数理解析研究所講究録
第541巻 1984年 53-72

一階単独準線形方程式のある解法について

広島大・理　宮川　鉄朗　(Tetsuro Miyakawa)

外力項を伴う一階準線形保存型方程式の初期値問題

$$(\mathrm{M}) \quad \begin{cases} u_t + \sum_i A^i(x,t,u)_{x_i} + B(x,t,u) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n,\ t>0) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

を考える。A^i, Bは後に(§1で)述べる条件を満たす関数である。周知のように([9]参照)初期値問題(M)は、関数A^i, Bや初期値u_0がいかになめらかであっても、一般に解はなめらかにはなり得ず、従って、(M)を解くには解の概念を一般化しなければならない。最も素朴な一般化の方法は、いわゆる弱解を考えること，すなわち(M)の方程式をdistributionの意味で満たす関数uを解と呼ぶことであるが、一方、弱解の範囲で(M)を考えると、解の一意性が破れることが知られている([9])。
そこで、何らかの基準を設けて、数ある弱解の中から唯一つの解をえらび出さねばならないのであるが、普通には次のような方法が用いられる：(M)の方程式の右辺に、人為的な粘性項$\nu\Delta u$ (Δ = Laplace作用素)を加えて、放物型初期値問題：

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} u_t + \sum_i A^i(x,t,u)_{x_i} + B(x,t,u) = \nu \Delta u \\ \qquad\qquad\qquad u|_{t=0} = u_0 \end{cases}
$$

を考え、この問題の一意可解性を示し，$\nu \downarrow 0$のときの極限として得られる関数を(M)の解と呼ぶ。実際 Kružkov [8] は、この方法を用いて次の結果を得た。

定理([8]) $\forall u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$に対し、下記の(i)-(iii)の意味で(M)を満たす関数$u(x,t)$が$\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$上で一意に存在し、それは，$\nu \downarrow 0$のときの(P)の解の極限として得られる：

(i) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, $\forall T > 0$. (ii) $u(\cdot,t) \to u_0$ $(t \downarrow 0)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\forall k \in \mathbb{R}^1$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $\phi \geq 0$ に対し、不等式

$$
(\mathrm{E}) \qquad \int_0^\infty\!\!\int |u-k|\phi_t \, dxdt + \sum_i \int_0^\infty\!\!\int \mathrm{sgn}(u-k)[A^i(x,t,u) - A^i(x,t,k)]\phi_{x_i} \, dxdt
$$

$$
- \int_0^\infty\!\!\int \mathrm{sgn}(u-k)\phi\Big[\sum_i A^i_{x_i}(x,t,k) + B(x,t,u)\Big] dxdt \geq 0
$$

が成り立つ。ここに，$\mathrm{sgn}(y) = y/|y|$ $(y \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

(M)の形の方程式は，流体力学において、(連続体としての)理想流体の方程式として登場する。一方実在の流体は多かれ少なかれ、粘性を伴っており、(P)の方程式は、(連続体としての)粘性流体の方程式のモデルと考えられる。理想流体なるものは、実在の流体に働く粘性力を無視して得られる概念であるから、(M)の解の上述の構成法（粘性消滅法）は、物理的には

自然な方法である。我々は、このような流体の運動とのアナロジーをさらに一歩進めて、次のような観点から、(M)の解の構成を考える。流体の運動を記述するのに二つの立場がある。一つは、流体を離散的な分子の集合と見る立場であり、いま一つは、流体を連続体として扱う立場である。前者では系の状態は、一個の分布関数 $f(x,\xi,t)$ で表現され、f の時間発展は、Boltzmann方程式で記述される。($\xi\in R^n$ は、時刻 t において場所 x を占める様々な気体分子の速度を表わす。)
f の ξ に関するモーメントを考えることにより、連続体としての流体の状態変数の近似値が得られる。例えば、

$$\int f\,d\xi = 密度, \qquad \int \xi^i f\,d\xi = 運動量$$

等々。これらの近似値の「精度」を上げるには、Boltzmann方程式に含まれるパラメータ(平均自由行路)を0に収束させて、離散的描像から連続的描像へと移行すればよい。(以上の事柄の詳細については、Harris [5]を見られたい。)

我々は、初期値問題(M)を、連続体としての理想流体のモデル方程式と見なし、対応する「離散モデル」の方程式として、(非線形のBoltzmann方程式の代わりに)次の線形初期値問題を考える。

$$(m)\quad \begin{cases} f_t + \sum_i (a^i(x,t,s)f)_{x_i} + b(x,t,s)f = c(x,t,s) \\ \qquad\qquad f|_{t=0} = f_0(x,s). \end{cases}$$

ここに、 $a^i(x,t,s)=\partial A^i(x,t,s)/\partial s,\qquad b(x,t,s)=\partial B(x,t,s)/\partial s.$

$$c(x,t,s)=F(C(x,t),s).$$

$$C(x,t)=-\sum_i A^i_{x_i}(x,t,0)-B(x,t,0).$$

$$F(w,s)=\begin{cases}1 & (0<s\leq w)\\ -1 & (w\leq s<0).\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}$$

次の(D), (C)は、容易に分かる。

$$\text{(D)}\qquad w=\int F(w,s)\,ds.\qquad (\forall w\in\mathbb{R}^1).$$

$$\text{(C)}\qquad\begin{cases}A^i(x,t,w)-A^i(x,t,0)=\int a^i(x,t,s)F(w,s)\,ds\\ B(x,t,w)-B(x,t,0)=\int b(x,t,s)F(w,s)\,ds.\end{cases}$$

(D)において、$w=u_0(x)$ とおけば、(M)の初期値 u_0 が $F(u_0(x),s)$ なる「成分」に分解されることがわかる。このことと(C)より、f を初期条件 $f|_{t=0}=F(u_0(x),s)$ の下での(m)の解とすれば、関数 $\int f\,ds$ が、$t=0$ で(形式的にではあるが)(M)を満たすことがわかる。このことに注目して、(M)の近似解 $u_h(x,t)$, ($h>0$ 定数)を、以下のように定める。f を「初期条件」 $f|_{t=\tau}=F(u_0(x),s)$ を満たす(m)の解として、

$$K(t,\tau)u_0=\int f(x,s,t)\,ds\qquad (t\geqq\tau).$$

$$u_h(x,t)=K(t,h[t/h])\prod_{j=1}^{[t/h]}K(jh,(j-1)h)u_0.$$

$([\cdot]$: Gauss 記号$)$

このとき、次の結果が成り立つ。

定理１　$\forall u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$に対して，$t \geqq 0$について広義一様に，

$$L^1_{loc}\text{-}\lim_{h \downarrow 0} u_h(\cdot, t) \equiv u(\cdot, t) \in C([0,\infty) : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T)),$$

$(\forall T>0)$が存在し、uは(M)の(Kružkovの意味の)解である。

証明の概略は§1で述べる。詳細については[3], [4], [10]を参照されたい。なお、[6], [7]も見られたい。この定理において，関数Fは，(M)と(m)とを媒介するだけでなく、流体の運動とのアナロジーで言えば，「気体分子の衝突効果」(Boltzmann方程式の非線形項の持つ効果)をも担っている。このことは、§2の議論によって，より明らかになるであろう。また$h \downarrow 0$なる極限移行は，上述の、「平均自由行路→0」なる極限移行に該当するものである。

定理１は、理想流体のモデルである初期値問題(M)を扱っているという意味で，Boltzmann方程式の理論における"Euler limit"に相当する(Harris [5]参照)。従って，次の問題として，"Navier-Stokes limit"に相当する事実、すなわち，放物型の問題(P)の解が同様の方法で得られるかどうかは，興味ある問題である。§2では，最も簡単な場合：

$$(\mathrm{P})_0 \qquad \begin{cases} u_t + \sum_i A^i(u)_{x_i} = \nu \Delta u \\ \qquad u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

についてこの問題を考える。線形方程式 (m) の代りに、衝突項を除いたBoltzmann方程式

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} f_t + \sum_i \xi^i f_{x_i} = 0 \\ f|_{t=0} = f_0(x,\xi) \end{cases}$$

を、また、関数 F の代りに、

$$F_\varepsilon(w,\xi) = \int_0^w \chi_\varepsilon(\xi - a(s))\,ds \quad (\varepsilon > 0)$$

を用いる。ここに、$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は、関数を regularize するのに用いられる普通の非負な radial function で、

$$\chi_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^n \chi(\varepsilon\xi), \quad a(s) = \{a^i(s)\}_{i=1}^n, \quad a^i = dA^i/ds$$

である。初期値 $F_\varepsilon(u_0(x),\xi)$ に対する (B) の解 f を用いて、

$$S_t u_0 = \int f(x,\xi,t)\,d\xi$$

とおく。次の結果が得られる。

<u>定理2 ([11])</u>　$(h/2n\varepsilon^2)\int |\xi|^2 \chi(\xi)\,d\xi \equiv \nu$ のとき、$\forall u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し、$t \geq 0$ について広義一様に、

$$L^1\text{-}\lim_{h \downarrow 0} S_h^{[t/h]} u_0 \equiv u(t) \in C([0,\infty) : L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$$

が存在し、u は $(P)_0$ の唯一つの弱解である。

<u>§1. 定理1の略証.</u> 以下，正数Tを固定して，初期値問題(M)を $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ で考える。関数 $A^i(x,t,s)$, $B(x,t,s)$ は，$\forall r>0$ に対して，$\mathbb{R}^n\times[0,T]\times[-r,r]$ 上有界連続とし，さらに次の仮定を満たすとする。($a^i=\partial A^i/\partial s$, $b=\partial B/\partial s$ である。)

(A.1) $\forall r>0$ に対し，a^i, $a^i_{x_j}$, $a^i_{x_jx_k}$ 及び b, b_{x_j} は，$\mathbb{R}^n\times[0,T]\times[-r,r]$ 上で有界連続。

(A.2) $C(x,t)=-\sum_i A^i_{x_i}(x,t,0)-B(x,t,0)$ 及び C_{x_j} は $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ 上で有界連続。

(A.3) 定数 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ が存在して，$\mathbb{R}^n\times[0,T]\times\mathbb{R}^1$ 上で，

$$\alpha\geqslant-\sum_i a^i_{x_i}-b,\qquad \beta\geqslant -b.$$

以上の仮定の下で，初期値問題(m)を考える。$c=0$ のときの(m)の解作用素を $\{U_s(t,\tau): 0\leq\tau\leq t\leq T\}$ とおけば，(m)の解は，

$$V_s(t,\tau)f_0=U_s(t,\tau)f_0+\int_\tau^t U_s(t,\sigma)c(\cdot,\sigma,s)d\sigma$$

従って，

$$K(t,\tau)u_0=\int V_s(t,\tau)f_0\,ds,\quad f_0(x,s)=F(u_0(x),s),$$

$$u_h(x,t)=K(t,h[t/h])\prod_{j=1}^{[t/h]}K(jh,(j-1)h)u_0.$$

により，近似解 u_h が与えられる。u_h の収束を示すには，その任意の部分列が，Kružkov [8] の意味での(M)の解に収束する部分列を含むことを示せばよい。そのために，u_h に

対するいくつかの評価を準備する。次の補題(とその系)が、最も基本的である。以下, $L^q(\mathbb{R}^n)$, $1\leq q\leq\infty$, のノルムを$\|\cdot\|_q$で表わす。

<u>補題1</u> $v\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$とし, $|v(x)|\leq r$, $|c(x,t)|\leq r$ ($x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,T]$)なる$r>0$をえらぶと,

$$\|K(t,\tau)v\|_\infty \leq e^{\alpha(t-\tau)}(1+t-\tau)r \quad (0\leq\tau\leq t\leq T).$$

<u>系1</u> $u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|u_0(x)|\leq r$, $|c(x,t)|\leq r$ ($x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,T]$)のとき, $R=re^{\alpha T}(1+T)$とおくと, $\forall h>0$に対して,

$$\|u_h(t)\|_\infty\leq R \qquad (0\leq t\leq T).$$

ここに, $u_h(t)=u_h(\cdot,t)$.

系1は補題1より直ちに従うから, 補題1の証明を述べる。(m)の解は次のように書ける.

$$[V_s(t,\tau)f_0](x,s)=f_0(y,s)\exp\left(-\int_\tau^t l(\sigma,s)\,d\sigma\right)$$
$$+\int_\tau^t c(\sigma,s)\exp\left(-\int_\sigma^t l(\sigma',s)\,d\sigma'\right)d\sigma.$$

ここに, $l(\sigma,s)=\sum_i a^i_{x_i}(z(\sigma),\sigma,s)+b(z(\sigma),\sigma,s)$, $c(\sigma,s)=c(z(\sigma),\sigma,s)$, であり、$z(\sigma)$は(m)の特性曲線で$z(t)=x$を満たすもの, $y=z(\tau)$である。$f_0(y,s)=F(v(y),s)$と, $r>0$のえらび方から,

$$e^{\alpha(t-\tau)}(1+t-\tau)F(-r,s)\leq V_s(t,\tau)f_0\leq e^{\alpha(t-\tau)}(1+t-\tau)F(r,s).$$

これを積分（sで）して結論を得る。

次に、$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$における評価を考える。L^1_{loc}がFréchet空間であるために生ずる煩雑さを避けるために，「重みの関数」$p_r(x)$, $r>0$ を導入する：$p\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p\geqq 0$, $\int p\,dx=1$ なる$p(x)$を任意に固定して，

$$p_r(x)=\int p(x-y)\exp(-\delta_r\Sigma_i|y_i|)\,dy$$

とおく。ここに，

$$\delta_r=\omega/M_r,\qquad M_r=\Sigma_i \sup\{|a^i(x,t,s)|:(x,t,s)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]\times[-r,r]\}$$

$\omega>0$は任意に固定した定数である。$u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_\infty\leqq r$, $|c(x,t)|\leqq r$ $(x\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T])$ とすれば，上記のM_rは，初期値問題(m)（ただし，$f_0=F(u_0,s)$）の解の伝播速度の最大値の上界を与えることに注意しておく。以下，$v\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$に対して，「重みつきの$L^1$－ノルム」

$$\|v\|_{1,r}=\|p_r v\|_1$$

を考える。

<u>補題2</u> $v, w\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|v\|_\infty\leqq r$, $\|w\|_\infty\leqq r$, $|c(x,t)|\leqq r$ $(x\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T])$ のとき，次が成り立つ。

(i) $$\|K(t,\tau)v\|_{1,r}\leqq e^{(\beta+\omega)(t-\tau)}\|v\|_{1,r}+\int_\tau^t e^{(\beta+\omega)(t-\sigma)}\|c(\sigma)\|_{1,r}\,d\sigma.$$

(ii) $\|K(t,\tau)v-K(t,\tau)w\|_{1,r} \leq e^{(\beta+\omega)(t-\tau)}\|v-w\|_{1,r}$.

ここに，$c(\sigma)=c(\cdot,\sigma)$.

系2　$u_0, v_0 \in L^\infty(R^n)$, $\|u_0\|_\infty \leq r$, $\|v_0\|_\infty \leq r$, $|c(x,t)| \leq r$. とし，初期値 u_0, v_0 に対応する(M)の近似解をそれぞれ u_h, v_h とする。$R = re^{\alpha T}(1+T)$ とおくと，次が成りたつ。

(i) $\|u_h(t)\|_{1,R} \leq e^{(\beta+\omega)t}\|u_0\|_{1,R} + \int_0^t e^{(\beta+\omega)(t-\sigma)}\|c(\sigma)\|_{1,R}\,d\sigma$.

(ii) $\|u_h(t)-v_h(t)\|_{1,R} \leq e^{(\beta+\omega)t}\|u_0-v_0\|_{1,R}$.

補題2の証明　(i) $K(t,\tau)$ の定義により，

$$H(t,\tau)v = \int U_s(t,\tau)f_0\,ds, \qquad f_0 = F(v,s)$$

を評価すればよい。$U_s(t,\tau)$ は順序を保つから，

$$\|H(t,\tau)v\|_{1,r} \leq \int ds \int [U_s(t,\tau)|f_0|](x,s)\,p_r(x)\,dx$$
$$= \int ds \int |f_0(y,s)|\,[U_s(t,\tau)^* p_r](y,s)\,dy.$$

$\xi(\sigma)$ を，補題1の証明で用いた特性曲線とすると，p_r と M_r の定義から，

$$[U_s(t,\tau)^* p_r](y,s) = p_r(y)\exp\left[\int_t^\tau b(\xi(\sigma),\sigma,s)\,d\sigma\right].$$
$$\leq p_r(x+(y-x))e^{\beta(t-\tau)} \leq p_r(x)e^{\beta(t-\tau)+\delta_r\sum|x_i-y_i|}$$

$$\le p_r(x)e^{\beta(t-\tau)}e^{\delta_r M_r(t-\tau)} = p_r(x)e^{(\beta+\omega)(t-\tau)}.$$

$\int|f_0(y,s)|\,ds = |v(y)|$ だから,

$$\|H(t,\tau)v\|_{1,r} \le e^{(\beta+\omega)(t-\tau)}\|v\|_{1,r}$$

これより (i) が得られる。また, $\int|F(v,s)-F(w,s)|\,ds = |v-w|$ に注意すれば, 同様にして (ii) を示すことができる。

以上の結果から, 近似解 $u_h(t)$ の「一様有界性」が得られるが, 収束部分列を取り出すには, さらに u_h の導関数の一様評価が必要である。それを示すために, 我々は、初期値のクラスを次のように制限する。

<u>定義</u> $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が Λ に属するとは, $\forall r>0$ に対して,

$$\|D_x v\|_{1,r} \equiv \sup\left\{\int v\,\mathrm{div}(p_r\psi)\,dx : \psi \in (C_0^1(\mathbb{R}^n))^n, |\psi(x)| \le 1\right\}$$

が有限なことである。

定義から, $v \in \Lambda$ の一階導関数は $\mathbb{R}^n$ 上の局所有限な測度であることがわかる。以下我々は Λ に属する初期値のみを考える。一般の初期値 ($\in L^\infty$) の場合への移行の仕方については, [4] を見られたい。

Λ に属する関数は次の性質をもつ。

<u>補題3</u> $v \in \Lambda$ とする。$\forall r>0$ に対してなめらかな関数の列 $\{v_m\}$ が存在して, $m \uparrow \infty$ のとき,

$$\|v_m - v\|_{1,r} \to 0, \qquad \|D_x v_m\|_{1,r} \to \|D_x v\|_{1,r}$$

補題4 $v\in\Lambda$ ならば，a.e. $s\in\mathbb{R}^1$ に対して $F(v(\cdot),s)\in\Lambda$ で，
$$\|D_x v\|_{1,r} = \int \|D_x F(v(\cdot),s)\|_{1,r}\,ds \quad (\forall r>0)$$
が成りたつ。

これらの結果は，[13]のTheorem 1.17, Theorem 1.23の証明をマネれば，容易に示すことが出来る。補題3，補題4は，Λの元は実質上なめらかなものと見做してよいということを意味している。従って我々は，(M)についても(m)についても，その初期値はなめらかと思ってよい。そうすると(m)の解 f も(xについて)なめらかであるから，(m)の方程式を各 x_j について微分して，得られた式を $f_j\equiv f_{x_j}$ に対する方程式と思って，補題2の証明の議論を使うことができる。補題2の証明において，最後の段階で補題4を適用すれば，結局次の結果が得られる。

補題5 $v\in\Lambda$，$\|v\|_\infty\le r$，$|c(x,t)|\le r$ とする。$\gamma>0$ を，
$$\gamma \geqq \sum_{i,j}\sup\{|a^i_{x_j}(x,t,s)| : (x,t,s)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]\times[-r,r]\},$$
$$\gamma \geqq \sum_{i,j}\sup\{|a^i_{x_i x_j}(x,t,s)|+|b_{x_j}(x,t,s)| : (x,t,s)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]\times[-r,r]\}.$$
なるようにえらべば，
$$\|D_x K(t,\tau)v\|_{1,r} \leqq e^{(\beta+w+\gamma)(t-\tau)}[\|D_x v\|_{1,r}+\gamma(t-\tau)\|v\|_{1,r}]$$
$$+\int_\tau^t e^{(\beta+w+\gamma)(t-\sigma)}[\|D_x c(\sigma)\|_{1,r}+\gamma(t-\sigma)\|c(\sigma)\|_{1,r}]\,d\sigma.$$

系3　$u_0 \in \Lambda$, $\|u_0\|_\infty \leq r$, $|C(x,t)| \leq r$ とする。$\gamma > 0$ を，補題5と同様に（r を $R = re^{\alpha T}(1+T)$ でおきかえて）えらべば，

$$\|D_x u_h(t)\|_{1,R} \leqq e^{(\beta+\omega+\gamma)t}[\|D_x u_0\|_{1,R} + \gamma t\|u_0\|_{1,R}]$$
$$+ \int_0^t e^{(\beta+\omega+\gamma)(t-\sigma)}[\|D_x C(\sigma)\|_{1,R} + \gamma(t-\sigma)\|C(\sigma)\|_{1,R}]d\sigma.$$

以上で得られた x-微分の評価を用いて，t-微分を評価することができる。(m) の方程式を s で積分すると，

$$\partial K(t,\tau)v/\partial t + \Sigma_i \partial y^i/\partial x_i + z = C$$

ただし，$z(x,t) = \int b(x,t,s) V_s(t,\tau) f_0 ds$,

$$y^i(x,t) = \int a^i(x,t,s) V_s(t,\tau) f_0 ds, \quad f_0 = F(v,s).$$

を得る。補題5とこの式から，$\partial K(t,\tau)v/\partial t$ （$v \in \Lambda$）は $\mathbb{R}^n$ 上の局所有限な測度であることがわかり，簡単な計算によって次の結果を得る。

補題6　$v \in \Lambda$, $\|v\|_\infty \leq r$, $|C(x,t)| \leq r$ に対し，定数 $L > 0$ が存在して，

$$\|K(t_1,\tau)v - K(t_2,\tau)v\|_{1,r} \leq L|t_1 - t_2| \quad (\tau \leq t_j \leq T, j=1,2).$$

系4　$u_0 \in \Lambda$, $\|u_0\|_\infty \leq r$, $|C(x,t)| \leq r$ に対し，定数 $L > 0$ が存在して，（$R = re^{\alpha T}(1+T)$ とおけば）

$$\|u_h(t) - u_h(\tau)\|_{1,R} \leq L|t-\tau| \quad (\forall h > 0).$$

系1-4と[13, Th 1.19]から次の結果を得る。

命題1 $\forall u_0 \in \Lambda$ に対し正数列 $h(m) \to 0$ と $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ 上の関数 $u(x,t)$ が存在して，

(i) L^1_{loc} の位相で，$[0,T]$ 上で一様に，$u_{h(m)}(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$；

$$u^{h(m)}(\cdot,t) \equiv \prod_{j=1}^{[t/h(m)]} K(jh(m),(j-1)h(m))u_0 \to u(\cdot,t).$$

(ii) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C([0,T]: L^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$，$u(0)=u_0$.

ここで得られた u が我々の求める(M)の解である。それを見るには，(上記(ii)により)，u が不等式(E)を満たすことを示せばよい。簡単のため，次の記法を用いる。

$$U_s^t(h,\sigma) = U_s(h[t/h]+h,\, h[t/h]+\sigma),\quad U_s^t(h) = U_s^t(h,0)$$

$$K^t(h) = K(h[t/h]+h,\, h[t/h]),\quad c(\sigma,s) = F(C(\sigma),s).$$

$$C(\sigma) = C(x, h[t/h]+\sigma),\qquad 0 \le \sigma \le h.$$

次の補題は，実質的には[2]で得られている。

補題7 $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$k \in \mathbb{R}^1$ に対して，

$$|K^t(h)v-k| \le \int U_s^t(h)|F(v,s)-F(k,s)|\,ds$$

$$+\operatorname{sgn}(K^t(h)v-k)\Big[\iint_0^h U_s^t(h,\sigma)c(\sigma,s)\,d\sigma\,ds$$

$$+\int [U_s^t(h)-1]F(k,s)\,ds\Big]\quad (t \ge 0).$$

証明 U_s^t の順序保存性と F の定義，および $|K^t(h)v-k| = (K^t(h)v-k)\operatorname{sgn}(K^t(h)v-k)$ から容易にわかる。

補題7と命題1の(i)から，不等式(E)は，次のようにして導かれる。簡単のため $u^h(\cdot,t)\to u(\cdot,t)$ in L^1_{loc} と仮定する。
$|u^h-k|=\int|F(u^h,s)-F(k,s)|ds$ だから，補題7より，

$$|K^t(h)u^h-k|-|u^h-k|\leq\int[U_s^t(h)-1]|F(u^h,s)-F(k,s)|ds$$
$$+\,sgn(K^t(h)v-k)\Big[\iint_0^h U_s^t(h,\sigma)c(\sigma,s)\,d\sigma ds+\int[U_s^t(h)-1]F(k,s)ds\Big]$$

この式に非負関数 $\phi\in C_0^\infty(R^n\times(0,T))$ を乗じ，(x,t)で積分し，$(K^t(h)u^h)(x)=u^h(x,t+h)$ を代入した後，h^{-1}を乗じて $h\downarrow 0$とする。$U_s(t,\tau)$，$U_s(t,\tau)^*$の生成作用素の形を考慮して，条件(C)，(D)を用いると(E)が得られる。(関数 sgn が不連続ゆえ，上記の議論は不正確であるが，この困難は避けられる。[4]，[10]を見られたい。)

注意　A^i，Bが時間変数tによらない場合には，非線形半群の近似定理を用いて，同じ結果を証明することができる。[4]，[6]，[7]を参照されたい。[6]，[7]では，$A^i=A^i(u)$，$B=0$の場合が，[4]では $A^i=A^i(x,u)$，$B=B(x,u)$の場合が扱われている。

§2. 定理2の略証　初期値問題$(P)_0$の近似解の構成法は，$\varepsilon=1$の場合に，小林[7]によって考えられたものである。小林[7]は，これを用いて問題(M)を，最も簡単な $A^i=A^i(u)$，$B=0$

の場合に解いた。彼の証明は，非線形半群の近似定理を用いるものであるが，実質的には §1 の論法と同じで，特に，系3，系4に相当する評価が重要である。ところが、我々の場合は，$h \downarrow 0$ のとき，自動的に $\varepsilon \downarrow 0$ となり，このときには，系4に相当する評価が得られず，従って，§1 で用いた「導関数の評価から収束部分列を得る方法」が適用できなくなる。しかしながら，このような場合でも，大春－高橋 [12, §2] の近似定理は，近似解の収束を保証してくれるのである。

まず，作用素 S_t の L^1 (L^∞) 評価を与える。

$$(S_t v)(x) = \int F_\varepsilon(v(x-\xi t), \xi)\, d\xi$$

に注意すれば，次の補題は，§1 の補題 1-2 と全く同様にして示される。

<u>補題 8</u>　$\forall v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

(i)　$\| S_t v \|_q \leqq \| v \|_q$　($q = 1, \infty,\ t \geqq 0$).

(ii)　$\| S_t v - S_t w \|_1 \leqq \| v - w \|_1$　($w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), t \geqq 0$).

さて，$B_h = h^{-1}(S_h - 1)$，$h > 0$，とし，作用素 B を，

$$Bw = \nu \Delta w - \sum_i A^i(w)_{x_i},$$

$$D(B) = \{ w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^2(\mathbb{R}^n) : Bw \in L^1 \cap L^\infty \}$$

で定める。次の結果は [1] による。

<u>補題9</u> B は $L^1(\mathbb{R}^n)$ で消散的である。すなわち $\forall\lambda>0$ と $\forall v, w \in D(B)$ に対して, $\|v-w\|_1 \leqq \|(1-\lambda B)v-(1-\lambda B)w\|_1$
従って, $\forall v\in R(1-\lambda B)$ に対して, $(1-\lambda B)^{-1}v$ が定義される。

[12] によれば, 定理2を証明するには, 補題8の他に, さらに次の結果が成り立てばよい。

<u>命題2</u> $\forall\lambda>0$ に対し, $R(1-\lambda B)=L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり, $\forall v\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し, $L^1\text{-}\lim_{h\downarrow 0}(1-\lambda B_h)^{-1}v=(1-\lambda B)^{-1}v \quad (\forall\lambda>0)$.
ただし, $h>0$, $\varepsilon>0$ は定理2の条件を満たすものとする。

<u>注意</u> 補題8により, B_h $(D(B_h)=L^1\cap L^\infty)$ は, L^1 の上で消散的である。従って $(1-\lambda B_h)^{-1}v$, $v\in R(1-\lambda B_h)$ が定まるが, 実は $R(1-\lambda B_h)\supset L^1\cap L^\infty$ である。[12] 参照。

命題2の証明の詳細は [11] に譲り, ここでは, B_h から B が得られる様子をスケッチしてみることにする。$v\in L^1\cap L^\infty$ を固定し, $v_h^\lambda=(1-\lambda B_h)^{-1}v$ とする。$\lambda>0$ を固定すると, $\{v_h^\lambda\}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ で有界であり, $h\downarrow 0$ のとき, $L^1(\mathbb{R}^n)$ で集積点をもつ。その一つを v^λ とする。実は $v^\lambda=(1-\lambda B)^{-1}v$ なのであるが, ここでは, v^λ が超関数のイミで $(1-\lambda B)v^\lambda=v$ を満たすこと, すなわち

$$\lambda^{-1}(v^\lambda-v)=\nu\Delta v^\lambda-\sum A^i(v^\lambda)_{x_i}$$

が超関数のイミで成り立つことを示す。v_h^λ の定義より

$$\lambda^{-1}(v_h^\lambda - v) = B_h v_h^\lambda .$$

この両辺に $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を乗じて積分すると，

$$(*) \quad \lambda^{-1}\int (v_h^\lambda - v)\phi\, dx = h^{-1}\iint F_\varepsilon(v_h^\lambda(x), \xi)[\phi(x+\xi h) - \phi(x)]\, dx\, d\xi$$

右辺の $\phi(x+\xi h) - \phi(x)$ を Taylor 展開して2次の項まで残す。
（余りの項は，$h \downarrow 0$ のとき消えることがわかる。）

$$(*)\text{の右辺} = \sum_i \iint F_\varepsilon(v_h^\lambda(x), \xi)\xi^i \phi_{x_i}(x)\, dx\, d\xi$$

$$+ \frac{h}{2}\sum_{i,j}\iint F_\varepsilon(v_h^\lambda(x), \xi)\xi^i\xi^j \phi_{x_i x_j}(x)\, dx\, d\xi + o(1)$$

ここで F_ε の定義を用いると，$\frac{h}{2n\varepsilon^2}\int |\xi|^2 \chi(\xi)\, d\xi \equiv \nu$ なるとき，

$$\sum_i \iint F_\varepsilon(v_h^\lambda(x), \xi)\xi^i \phi_{x_i}(x)\, dx\, d\xi = \sum_i \int [A^i(v_h^\lambda) - A^i(0)]\phi_{x_i}(x)\, dx$$

$$\xrightarrow[h\downarrow 0]{} \sum_i \int A^i(v^\lambda)\phi_{x_i}\, dx .$$

$$\frac{h}{2}\sum_{i,j}\iint F_\varepsilon(v_h^\lambda(x), \xi)\xi^i\xi^j \phi_{x_i x_j}(x)\, dx\, d\xi$$

$$= \nu \int v_h^\lambda(x)\Delta\phi(x)\, dx + o(1) \xrightarrow[h\downarrow 0]{} \int v^\lambda \Delta\phi\, dx$$

なることが容易にわかり，結論を得る。最後の計算で $\phi_{x_i x_j}$ のうち，対角成分の和（$=\Delta\phi$）のみが残るのは，F_ε の定義に用いた関数 $\chi \in C_0^\infty$ が $|\xi|$ のみの関数であることによる。

References

[1] M. G. Crandall, The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables, Israel J. Math. 12 (1972), 108-132.

[2] M. G. Crandall and A. Majda, Monotone difference approximations for scalar conservation laws, Math. Comp. 34 (1980), 1-21.

[3] Y. Giga and T. Miyakawa, A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations, Duke Math. J. 50 (1983), 505-515.

[4] Y. Giga, T. Miyakawa and S. Oharu, A kinetic approach to general first order quasilinear equations, preprint.

[5] S. Harris, An introduction to the theory of the Boltzmann equation, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

[6] Y. Kobayashi, The application of the product formula for semigroups to first order quasilinear equations, Hiroshima Math. J., to appear.

[7] Y. Kobayashi, Product formula for solving first order quasilinear equations, preprint.

[8] S. N. Kruzkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR-Sb. 10 (1970), 217-243.

[9] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, CBMS Regional Conference Series in Applied Math. no. 11, SIAM, Philadelphia, 1973.

[10] T. Miyakawa, A kinetic approximation of entropy solutions of first order quasilinear equations, Proc. Symp. on Nonlinear PDE, Hiroshima, to appear.

[11] T. Miyakawa, Construction of solutions of a semilinear parabolic equation by using the linear Boltzmann equation, preprint.

[12] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 126-160.

[13] E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Notes on Pure Mathematics no. 10, Australian National University, Canberra, 1977.