

非線形 Volterra 方程式に於ける発展方程式 の解の挙動

相模工大 小林和夫 (kazu Kobayasi)

§1. 序論

Banach 空間 X での非線形 Volterra 方程式

$$(V) \quad u(t) + \mathcal{R} * Au(t) \ni f(t), \quad t \geq 0$$

の解 $u(t)$ の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動を調べることを目的とする。ここで、 A は m -accretive 作用素、 \mathcal{R} は実数値関数、 f は X -値関数である。そして、 $\mathcal{R} * z(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)z(s)ds$ とする。

Crandall & Nohel [5] は (V) を次の型の発展方程式 (E) ととらえて、解の存在と一意性を証明した。

$$(E) \quad \begin{cases} du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

もし $\mathcal{R}(0) = 1$ ならば、(V) を (形式的に) 微分することにより

$$(1.1) \quad \mathcal{R}(t) + \mathcal{R} * \mathcal{R}(t) = 1$$

$$(1.2) \quad f(t) = g'(t) + R * g'(t) + R(t) u_0$$

$$(1.3) \quad G(u)(t) = R(0)u(t) + \int_0^t u(t-s) dR(s)$$

$$(1.4) \quad u_0 = g(0)$$

と R, G, u_0 をおけば (E) が導かれる。

2章では (E) の一般解を定義し, その $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動に関する 蚊戸-小林-宮寺 [7] の結果を紹介する。3章では (V) の解の漸近挙動を2章の結果を用いて調べる。4章では (V) の解の漸近挙動の他の結果を述べる。これは平野 [6] が Hilbert 空間のとき証明した結果を一様凸 Banach 空間へ拡張するものである。

§2. (E) に対する漸近挙動

この章では, (E) に対する漸近挙動に関する 蚊戸-小林-宮寺 [7] の結果を証明なしで述べる。

X は実 Banach 空間とする。 X が Opial 条件を満たすとは次が成り立つことである。

$$w\text{-}\lim_n x_n = x_0 \Rightarrow \liminf_n \|x_n - x\| > \liminf_n \|x_n - x_0\|, \quad \forall x \neq x_0.$$

Hilbert 空間, l^p 空間, $1 < p < \infty$, は Opial 条件を満たす。

G は次の条件を満たす与えられた写像とする。

$$(2.1) \quad G: C([0, \infty); X) \rightarrow L^1_{loc}(0, \infty; X)$$

$$(2.2) \quad G: C([0, T]; X) \rightarrow L^1(0, T; X), \quad \forall T > 0$$

$$(2.3) \quad G(u^T) = G(u)^T \quad \text{for } u \in C([0, \infty); X), \quad T > 0$$

$$(2.4) \quad \exists \gamma \in L^1_{loc}(0, \infty) \quad \text{s.t.}$$

$$\|G(u) - G(v)\|_{L^1(0, t; X)} \leq \int_0^t \gamma(s) \|u - v\|_{L^\infty(0, s; X)} ds, \quad t \geq 0$$

for $u, v \in C([0, \infty); \overline{D(A)})$

ここで $u^T, G(u)^T$ は $u, G(u)$ の区間 $[0, T]$ への制限とする。

定義 2.1. u が (E) の強解であるとは, $u \in W^{1,1}_{loc}(0, \infty; X) \cap C([0, \infty); \overline{D(A)})$, $u(0) = u_0$, $du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t)$ a.e. t が成り立つことである。

さて, $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ とする。このとき, $\forall T > 0, \forall u \in C([0, T]; X)$ に対して, (2.2) より次の初期値問題

$$\begin{cases} dv(t)/dt + Av(t) \ni f(t) - G(u)(t), & 0 \leq t \leq T \\ v(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

は一意的な "integral solution" $v \in C([0, T]; \overline{D(A)})$ をもつ。これを $v = Q^T(u)$ と表す。

定義 2.2. u が (E) の一般解であるとは, $u \in C([0, \infty); \overline{D(A)})$, $u^T = Q^T(u^T)$, $\forall T > 0$, が成り立つことである。このとき, 次の存在定理が成り立つ。

定理 2.1. $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$, G は (2.1) - (2.4) を満たすとする。このとき, (E) は一意的な一般解 u をもつ。さらに, $\lambda > 0$ に対して近似問題

$$(E)_\lambda \quad \begin{cases} du_\lambda(t)/dt + A_\lambda u_\lambda(t) + G(u_\lambda)(t) = f(t), & t \geq 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

は一意的強解 u_λ をもち, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|u_\lambda - u\|_{C([0, T]; X)} = 0, \forall T > 0$ が成り立つ。

定理 2.2. $u_0 \in D(A), f \in BV_{loc}(0, \infty; X), G$ は (2.1) - (2.4) に加えて次を満たすとする。

$$(2.5) \quad \begin{cases} \forall T > 0, \forall R > 0 \text{ に対して } \exists M > 0 \text{ s.t.} \\ \text{Var}(G(v): [0, t]) \leq M \{1 + \text{Var}(v: [0, t])\}, 0 \leq t \leq T \\ \|G(v)(0+)\| \leq M \\ \text{for } v \in C([0, T]; \overline{D(A)}) \cap BV(0, T; X), \|v\|_{L^\infty(0, T; X)} \leq R \end{cases}$$

このとき, (E) の一般解 u は各有限区間 $[0, T]$ 上で Lipschitz 連続である。したがって, X が回帰的ならば u は強解である。

2.1. 弱漸近挙動

次の条件 (C1) - (C2) をおく。

(C1) i) G は (2.1) - (2.4) を満たす。

ii) 任意の定数値関数 $v(t) \equiv v \in D(A)$ に対して

$$G(v) \in L^1(0, \infty; X)$$

iii) 非負, 非増加関数 $\rho \in L^1(0, \infty)$ が存在して

$$[G(v)(t) - G(w)(t), v(t) - w(t)]_+ \geq \frac{d}{dt} (\rho * \|v - w\|(t))$$

$$\text{for a.e. } t, \forall v, w \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

(ただし, $[x, y]_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1} (\|x + \lambda y\| - \|x\|)$ とする。)

(C2) $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1(0, \infty; X)$

定理 2.3. (C1), (C2) を仮定し, X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。 u を (E) の一般解とするとき, 次は互いに同値である。

(a) $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ が存在する。

(b) $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ が存在し $A^{-1}0$ の元である。

(c) $A^{-1}0 \neq \phi$ かつ $\omega_w(u) \subset A^{-1}0$

ただし, $\omega_w(u) = \{ \xi \in X : \exists t_n \uparrow \infty, \xi = \lim_n u(t_n) \}$

定理 2.4. (C1), (C2) を仮定し, X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。 u を (E) の一般解とする。もし $A^{-1}0 \neq \phi$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - u(t)\| = 0, \forall h > 0$, ならば, $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \xi \in A^{-1}0$

定理 2.5. (C1), (C2) を仮定し, X は回帰的で weakly sequentially continuous duality mapping をもつとする。 u を (E) の一般解とする。このとき, 次の条件 (d) は上の (a)-(c) と互いに同値である。

(d) $A^{-1}0 \neq \phi$ かつ $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \{ u(t+h) - u(t) \} = 0, \forall h > 0$.

2.2. 強漸近挙動

(C1), (C2) に加えて次の条件をおく。

$$(C3) \quad G : C([0, \infty); X) \cap L^\infty(0, \infty; X) \rightarrow L^\infty(0, \infty; X)$$

(C4) $\forall M > 0$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \|G(v)(t+h) - G(v(\cdot+h))(t)\| dt = 0$$

が $v \in C([0, \infty); X) \cap L^\infty(0, \infty; X)$, $\|v\|_{L^\infty(0, \infty; X)} \leq M$

について一様に成り立つ。

(ここで, $v(\cdot+h)$ は v の translation を表わす。)

定理 2.6. (C1)-(C4) を仮定し, ある $\lambda_0 > 0$ に対して, レゾルベント $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ は compact とする。 u を (E) の一般解とするとき, 次は互いに同値である。

(a') $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ が存在する。

(b') $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ が存在して $A^{-1}0$ の元である。

(c') $A^{-1}0 \neq \emptyset$ かつ $\omega(u) \subset A^{-1}0$

(d') $A^{-1}0 \neq \emptyset$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - u(t)\| = 0, \forall h > 0$

ここで, $\omega(u) = \{ \xi \in X; \exists t_n \uparrow \infty, \lim_n u(t_n) = \xi \}$ 。

§3. (V) に対する漸近挙動, その I

次の条件の下で, (V) の一般解の漸近挙動を調べる。

Baillon & Clément [1] は Hilbert 空間において同じ条件の

下で (V) の漸近挙動を研究している。

(H1) $\varrho \in AC_{loc}[0, \infty)$, $\varrho(0) > 0$, $\varrho' \in BV_{loc}[0, \infty)$

(H2) $g \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$, $g' \in L^1(0, \infty; X)$, $g(0) \in \overline{D(A)}$

(H3) $R \in L^1(0, \infty)$, 非負非増加

ここで, R は (1.1) で定義された関数である。(H3) は R が "completely positive" かつ $R(\infty) > 0$ と同値である。[4]

定義 3.1. $f(t), G, u_0$ を (1.1)-(1.4) で定義されたものとする。このとき, u が (E) の一般解 (または強解) のとき, u は (V) の一般解 (または強解) と呼ぶ。

さて, (1.1)-(1.4) で定義された $f(t), G, u_0$ に対して 2章の (C1)-(C4) が満たされることを見る。先づ, (C2), (C3) は明らかである。(C1) は次の補題から従う。

補題 3.1.

$$[G(v)(t), v(t)]_+ \geq \frac{d}{dt} (R * \|v\|)(t) \text{ a.e. } t, v \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

証明. $\Pi: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ を $[0, t]$ の分割で, $t_{R-1} \leq \tau_R \leq t_R$, $|\Pi| = \max_R (t_R - t_{R-1})$ とする。 $[\cdot, \cdot]_+$ は上に半連続であるから, $v \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$ に対して

$$\begin{aligned} & [G(v)(t), v(t)]_+ \\ & \geq \limsup_{|\Pi| \rightarrow 0} [R(0)v(t) + \sum_R v(t - \tau_R)(R(t_R) - R(t_{R-1})), v(t)]_+ \\ & \geq R(0) \|v(t)\| - \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_R \|v(t - \tau_R)\| |R(t_R) - R(t_{R-1})| \\ & = R(0) \|v(t)\| + \int_0^t \|v(t-s)\| dR(s) = \frac{d}{dt} (R * \|v\|)(t) \end{aligned}$$

(証明終)

次に, (C4) を示すため, $\Delta_h(v)(t) = G(v)(t+h) - G(v(\cdot+h))(t)$ とおくと

$$\Delta_h(v)(t) = \int_t^{t+h} v(t+h-s) dR(s)$$

であるから

$$\int_0^\infty \|\Delta_h(v)(t)\| dt \leq \|v\|_{L^\infty} \int_0^\infty (R(t) - R(t+h)) dt \leq \|v\|_{L^\infty} R(0)h$$

これより (C4) が成り立つ。したがって、2章の結果より次の定理を得る。

定理 3.2. (H1)-(H3) を仮定し、 X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。このとき、(V) の一般解 u に対して定理 2.3, 2.4 の結論が成り立つ。

定理 3.3. (H1)-(H3) を仮定し、 X は回帰的で weakly sequentially continuous duality mapping をもつとする。このとき、(V) の一般解 u に対して、定理 2.5 の結論が成り立つ。

定理 3.4. (H1)-(H3) を仮定し、ある $\lambda_0 > 0$ に対して、レゾルバント $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ は compact とする。このとき、(V) の一般解 u に対して、定理 2.6 の結論が成り立つ。

§4. (V) に対する漸近挙動, その II

この章では、平野 [6] の Hilbert 空間での結果を一様凸 Banach 空間へ拡張する。次の仮定をおく。

(4.1) A は一価, strictly m -accretive.

(4.2) $\varphi \in AC_{loc}[0, \infty)$, $\varphi(0) > 0$, $\varphi' \in BV_{loc}[0, \infty)$

(4.3) $\varphi' \in L^1(0, \infty) \cap L^{p'}(0, \infty)$, $1/p + 1/p' = 1$, $p \geq 1$

$$(4.4) \quad \vartheta \in L^\infty(0, \infty)$$

$$(4.5) \quad \vartheta \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

$$(4.6) \quad \vartheta(0) \in D(A), \quad \vartheta' \in BV_{loc}(0, \infty; X)$$

$$(4.7) \quad \exists z_0 \in X \text{ s.t. } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^h \|f'(t+\tau) - z_0\| d\tau = 0, \quad \forall h > 0$$

(4.2), (4.5), (4.6) を仮定するとき, もし $f(t)$ が (1.2) によつて定義されているならば $f(t) \in BV_{loc}(0, \infty; X)$ であり, そして, (1.3) によつて定義された G は (2.5) を満たす. また, かつ, 定理 2.2 より X が回帰的ならば (V) は一意な強解をもつ.

定理 4.1. X を一様凸 Banach 空間と L , (4.1)-(4.7) を仮定する. u を (V) の強解と L , 次を仮定する.

$$(4.8) \quad \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$$

$$(4.9) \quad \exists w_0 \in X \text{ s.t. } Au(\cdot) - w_0 \in L^p(0, \infty; X)$$

$$(4.10) \quad \vartheta(0)^{-1} \left(z_0 - \left(\int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \right) \in R(A)$$

このとき, $\frac{1}{t} \int_0^t u(s+h) ds$ は $t \rightarrow \infty$ のとき, $A^{-1} \left(z_0 - \left(\int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \right)$ の元に $h > 0$ について一様に弱収束する.

証明では, 一般性を失うことなく $\vartheta(0) = 1$ と仮定する.

u は (V) の強解であるから

$$\begin{aligned} & \frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \left(\int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 - z_0 \\ &= \vartheta'(t) - z_0 - \int_0^t \vartheta'(t-s) (Au(s) - w_0) ds + \left(\int_t^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \end{aligned}$$

ここで

$$Bv = Av + \left(\int_0^\infty \varphi'(s) ds\right) w_0 - z_0, \quad v \in D(B) = D(A)$$

とおくと, (4.1), (4.10) より B は strictly m -accretive, $B^{-1}0 \neq \emptyset$ である。 $\{T(t); t \geq 0\}$ を $-B$ より生成される非線形縮小半群とする。

補題 4.2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0$

証明 integral solution の性質から

$$\begin{aligned} & \|u(t+h) - T(h)u(t)\| \\ & \leq \int_0^h \|\varphi'(t+\xi) - z_0 - \varphi' * (Au - w_0)(t+\xi) + \left(\int_{t+\xi}^\infty \varphi'(s) ds\right) w_0\| ds \\ & \leq \int_0^h \|\varphi'(t+\xi) - z_0\| d\xi + \int_0^h \|\varphi' * (Au - w_0)(t+\xi)\| d\xi \\ & \quad + \int_0^h \left\{ \int_{t+\xi}^\infty |\varphi'(s)| ds d\xi \right\} \|w_0\| \\ & = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

ここで, (4.7) より $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1 = 0$. (4.3) より $I_3 \leq h \|w_0\| \int_t^\infty |\varphi'(s)| ds \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), ところで, (4.3), (4.9) より

$$\|\varphi' * (Au - w_0)\|_{L^p} \leq \|\varphi'\|_{L^1} \|Au - w_0\|_{L^p} < \infty$$

であるから

$$\begin{aligned} I_2 & \leq h^{1/p'} \left(\int_0^h \|\varphi' * (Au - w_0)(t+\xi)\|^p d\xi \right)^{1/p} \\ & = h^{1/p'} \left(\int_t^{t+h} \|\varphi' * (Au - w_0)(\xi)\|^p d\xi \right)^{1/p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(証明終)

補題 4.3. u は asymptotically uniformly

continuous である。i.e., $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists \rho > 0$,
 $\exists \delta > 0$ s.t. $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ for $s, t > \rho$, $|s - t| < \delta$.

証明 先づ, 次式が成り立つことに注意しておく。

$$\begin{aligned} & u(t+s) - u(t) \\ &= f(t+s) - f(t) - \int_0^t (\beta(t+s-\tau) - \beta(t-\tau))(Au(\tau) - w_0) d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+s} \beta(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0) d\tau - \int_t^{t+s} \beta(\tau) w_0 d\tau \end{aligned}$$

とすることで,

$$f(t+s) - f(t) = \int_0^s f'(t+\tau) d\tau = \int_0^s \{f'(t+\tau) - z_0\} d\tau + s z_0$$

であるから (4.7) より

$$(4.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{f(t+s) - f(t)\} = s z_0, \quad s \in [0, 1] \text{ で一様収束}$$

また, (4.3) より $\beta(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t)$ は存在するから

$$(4.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+s} \beta(\tau) w_0 d\tau = s \beta(\infty) w_0, \quad s \in [0, 1] \text{ で一様収束}$$

そして,

$$\begin{aligned} (4.13) \quad & \left\| \int_t^{t+s} \beta(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\ & \leq \|\beta\|_{L^\infty} \int_t^{t+s} \|Au(\tau) - w_0\| d\tau \\ & \leq \|\beta\|_{L^\infty} s^{1/p'} \|Au - w_0\|_{L^p} \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (\beta(t+s-\tau) - \beta(t-\tau))(Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\ & \leq \|\beta(\cdot + s) - \beta\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p} \end{aligned}$$

とことが,

$$\|\beta(\cdot + s) - \beta\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_0^\infty |\beta(t+s) - \beta(t)|^{p'} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left| \int_0^s \varphi'(t+\tau) d\tau \right|^{p'} dt \leq s^{p'/p} \int_0^\infty \left\{ \int_0^s |\varphi'(t+\tau)|^{p'} d\tau \right\} dt \\
&= s^{p'/p} \int_0^s \left\{ \int_0^\infty |\varphi'(t+\tau)|^{p'} dt \right\} d\tau \\
&\leq s^{p'/p+1} \|\varphi'\|_{L^{p'}}^{p'} = s^{p'} \|\varphi'\|_{L^{p'}}^{p'}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
(4.14) \quad &\left\| \int_0^t (\varphi(t+s-\tau) - \varphi(t-\tau))(Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\
&\leq s \|\varphi'\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p}
\end{aligned}$$

したがって, (4.11) - (4.14) と最初に注意した等式を合わせると
 u は asymptotically uniformly continuous であることが
 分る。 (証終)

補題 4.4. ([2, Lemma 1]) X を一様凸 Banach
 空間とし, $u \in L^\infty(0, \infty; X) \cap L^1_{loc}(0, \infty; X)$ は次を満たすと
 する。

(i) u は asymptotically uniformly continuous である。

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0.$

このとき, $\frac{1}{T_n} \int_{a_n}^{a_n+T_n} u(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$ ならば, $\zeta \in B^{-1}0$
 である。但し, $\{a_n\}, \{T_n\}$ は $a_n \uparrow \infty, T_n \uparrow \infty$ なる数列

定理 4.1 の証明

B は strictly accretive である
 から $B^{-1}0 = \{\zeta\}$ (singleton) である。 $T_n \uparrow \infty, a_n \uparrow \infty$
 を任意にとる。補題 4.2 - 4.4 より $\frac{1}{T_{n_k}} \int_0^{T_{n_k}} u(s + a_{n_k}) ds$
 $\rightarrow \zeta$ である部分列 $\{n_k\}$ がとれる。ここで, (4.8) を用いた。

したがて、 $\frac{1}{t} \int_0^t u(s+h) ds$ は $t \rightarrow \infty$ のとき h について一様に弱収束する。 (証明)

§5. 例.

X を一様な物質からなる長さ 1 の棒における非線形熱方程式は、 $Au = -a(u_x)_x$ の型の作用素 A をもち、た Volterra 方程式に書き表される。([3] を見よ。) いま、

$$(5.1) \quad a \in C^1(\mathbb{R}), \quad a'(x) > 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}, \quad a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

を仮定する。このとき、Neumann 境界条件をもちた作用素 A_p , $1 \leq p \leq \infty$ を次のように定義する。

$$D(A_\infty) = \{u \in C^2[0,1]; u_x(0) = u_x(1) = 0\}$$

$$A_\infty u = -a(u_x)_x \quad \text{for } u \in D(A_\infty)$$

$1 \leq p < \infty$ に対して

$$A_p = A_\infty \text{ の } L^p(0,1) \text{ での閉包}$$

すると A_∞ は $C[0,1]$ で、 A_p , $1 \leq p < \infty$, は $L^p(0,1)$ で m -accretive となる。また、レゾルベント $(I + A_\infty)^{-1}$ は $C[0,1]$ で compact となる。したがて、3章の結果を用いることができる。なお、Dirichlet 境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ をもちた作用素の場合は、Poincaré の不等式より $A_p - \omega I$ が accretive いわゆる strongly accretive となるので、漸近挙動は扱いやすくなる。(ω は正数)

References

1. J.-B. Baillon & P. Clément, Ergodic theorems for non-linear Volterra equations in Hilbert space, *Nonlinear Analysis*, 5 (1981), 789-801.
2. R.E. Bruck & G.B. Passty, Almost convergence of the infinite product of resolvent in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 3 (1979), 279-282.
3. Ph. Clément, R.C. MacCamy & J.A. Nohel, Asymptotic properties of solutions of nonlinear abstract Volterra equations, *J. Integral Eq.* 3 (1981), 185-216.
4. Ph. Clément & J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), 514-535.
5. M.G. Crandall & J.A. Nohel, An abstract functional differential equations and a related nonlinear Volterra equation, *Israel J. Math.* 29 (1978), 313-328
6. N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, *J. Diff. Eq.* 47 (1983), 163-179.
7. N. Kato, K. Kobayasi & I. Miyadera, On the asymptotic behavior of solutions of evolution equations associated with nonlinear Volterra equations, preprint