数理解析研究所講究録
第 541 巻 1984 年 100-116

非線形発展方程式 $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$

お茶の水女子大理 高村幸男 (Yukio Kōmura)

はじめに。 講演時少々体調が悪く、話の趣旨が不明確になったので、その点を最初に述べたい。凸関数とその劣微分の理論は、幾何学的意味が明快で解析的に取扱い易く、私は大変好きで、将来ますます発展することを願っている。どの方向に発展してゆくか、予測するのは難しいけれども、方法論的には無条件積分が考えられる。無条件積分は技術的に取扱いにくく、従来用いられたことがなかったと思われるがベクトル値関数の積分として絶対積分より本質的であり、特に凸関数・劣微分の特質(連続性・微分可能性が弱くてもむ性質)と良くマッチしているので、劣微分の発展方程式についてこの見地から問題提起してみよう。もし技術的困難を克服できれば適用範囲が大きく広がることになろう。

一方、凸関数・劣微分は、解の正則性とはあまりなじまないように見えるが、解の正則性は発展方程式論において

最も興味深い研究対象なので，偏微分の方程式に対しても解の正則性を論ずることは，やはり意義があるのではないか。実際，$D(\partial\varphi^t)$ や $D(\varphi^t)$ が動く場合，実解については他の方法よりもはるかに取扱い易いので，複素解（正則解）についても将来意外な発展をみるかも知れない．

§0　強解と弱解　　三次元の Navier-Stokes 方程式の弱解 u は，energy 不等式

$$1)\qquad \frac{1}{2}\|u(T)\|^2+\int_0^T\|\nabla u(t)\|^2dt\le\frac{1}{2}\|u(0)\|^2$$

を満たすことは良く知られている。$\|\nabla u(t)\|=\infty$ となる t は存在するとしても $[0,T]$ 区間の測度 0 の閉集合であってその他の点（$\|\nabla u(t)\|<\infty$ となる開集合）では弱解は（局所的）強解となる。弱解は強解をつないだものになっているが，それだけでは弱解の大域的な性質は分らない。強解となっている部分では枝分れしない（解の一意性成立）が，$\|\nabla u(t)\|=\infty$ となるところで枝分れするかも知れない。N.S.方程式のような自然な方程式で $\|\nabla u(t)\|$ が有界にならないらしいこと，その結果解の性質が分らなくなること，が興味深い．

N.S.方程式では本当に $\|\nabla u(t)\|=\infty$ となる点があるかどうか不明なので，以下少々人工的なモデルで説明しよう．

Hilbert 空間 H における線形発展方程式

2) $\dfrac{du}{dt} = -Au + \mu(t)$

を考える。こゝに A は自己共役正作用素，μ は H の値をとる測度である。特に $\mu(t) = \delta_{t-t_0} x_0$ （δ_{t-t_0} は $t = t_0$ におかれた Dirac 測度，$x_0 \in H$）の形のとき，もし $x_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ ならば $\int_0^T \|Au\|^2 dt < \infty$ となるが，一般には $\int_0^T \|Au\| dt = \infty$ となり，普通の意味の強解は存在しない。一般の測度 μ に対しては，測度 0 の閉集合を除けば 2) の局所的強解が存在する。二つの弱解 u, v について，$\|u(t) - v(t)\|$ は殆んどいたる所微分可能であって，a.e. t について

3) $\dfrac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 = -2\langle A(u(t) - v(t)), u(t) - v(t)\rangle \leq 0$

となるが，$u - v$ は絶対連続とは限らないので（連続と仮定しても）上式から $\|u(t) - v(t)\|$ が単調減少であることは直ちには結論できない。

この方程式についてだけならば，もっと弱いノルム（例えば $|\cdot| = \|(I + A)^{-1}\cdot\|$）についての単調減少性が得られそれから解の一意性が得られるが，その方法を非線形に拡張することは一般には難しいのである。そこで，絶対積分・絶対連続の概念を弱めて，強解の良い性質を保った弱解を考えよう，というのである。

§Ⅰ ベクトル値関数の無条件積分　級数に関する絶対収束と無条件収束の区別は昔から認識されて来た。Banach 空間 X における級数 $\sum x_n$ が、順序に無関係に収束するとき無条件収束、$\sum \|x_n\|$ が収束するとき絶対収束、という。無条件収束級数が常に絶対収束するような Banach 空間は有限次元である（Dvoretzky-Rogers の定理，1950）。

例 1.　$X = \ell^2$ のとき、正規直交系 $\{e_n\}$ に対し、級数 $\sum c_n e_n$ は，$\sum |c_n|^2 < \infty$ のとき無条件収束，$\sum |c_n| < \infty$ のとき絶対収束である。$X = L^2[0,1]$ のときが興味がある。$0 < t_k \uparrow 1$ とし

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 0 & t \notin [t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

とおく。$\sum f_k$ は $L^2[0,1]$ において常に無条件収束であるが、絶対収束するのは $\sum |t_{k+1} - t_k|^{1/2} < \infty$ のときである。

この例から見ても、無条件収束の方が、本来の意味での収束ではなかろうか。一応、絶対収束の方が特殊かつ技術的，無条件収束の方が一般かつ本質的，という私の見地を認めて頂くことにしよう。積分の無条件収束は当然論ぜられている筈だが、文献を知らないので，以下自己流に解説してみよう。

定義　X の値をとる可測関数 $f : [0,T] \longrightarrow X$ について、任意の $\varepsilon > 0$ に対し，共通部分のない可測集合の列 $I_1^\varepsilon, \cdots I_k^\varepsilon$

と $x_1^\varepsilon, \dots, x_k^\varepsilon \in X$ が存在して

$$m([0,T] \setminus \bigcup_j I_j^\varepsilon) < \varepsilon,$$

$$\| f(t) - x_j^\varepsilon \| < \varepsilon, \qquad t \in I_j^\varepsilon$$

をみたす。$\varepsilon \downarrow 0$ のとき極限

$$x_0 = \lim_\varepsilon \sum_j m(I_j^\varepsilon)\, x_j^\varepsilon$$

が（I_j^ε などの採り方に無関係に）存在するとき、f は無条件積分可能である，という。極限 x_0 を f の無条件積分という。

絶対連続に対応する概念は次の様になる。

定義. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して

$$0 \le t_1 < s_1 < \cdots < t_k < s_k \le T, \qquad \Sigma(s_j - t_j) < \delta$$

をみたす分割に対して常に

$$\| \Sigma (f(s_j) - f(t_j)) \| < \varepsilon$$

となる関数 f を無条件連続という。

X が回帰的であるとき、X の値をとる絶対連続関数は殆んどいたる所微分可能であったが、これは無条件連続関数については成立しない。

例 2. $X = L^2[0,1]$, $f(t) = f(t,x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le t \\ 0 & t < x \le 1 \end{cases}$

とすれば、この f は無条件連続であるが、その微分 $f'(t)$ はすべての t につき $L^2[0,1]$ の外に出てしまう。

定理　Banach空間 X の値をとる関数 f が無条件積分可能ならば、f の不定積分

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds + C$$

は無条件連続かつ殆んどいたるところ強微分可能である。逆に、無条件連続かつ殆んどいたるところ強微分可能な関数 F の導関数 f は無条件積分可能であって、F は f の不定積分として表される。

さて、前節の方程式 2) $\frac{du}{dt} = -Au + \mu$ は任意の初期値に対し、Au が無条件積分可能となるような解を有する。そのような解のみを考えれば

$$u(t) - \int_0^t \mu(s)\,ds = \int_0^t Au(s)\,ds - u(0)$$

は無条件連続、したがって二つの解の差 $u(t) - v(t)$ も無条件連続、$\|u(t) - v(t)\|$ はスカラー値の無条件連続関数だから絶対連続である。かくして 3) $\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0$ a.e. t より $\|u - v\|$ の単調減少性が得られる。あとの例でも示されるが、解 u 自身は無条件連続にならないし、無条件連続な解だけでは不充分で、

<u>無条件変動</u>が有界：$\sup \|\Sigma(f(s_j) - f(t_j))\| < \infty$,

$0 \leq t_1 < s_1 < \cdots < t_k < s_k \leq T$, なる解 f を考える必要がある。そのときは当然 df/dt として<u>無条件測度</u>が現れる。これと例2とを同時に含むような形の理論が欲しいのであるが、

まだ考察が進んでいない。

§Ⅱ Kenmochi-Yamadaの理論 こゝで論ずるのはHilbert空間Hにおける劣微分の方程式

4) $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$

である。$\varphi^t : H \longrightarrow (-\infty, \infty]$ は凸下半連続とする。

N.S.方程式などの慣例にしたがって，次の定義をおく。

定義 uはある関数wとある弱い分離凸位相τが存在して

4′) $u(t) = u(0) + \tau\text{-}\int_0^t w(s)\,ds, \quad w(t) \in -\partial\varphi^t(u(t))$ a.e. t

が成立するとき 4) の弱解という。(τ-$\int$ はτ位相による積分)．さらにwが絶対積分可能（$\int_0^T \|w(s)\| ds < \infty$）のとき$u$を強解という。

前に述べたように、無限次元空間では線形方程式でも$\varphi^t(u(t)) = \infty$となる点があると$\partial\varphi^t(u(t))$が絶対積分可能になるかどうか分らないから、強解を求めるのは$\varphi^t(u)$が有界：

5) $\varphi^t(u(t)) \leq {}^{\exists}M < \infty$

なる場合に限ってよい。勿論，φ^tが特別な形のときは話が別になるが、そのような制限を附すとDirichlet積分が含まれなくなるので、興味がうすい。

$D(\varphi^t)$が一定で$D(\partial\varphi^t)$が動く場合は、J、Watanabe

[10] によって論ぜられた．発想が自然で証明も明快．それでいて Neumann 問題への応用を含む．良い作品である．$D(\varphi^t)$ が動く場合は，N. Kenmochi [7] が最初である．当時は、変った着想と思われたが．これによって新たな分野が開かれた．続いて、画期的な論文 Y. Yamada [12, 13] によって、方程式 4) の強解の理論は、実質的にほゞ完成した，と言ってよい．（S. Yotsutani [15]，N. Kenmochi [8] による改良も参照）．

以下簡単に説明する．解析的に述べられた条件は，一見複雑であるが．実は自然な設定なのである．

条件 (A)：$0 \le {}^{\exists}\alpha \le 1$，$\quad {}^{\forall}r > 0$，${}^{\exists}K_r > 0$，

${}^{\exists}f_r(t) \in L^{\beta}[0,T] \quad (\beta = (1 - \max(\alpha, \frac{1}{2}))^{-1})$

${}^{\exists}g_r(t)$：単調増加有界，

$0 \le {}^{\forall}t_0 < t_0 + {}^{\forall}h \le T$，$\quad {}^{\forall}x_{t_0}\ (\|x_{t_0}\| \le r)$，${}^{\exists}x_{t_0+h}$：

i) $\quad \|x_{t_0+h} - x_{t_0}\| \le \int_{t_0}^{t_0+h} |f_r(t)|\,dt\,(\varphi^{t_0}(x_{t_0}) + K_r)^{\alpha}$

ii) $\quad \varphi^{t_0+h}(x_{t_0+h}) \le \varphi^{t_0}(x_{t_0}) + (g_r(t_0+h) - g_r(t_0))(\varphi^{t_0}(x_{t_0}) + K_r)$

定理　φ^t が条件 (A) をみたせば，初期値 $u(0) \in D(\varphi^0)$ に対して方程式 4) は一意の強解 u を持つ。

$\varphi^t(u(t))$ を有界にする十分条件を求めるのに、局所的に幾何学的意味を考えると条件 (A) の $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合が得られ．大域的に幾何学的意味を考えると $\alpha = 1$ の場合が得られる．

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$の場合は補間によって得られる。逆に、任意の$\varepsilon > 0$に対し，$f_\gamma(t) \in L^{\beta-\varepsilon}[0,T]$であって$\varphi^t(u(t))$が有界でないような$\varphi^t$が存在する。その意味で条件(A)は必要条件でもある。また，上の定理は，非柱状領域における非線形偏微分方程式への興味ある応用を有する。

注意　$\varphi^t(u(t))$が有界であって$\int_0^T \|\partial\varphi^t(u)\|\,dt = \infty$となる例があり、一方$\varphi^t(u(t))$が有界でなくて$\int_0^T \|\partial\varphi^t(u)\|\,dt < \infty$となる例も勿論存在する。(次節参照)。しかし、これ等を抽象論の範囲で明らかにするのは容易でない。また条件(A)は改良する余地がない訳ではなく、例えばi)の右辺を$\alpha = \frac{1}{2}$の式と$\alpha = 1$の式を加え合せたもので置換えてもよい。(A. Yanagihara [14]による注意)。以上の事を考慮に入れて尚かつ条件(A)は完成度の高いものと考えられる。

以上の様に、K.Y.理論は、第一に幾何学的意味が明快，第二に自然な形式の下でbest possible，第三に興味ある応用を含む、正に抽象的発展方程式論における一つの模範と言いたい程であるが、次節で示すように、簡単な偏微分方程式の例で含まれないものが多数存在するのである。これは、通常の強解を一般的に取扱うために，$\varphi^t(u)$が有界になるという強い制限を課したためである。そこで，無条件積分を本質的とする立場と相まって自然に次の問題に導かれる。

問題　K-Y理論を，$\varphi^t(u)$ が有界でないような無条件連続解を含む形に拡張せよ。

注意 i)　凸関数 φ で，$x_0 \in \overline{D(\varphi)}$ を初期値とした $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi(u)$ の解が無条件連続とならない例があるようである。このため，φ の形を制限しなければならないが，絶対連続の場合と異なり，Dirichlet 積分などを含ませることができ，適用範囲は充分広くできる答である。φ が有界の所では K-Y 理論で良いから，φ の十分大きな部分の形状が問題なのである。（未解決）。

注意 ii)　上の問題を追求する上で，もう一つ現われてくるのは，方程式の記述の問題である。例えば，$\overline{D(\varphi^t)}$ が $t = t_0$ で不連続に変化する場合，この点で点測度が現れる。即ち $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$ の代りに

$$6)\qquad \frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u) - \delta_{t-t_0}\left(I - P_{\overline{D(\varphi^t)}}\right)u$$

となる。一般に，変化が有界変動となる場合まで取込む必要があるが，少々面倒である。

注意 iii)　N.S. 方程式などもそうだが，弱解の存在が得られるときは，何等かの意味で $\varphi^t(u)$ の有界性（普通 $\int_0^T \varphi^t(u)dt < \infty$）が成立することが多い。$\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$ の弱解がこの程度の性質しか持たないとき，解の一意性は期待できそうにな

いが、それなりに興味があると思われる。

§Ⅲ　具体例

例1. §0の方程式2)に当るものを考えよう。

7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = \Delta u \quad \text{in } \Omega & (\Omega \text{ は } \mathbb{R}^N \text{ の有界領域}) \\ u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & 0 \le t < t_0 \\ 0 & t_0 \le t < T \end{cases} \end{cases}$$

8) $$\varphi^t(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \left\{ \sum \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \right\} dx & u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & 0 \le t < t_0 \\ 0 & t_0 \le t < T \end{cases} \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく。熱方程式7)は同じ境界条件のDirichlet積分8)の劣微分で記述されることは良く知られている：

4) $$\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$$

この方程式の解 $u(t)$ は $\varphi^{t_0}(u(t_0)) = \infty$ となるのでK-Y理論に含まれないが $L^2(\Omega)$ 値関数として絶対連続である。境界条件の変化が有界変動のときも同じである。

例2. 非柱状領域の熱方程式を考える。

9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u \quad \text{in } \Omega(t) = \begin{cases} [-1,\ 1] & 0 \le t < t_0 \\ [0\ ,\ 2] & t_0 \le t \le T \end{cases} \\ u|_{\partial\Omega(t)} = 0 \end{cases}$$

10) $$\varphi^t(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega(t)} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx & u|_{\partial\Omega(t)} = 0 \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおけば、劣微分の方程式 4) の形が得られる。解 $u(t)$ は、有界変動であるが、K-Y理論には含まれない。境界の変化が有界変動のときはよく分らないが、無条件変動（uの）は有界になりそうである。

例3　係数が変化する場合.

$$
11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x_k} u\right) & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}
$$

$$
12)\quad \varphi^t(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sum a_{jk}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx & u|_{\partial\Omega} = 0 \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}
$$

とおけば、方程式 11) は劣微分の形となる。ただし

$$
K(t)|\xi|^2 \leq \sum a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \leq C K(t)|\xi|^2 \qquad \xi \in \mathbb{R}^N
$$

とする。$t \to t_0$ のとき $K(t)$ がゆっくり ∞ になれば（$K(t) \sim \log|\log|t-t_0||$ 位で良いと思う），方程式 11) の解 u について $\varphi^t(u(t)) \longrightarrow \infty$，しかし $u(t) \not\to 0$ $(t \to t_0)$ となるのが一般的である。解は無条件連続となるが、僅かな時間でも $K(t)$ が無限大であり続ければ（$K(t) = \infty,\ t \in [t_0, t_0+\varepsilon)$） $u(t) = 0,\ t > t_0$ となり不連続解となる。$K(t) = \infty$ となるのが，$t = t_0$ のみであっても $u(t) = 0,\ t > t_0$ としたい場合があり、そのとき再び方程式の記述の問題（前節，注意 ii）が現れる。

以上の例は実質的に線形であって簡単に取扱えるのだから、我々の理論に是非取込みたい。一旦これ等を含む抽象論が出来れば、従来の方法では複雑すぎて取扱えないものまで入ってしまうことも期待できるのである。

§IV 正則解　　Banach空間における線形発展方程式

13)　　$\frac{du}{dt} = A(t)u$

が放物型であるとは、各 $A(t)$ が正則半群の生成作用素であることと定義するのが普通である。このことから、解 $u(t)$ が実軸の複素近傍に正則に拡張される場合が興味があるが、これについては Kato-Tanabe-Masuda による正則発展作用素の理論（増田 [9] 参照）がある。定義域 $D(A(t))$ が動く場合は一般に複雑であるが、その場合を含めて解が正則となる条件を決定したのであるから、驚嘆すべき成果である。これを非線形に拡張することは成功していない。定義域が動く場合は、線形であっても放物型の仮定がないと面倒である。（存在と一意性について A. Yagi [11], Furuya-Komura [4] 参照）放物型方程式は、定義域が動く場合もうまくゆくのが長所なので、非線形に拡張する際も定義域が動く場合まで含ませたい。この方向で、分数巾の方法（$D(A(t,u)^{\frac{1}{m}})$ = 一定）を用いて準線形放物型方程式

14) $\frac{du}{dt} = -A(t,u)\,u + f(t,u)$

の解の正則性を論じたものに K. Furuya [2, 3] がある．応用範囲は少し狭いが，抽象論としては一応の成果である。

さて，我々の非線形方程式

15) $\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u)$

も放物型と見なされているから，当然，正則半群から導かれる放物型の理論との関係が問題となる．特に，Neumann 問題相当の，$D(\varphi^t)$ = 一定（$D(A(t,u)^{\frac{1}{2}})$ = 一定）であって $D(\partial\varphi^t)$（$D(A(t,u))$）の移動く場合は，劣微分型に有利と考えられているから，この型の正則半群ー正則解を追求するのは，応用上も興味がある。次の様に設定する．

H：実 Hilbert 空間

$\mathfrak{H}$：H の複素化（$H \oplus iH$）

F：H の dense subspace 強いノルム $|||\cdot|||$ で完備

$\mathfrak{F}$：F の複素化（$F \oplus iF \subset \mathfrak{H}$）

φ は次の条件をみたすものとする：

(i) F のある複素近傍 $\mathcal{V}(F)$ 上で定義されていて

$\varphi : \mathcal{V}(F) \longrightarrow \mathbb{C}$ は Frechet 微分可能

(ii) φ の二階微分 $\delta^2\varphi$ は次の"凸"条件をみたす：

$\exists K > 0$，$\mathrm{Re}\,\delta^2\varphi(x)(h,\bar{h}) \geq K|||h|||^2$，$x, x+h \in \mathcal{V}(F)$

このとき 15) の解は，実軸のある複素近傍で正則となる。

この結果は，一応準線形放物型方程式に適用できるようであるが，凸函数の劣微分型というのは強い制限であるし，放物型方程式は Banach 空間で論じたい場合も多いので，分数巾の方法との優劣は簡単には判定できない。

抽象論としては，$D(\varphi^t)$ が動く場合も考えることが出来るが，適用例が果して意義があるか，問題である。この場合を含めて，劣微分型方程式の正則解については，次の機会に論ずることとしたい。

文献

[1] Dvoretzky-Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. 36 (1950) 192-197

[2] K. Furuya, Analyticity of solutions of quasilinear evolution equations, Osaka J. Math. 18 (1981) 669-698

[3] K. Furuya, ―――――――――――――― II Osaka J. Math. 20 (1983) 217-236

[4] Furuya-Komura, On linear evolution equations of non-parabolic type with variable domains, preprint

[5] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, AMS (1955)

[6] Kato - Tanabe, On the analyticity of solutions of evolution equations, Osaka J. Math. 4 (1967) 1 - 4

[7] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic inequalities, Israel J. Math. 22 (1975) 304 - 331

[8] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ. 30 (1981) 1 - 87

[9] 増田久彌, 発展方程式, 紀伊國屋書店 (1975)

[10] J. Watanabe, On certain nonlinear evolution equations, J. Math. Soc. Japan 25 (1973) 446 - 463

[11] A. Yagi, Differentiability of families of the fractional powers of self-adjoint operators associated with sesquilinear forms, Osaka J. Math. 20 (1983) 265 - 284

[12] Y. Yamada, On nonlinear evolution equations generated by the subdifferentials, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA (1976) 491 - 515

[13] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations, Nagoya Math J. 70 (1978) 111-125

[14] A. Yanagihara. 修士論文, 東京女子大学, (1981)

[15] S. Yotsutani, Evolution equations associated with the subdifferentials, J. Math. Soc. Japan 31 (1979) 623-646

訂　正

§I で述べた定理は誤りである。次の様に訂正する。

定理　Banach 空間 X の値をとる函数 f が無条件積分可能ならば、f の不定積分

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds + C$$

は無条件連続であって、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次の様な F_ε が存在する：

$$F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)\,ds + C.$$

$$f_\varepsilon(t) = f(t) \quad {}^\forall t \in [0,T] \setminus U_\varepsilon, \quad m(U_\varepsilon) < \varepsilon,$$

F_ε は殆んど到る所強微分可能であって

$$F_\varepsilon'(t) = f_\varepsilon(t), \qquad \text{unc. var}\,(F - F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

（unc. var. は無条件変動を表わす）。

逆はもとのまゝ成立する。

無条件積分可能というのは「可測かつ Birkhoff 積分可能」と同値である。可測性を仮定しないと実用上不便であると思う。

種々御教示下さった方々に感謝する。