

## 2山 map の分岐.

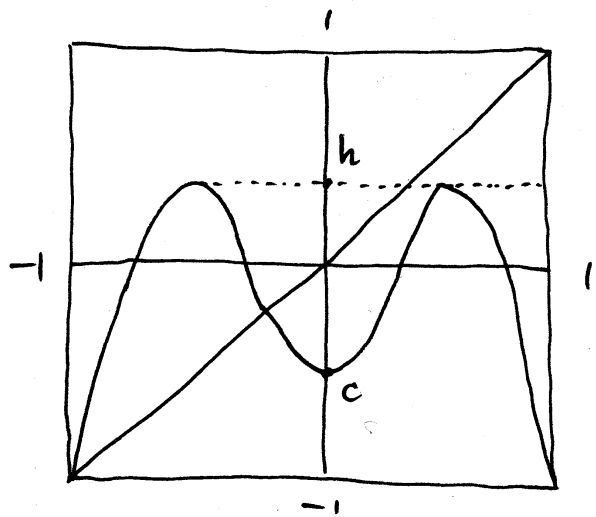
北大. 理. 三波 篤郎.

区間上の unimodal map の 1-parameter family  $\{f_\mu\}$  に対して.  $\mu$  の変化とともに.  $f_\mu$  が  $z$  のような周期の stable periodic point を持つかを見ることができ.  $z$  には self-similar な構造がみられる. これは. symbol 列の  $\ast$ -product によって表現される ( [C-E] . III.1, II.2, II.4 など を参照 )

ここでは. 1次元 map の 2-parameter family に対して. 各周期の (super) stable な periodic pt. を持つ branch が parameter sp. (2-plane になる) 上で  $z$  のように分布しているかを計算機によって調べた結果を述べ. これに対して. symbolic な解析を行なう.

### §. 1. 計算結果.

$I = [-1, 1]$  上の 2-parameter family とし. 右図のような 2山 の map を考える.



$-1 \leq h \leq 1$  と  $-1 \leq c \leq h$  が parameter (パラメータ).

この family を  $\{f_{c,h}\}$  とする.

$f_{c,h}(x)$  に対し.

(i) 偶関数 i.e.  $f_{c,h}(x) = f_{c,h}(-x)$

(ii)  $f_{c,h}(-1) = f_{c,h}(1) = -1$

という条件をつけ、さらに 4次関数であるとする.

この family は unique に定まる.

具体的には.

$$f_{c,h}(x) = (-1-c-b)x^4 + bx^2 + c$$

$$b = 2(h-c) + 2\sqrt{(h-c)(h+1)}$$

である.

これを standard family とする.

$I = [-1, 1]$  上の map  $f$  の  $n$ -周期点  $p$  は.

$df^n/dx(p) = 0$  とするとき super stable とする.

(これは  $p$  の orbit が 特異点を通ることを意味する.)

standard family の parameter sp.  $(c, h)$ -plane

上に, super stable な 2-周期, 3-周期

4-周期, 5-周期点を持つ branch を書く.

それぞれ  $\boxtimes 1 \sim \boxtimes 4$  のようになる.

### 注意

(i) この  $\boxtimes$  では、都合により、 $h$  は下が大きくなる.

また、 $c \leq h$  という条件から.

$c > h$  の部分は書かなくてよい.

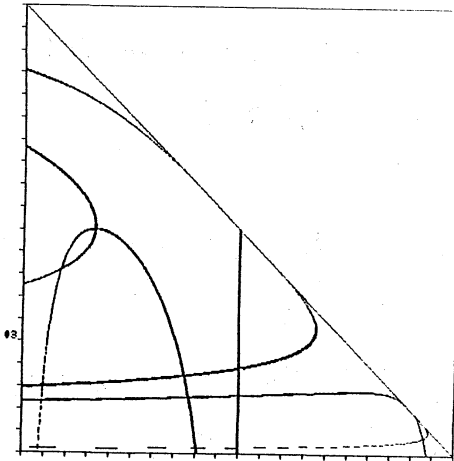


図 1

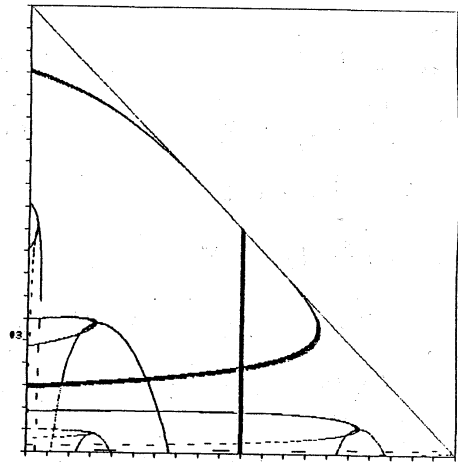


図 2

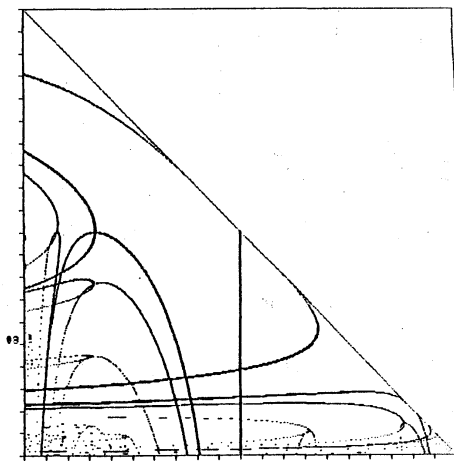


図 3

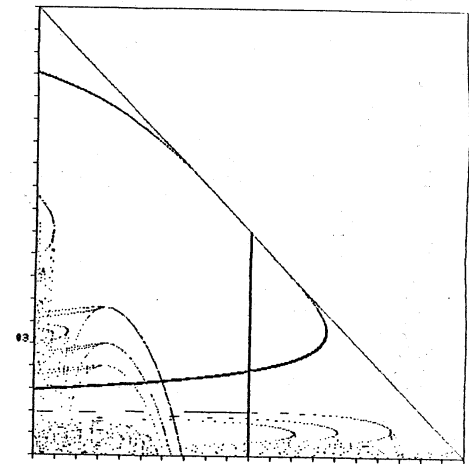
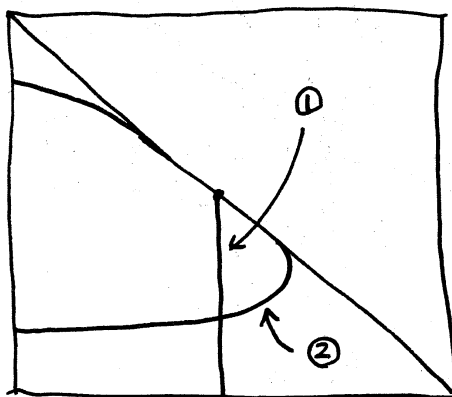


図 4

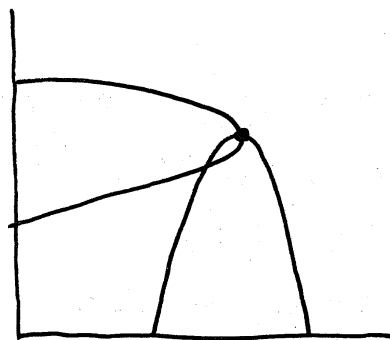
- (ii) 対角線は、ただの目印であり branch ではない。
- (iii)  $c=h$  では、super stable  $n$ -周期点と言った時、
- (a)  $f_{c,h}^n(p) = p$       (b)  $df_{c,h}^n/dx(p) = 0$
- をみたす  $p$  が存在するような (実際は、  
3つの頂点のうち2つが (a) をみたすような)  
(c, h) を plot して113. つまり、 $n$  は、

最小周期とは限らず、その新数の周期に対応する branch も書かれています。

(iv) 図の中に共通して現われる、右図のようなたての line ① と、  
 曲線 ② は、ともに super stable fixed pt. を表わしています。



さて、二つの図における特徴的な構造は、  
 右図のような、たてと横の parabola のような curve が頂点付近で交わったような 11°ターンで構成されています。



実は、この 11°ターンは、二つでワンセットと考えてもよい。  
 というのは、たての parabola は 極小 (i.e. 0) を通って super stable periodic pt. a branch, また横の parabola は 極大を通りものであって、この頂点付近の交点にあたり (c.h.) に対して f<sub>c,h</sub> は、極大と極小をそれぞれ 1 回づつ通ったような super stable periodic point を持つものである。(つまり 2 重に singular である)  
 (注: 頂点ではない交点では、2 つの異なる super stable periodic pt. を同時に持つ。) )

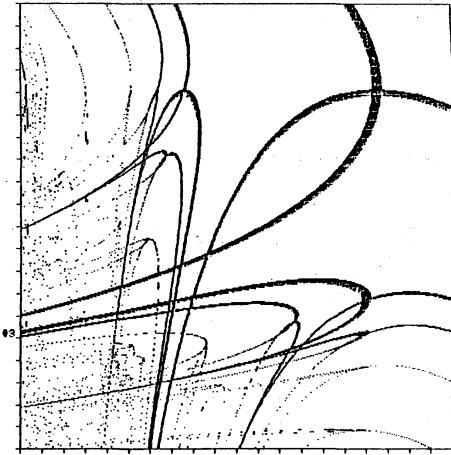


図 5

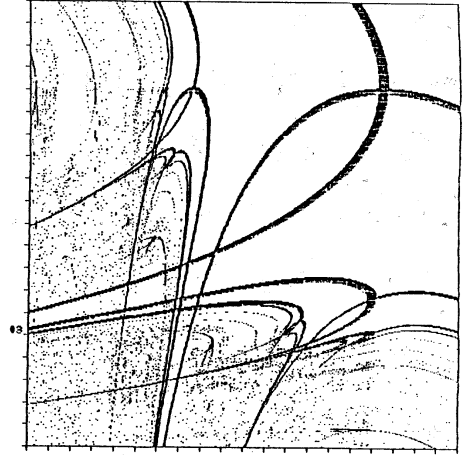


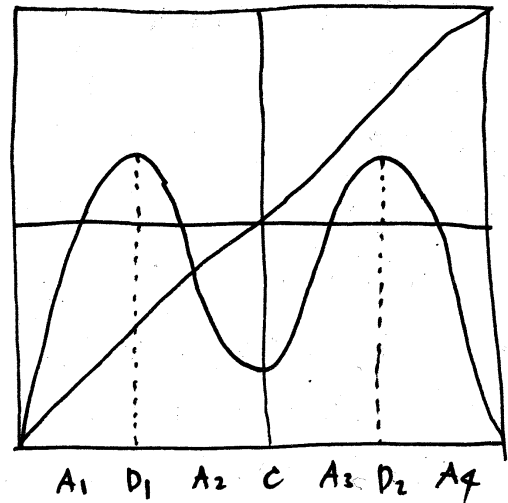
図 6

この 11°9-7 は 2つの分岐に対して どのような構造を  
 持つのだろうか。 それを調べたのが上の 図 5  
 と 図 6 である。 これは、図 1 の 2-周期点を  
 示す branch の 2つの parabola の 交点付近を  
 周期  $\delta \approx 16$  の case で拡大したものである。  
 明らかに self-similar な構造が見られるが。  
 それが常に、たてと横の両方向に対して存在  
 している。

§. 2 Symbolic analysis

右図のような記号を  
 使う事に可了。

中心が  $C$ 、2つの極大が  
 $D_1, D_2$ 、これを区切った  
 区間が  $A_1 \sim A_4$ 。



前記の計算結果より、2重に singular な periodic point が本質的である事が示された。実は、 $\varepsilon$  のまわりでの perturbation により local に  $f_{c,h}^n$  ( $n$  は周期) が 2山 map となるのである。

また、super stable periodic pt を示す branch は、必ず  $\varepsilon$  の 2重に singular な点に つながって居る。

(i.e. 例の 2つの parabola の intersection の一部と成る)

(注: 対角線に接して居る branch はこうなっていないか。

$\varepsilon$  は特別である。: 対角線では unimodal と成って居る)

また、similarity がたてと横の 2方向に存在して居る事から、\* - product は 2種類定まらされる事が予想される。

以下、抽象的な symbol 列の話になるが、この  $A$ - $\beta$  は、具体的な map を考えて居る。

Definition  $A_i, D_i, c$  の有限列が doubly critical とは、 $D_1$  or  $D_2$  と  $c$  とがそれぞれ 1つずつ含む事をいう。

Definition  $\varepsilon_i = \text{sgn}(A_i) = \begin{cases} 1 & i=1, 3 \\ -1 & i=2, 4 \end{cases}$

$A = A_{j_1} \dots A_{j_\ell} c A_{i_1} \dots A_{i_k} D_l$  が doubly critical sequence とする。

$A$  に対し、map  $\tau_A^c : \{A_i, D_i, c\} \rightarrow \{\text{sequence 全体}\}$  を次のように決めた。

$$\tau_A^c(x) = \alpha x A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta x A_{j_1} \dots A_{j_\ell} \\ = = \tau.$$

$$\alpha x = \begin{cases} (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_2 & x = A_1, D_1, A_2 \\ c & x = c \\ (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_3 & x = A_3, D_2, A_4 \end{cases}$$

$$t_c \neq c. \quad (-1)_c A_2 = A_3, \quad (-1)_c A_3 = A_2$$

$$\beta x = \begin{cases} (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_2 & x = A_1, A_4 \\ D_1 & x = D_1, D_2 \\ (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_1 & x = A_2, c, A_3 \end{cases}$$

$$t_{D_1} \neq c. \quad (-1)_{D_1} A_1 = A_2, \quad (-1)_{D_1} A_2 = A_1$$

Definition

sequence  $B = B_1 B_2 B_3 \dots$  (に対して)  $*$ -product

$A *_c B$  は 次のように決まる.

$$A *_c B = \tau_A^c(B_1) \tau_A^c(B_2) \tau_A^c(B_3) \dots$$

(注)  $c$  の定数は  $c=0$  のまわりで  $f^{l+k+2}$  を考慮するに  
よって natural に得られるものである.

なお  $D_2$  は必ず doubly critical seq. である. 同様にできるが  
ここでは  $D_1$  の case のみ扱う.

次に  $D_1$  のまわりの local interval の iteration を考慮するに  
よって  $\tau_A^{D_1} : \{A_i, D_i, c\} \rightarrow \{\text{seq.}\}$  は 次のように  
定まる.

$$\tau_A^{D_1}(x) = \alpha x A_{j_1} \dots A_{j_2} \beta x A_{i_1} \dots A_{i_k}$$

$$\alpha x = \begin{cases} (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_2 & x = A_1, D_1, A_2 \\ D_1 & x = c \\ (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_1 & x = A_3, D_2, A_4 \end{cases}$$

$$\beta x = \begin{cases} (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_2 & x = A_1, A_4 \\ c & x = D_1, D_2 \\ (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_3 & x = A_2, c, A_3 \end{cases}$$

さしに. 前と同様に  $*\text{-product}$   $A *_D B$  が定めて了.  
次に order を定めて了.

order は 最後が  $D_i$  or  $C$  のとき  $A_i$  の有限列  
か.  $A_i$  の無限列 に対してのみ定めて了. これは.

2山 map の 2-parameter family で.  $\{h=1\}$ ,  $\{c=-1\}$   
の line 上でのみ order が定まる事に対応しては.

また. この line 上では. 実際は symbol の order と同じ  
に並んで 11子 のように見える.

### Definition

$B \geq F$  とき.  $D_i$  or  $C$  で 終る  $A_i$  の有限列か  
 $A_i$  の無限列 とす. order  $B < F$  とき

次のように決めた.  $B_1 \dots B_{k-1} = F_1 \dots F_{k-1}$  であり

$B_k \neq F_k$  のとき.

$B < F \iff \begin{cases} B_1 \dots B_{k-1} \text{ が positive とき } B_k < F_k \\ \phantom{B_1 \dots B_{k-1}} \phantom{\text{が}} \phantom{\text{positive とき}} \phantom{B_k} > F_k \\ \phantom{B_1 \dots B_{k-1}} \phantom{\text{が}} \phantom{\text{positive とき}} \phantom{B_k} < F_k \\ \phantom{B_1 \dots B_{k-1}} \phantom{\text{が}} \phantom{\text{positive とき}} \phantom{B_k} > F_k \end{cases}$

ただし.  $A_i, D_i, C$  の order は. natural なるもの

さしに.  $A_i$  の列が positive ときは. この sign の積が  
正 (負) となる事.

さて.  $B = B_1 \dots B_{n-1} D_1$  とす.

$$A *_C B = \tau(B_1) \tau(B_2) \dots \tau(B_{n-1}) \tau(D_1)$$

となる.  $B_i = A_{i_1} \dots A_{i_r}$  なる  $\tau(B_i)$  は  $D_i, C$

を含まず.  $\tau(D_1) = \alpha_{D_1} A_{j_1} \dots A_{j_k} D_1 A_{j_1} \dots A_{j_k}$

となる. ( $= \tau$ .  $\tau \geq 1$  は  $\tau_A^c$  の  $= \tau$ )

よって.  $A *_C B$  に対し  $D_1$  が最後に なるように rotate  
したものを  $(A *_C B)_{D_1}$  とかく. すると.

$$(A *_C B)_{D_1} = A_{j_1} \dots A_{j_k} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) \alpha_{D_1} A_{i_1} \dots A_{i_r} D_1$$



同様に B が  $D_2$  で終り時

$$(A *_c B)_{D_2} = A_{j_1} \dots A_{j_r} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) \alpha_{D_2} A_{i_1} \dots A_{i_k} D_2 \geq \text{or}$$

$B = B_1 \dots B_{n-1} c$  の時.  $c$  が最後にたよりに  $A *_c B$  を  $A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta c A_{j_1} \dots A_{j_r}$  たい shift  $L$ .

$$(A *_c B)_c = A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta c A_{j_1} \dots A_{j_r} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) c \geq \text{or}$$

同様に  $A *_c B$  に対して  $(A *_c B)_{D_1} \geq (A *_c B)_c$  定まり.

より  $*_c$  は order preserving であり.  $*_{D_1}$  は order reversing である事が示せる. となす.

Theorem

$E, F \in D_i, c$  で終り  $A_i$  の seq. であつて  $E < F$  とす.

(i)  $E, F$  が  $D_i, D_j$  で終りなす.

$$(A *_c E)_{D_i} < (A *_c F)_{D_j}$$

$$(A *_c E)_{D_i} > (A *_c F)_{D_j}$$

(ii)  $E, F$  がともに  $c$  で終りとき

$$(A *_c E)_c < (A *_c F)_c$$

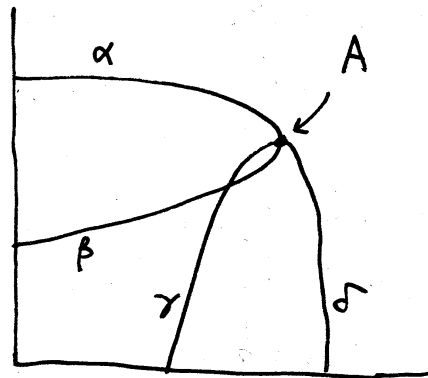
$$(A *_c E)_c > (A *_c F)_c$$

parabola の similar な構造は.

二つの  $*$ -product によつて

次のように説明できる.

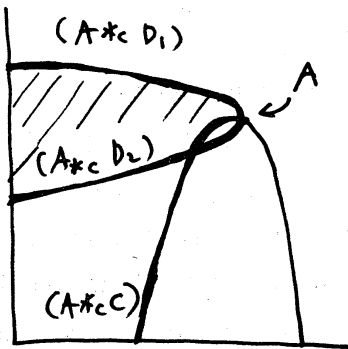
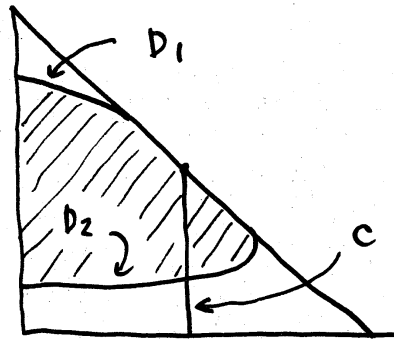
doubly critical な  $A$  の交点とす. 2つの parabola の  $A$  で分割されて 11 の curve を右図のように.



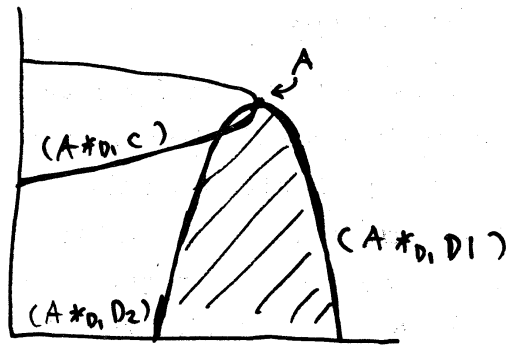
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是  $S$  の curve における  
 super stable periodic pt. 是 表わす seq. 17 次  
 ように なって いる。

$$\begin{aligned} \alpha &= (A * c D_1) D_1 \\ \beta &= (A * c D_2) D_2 = (A * D_1 c) c \\ \gamma &= (A * D_1 D_2) D_2 = (A * c c) c \\ \delta &= (A * D_1 D_1) D_1 \end{aligned}$$

是 是. diagram a 中 の  
 例 a super stable fixed pt.  
 是 示す branch 是. 是 是 a  
 \*-product に よる うつた 是  
 所 是 示して いる. (下 図)



$A * c$



$A * D_1$

是 是に. Theorem 5.1. 是 是 a \*-product 是. 上 の  
 $D_1, D_2$  branch 是 囲まれた 基本領域 是. 上 図 右 左  
 の ように. うつして いる ように 思 是 是.

Reference

[C-E] Collet - Eckmann : Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics. Birkhäuser.