1) \qquad \omega = 1^{1/3}$$

$$= xy\left((x^3+y^3+1)^3 - 27x^3y^3\right)$$

Hessian group G_{216} 不変.

OUDE は発見されたが, くわしい研究まだ.



[3] Kleinian configuration.

$F(x)$: klein の単純群 G_{168} ($\cong PSL(2, F_7)$) の21次の反不変式.

OUDE は研究集会の講演の時は計算途中であったが, 10日後に, みつかった。

注意. [2] と [3] は, HIRZEBRUCH の計算と, Yau-宮岡の定理により, §1 の条件 (1) をみたす OUDE の存在は理論的に分っていた。方程式をみつける (access.par free でなかったらみつからないはず) のに手間取った訳である.

今後 よい方程式 をもっとみつけて, くわしく調べたい。最後に, "むず" な方程式は, 存在は予想されているものの (候補あり), 未だ explicit に書き下すに至ってない。

終

告白 : 九大理 数学教室 の 宇加治靖子氏に 深く感謝する。 彼女の助力なくして計算は完成しなかったであろう.