数理解析研究所講究録
第 541 巻 1984 年 144-160

Sobolev - Poincaré 型不等式に付随する非線形楕円型方程式について

東海大 理・数 大谷 光春

1. 序　ある種の非線形楕円型方程式と Sobolev 型不等式とは、深い関連のある事は良く知られている。ここでは、次の Sobolev-Poincaré 型の不等式を考える。

(S.P)　$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad {}^\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で、$\|\nabla u\|_{L^p} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$ とする。

この不等式の最良定数 $C_1 = \sup\{R(u);\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0\}$, $R(u) = \|u\|_{L^q} / \|\nabla u\|_{L^p}$, を実現する関数を v とすれば, i.e., $R(v) = C_1$, $p \neq q$ の時、適当な定数 $\lambda \neq 0$ が存在して、$\lambda v = u$ は次の非線形楕円型方程式の非自明解を与える。(後述, 定理1 を参照)

$$
(E)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = |u|^{q-2} u(x) & \text{in } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{on } x \in \partial\Omega. \end{cases}
$$

Lyusternik-Schnirelman のカテゴリー理論に依れば、この種の方程式は一般に、少なくとも可算個の非自明解（弱解）をもつ事が知られている。（cf. Berger [2], Browder [3], Coffman [4].）それ等の解は、汎関数 $R(u)$ のある種の位相的部分集合上の critical points として実現される。　一方、$p=2$ の場合には、分岐理論との関連から、研究されている。例えば、Motoni-Tesei [5], Berestycki [1] は $N=1$, $\Omega=(0,1)$, $q>2$ の時に、(E) の非自明解のすべてを数え上げている。又、常微分方程式論の立場からも、特別な場合として $p=2$, $N=1$ の時を含む同様な方程式が研究されている。（cf. Nehari [6], Ryder [12]）

ここでは、(E)の非自明解の存在と非存在、解集合の構造などについて、得られたいくつかの結果について報告する。

2. 非自明解の存在と非存在　以後、特にことわらない限り、$p \neq q$ かつ $p, q \in (1, +\infty)$ とする。この時、次の結果が成立する。

定理 1. (i) $q < \frac{Np}{N-p}$ の時、(E) は $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ に属する非自明解をもつ。
(ii) $q > \frac{Np}{N-p}$ の時、Ω が星状領域 (*1) であれば、(E) は $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ に属する非自明解を持たない。

(iii) $q=\frac{Np}{N-p}$ の時、Ω が星状領域であれば、(E) は $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に属する、定符号値の非自明解を持たない。

(証明の概略) (i) $\varphi^1(u)=\frac{1}{p}\int|\nabla u|^p dx$, $\varphi^2(u)=\frac{1}{q}\int|u|^q dx$ と置けば、これ等の形式的 Fréchet 微分 $\partial\varphi^i$ は

$$\partial\varphi^1(u)=-\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\quad \partial\varphi^2(u)=|u|^{q-2}u$$ となり

(1) $g^i=\partial\varphi^i(u) \iff \varphi^i(v)-\varphi^i(u)\geqq(g^i,v-u)\quad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)$

である事に注意する。 $q<\frac{Np}{N-p}$ であったから

(2) $R(u_1)=\max\{R(v);\ v\in W_0^{1,p}(\Omega),v\neq 0\}$, $R(v)=\dfrac{\{p\,\varphi^1(v)\}^{1/p}}{\{q\,\varphi^2(v)\}^{1/q}}$,

なる u_1 が存在する。($\because$ $W_0^{1,p}(\Omega)$ は $L^q(\Omega)$ にコンパクトに埋め込まれている。) 更に、$R(v)$, $\varphi^1(v)$, $\varphi^2(v)$ はそれぞれ、0次, p次, q次 の斉次関数であるから、適当に定数倍する事によって、次の (3) 式を満す様にできる。

(3) $p\,\varphi^1(u_1)=q\,\varphi^2(u_1)$

簡単な計算によって、$p>q$ の場合には、(2) かつ (3) を満足する u_1 は、次の (4) 式を満す事がわかる。(cf. 図1)

(注1) Ω が星状領域であるとは、Ω 内に適当な点 x_0 が存在して、$\partial\Omega$ 上の任意の点 x と x に於ける外向き法線ベクトル $n(x)$ とが $(x-x_0)\cdot n(x)>0$ を満す事である。

(4) $J(u_1) = \min\{J(v);\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$,

$J(v) = \varphi^1(v) - \varphi^2(v)$.

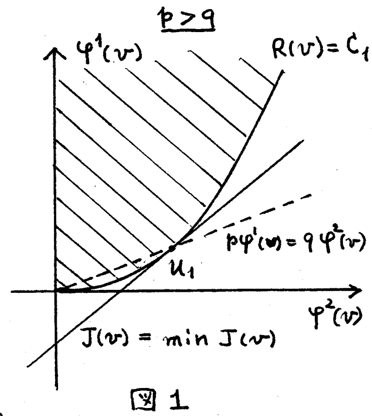

図1

即ち、$\varphi^1(u_1) - \varphi^2(u_1) \le \varphi^1(v) - \varphi^2(v)$ $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

であるから、(1) の関係より

$$\varphi^1(v) - \varphi^1(u_1) \ge \varphi^2(v) - \varphi^2(u_1) \ge (\partial\varphi^2(u_1), v - u_1) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

これは $\partial\varphi^2(u_1) = \partial\varphi^1(u_1)$ を意味する。

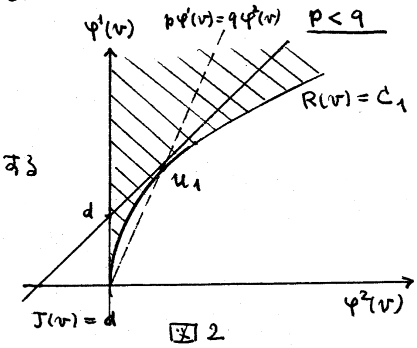

図2

$p < q$ の場合には、(2)-(3) を満足する u_1 は $J(v)$ の minimum を与えないが、ある種の min-max を実現するので（図2を参照）、同様の議論でやはり $\partial\varphi^1(u_1) = \partial\varphi^2(u_1)$ を導く事ができる。この様に構成した解は、弱解（i.e. $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ で (E) を超関数の意味で満たす）であるので、regularity の議論は別に行なわねばならない。$u_1 \in L^\infty(\Omega)$ を得るには、$\int (E) \cdot |u|^{r-2}u\,dx$ を計算する事などにより、$\|u\|_{L^r}$ の r $(1 \le r < \infty)$ に依存しない評価を導けば良い。（詳しくは [10] を参照）

(ii) 及び (iii) の証明. (E) の解 u が十分滑らか（例えば $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$）であるとして、形式的に $\sum_{i=1}^{N} \int (E) \cdot x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx$ を計算する事により、次の Pohozaev 型の等式を得る。(cf. [13])

(5) $$\frac{N-p}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p x\cdot n\, d\Gamma = \frac{N}{q}\int_\Omega |u|^q dx$$

一方、$\int (E)\cdot u\,dx$ より

(6) $$\sum_{i=1}^{N}\int\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \int |u|^q dx.$$

ここで、Ω は星状領域であったから $x\cdot n > 0$ a.e. $x\in\partial\Omega$ に注意すれば、$q > \frac{NP}{N-P}$ の時 $\int_\Omega |u|^q dx = 0$，即ち $u\equiv 0$.
又、$q = \frac{NP}{N-P}$ の時、$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$ a.e. $x\in\partial\Omega$ $i = 1, 2, \cdots, N$.
よって $\int_\Omega (E)\cdot 1\,dx$ を計算する事により $\int_\Omega |u|^{q-2}u\,dx = 0$,
特に $u(x)\geq 0$ 又は $u(x)\leq 0$ であれば $u\equiv 0$.

一般の $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に対しては (5) 式は正当化できないが、(E) の適当な近似方程式 $(E)_\varepsilon$ の近似解 $u_\varepsilon\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ を経て、u についての (5) と同様な不等式を作る事が出来、定理の主張が証明される。 [Q.E.D]

__注意__ 後述する様に、方程式 (E) は $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$ となる点で、退化している為、一般には $u\in C^2(\Omega)$ とならない。しかし $u\in C^1(\bar\Omega)$ 又は $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 程度は十分期待できるが、今の所未解決の問題である。

3. 解集合の決定（$N=1$ の場合）

非線形楕円型方程式の解の個数を、下から評価する（例えば、少なくとも可算個の非自明解が存在する等）事は色々と研究されているが、解のすべてを数え上げる事は、一般に、非常に困難である。しかし、空間次元 N が 1 である場合には、その特殊性により、解集合を決定できる場合がある。ここで扱う方程式 (E) についても、$\Omega=(0,1)$ の場合には、解集合は可算であり、その構造も詳しく調べる事ができる。この際、(E) の正値解の一意性が、重要な役割を演ずる。

3.1. 解の regularity

$N=1$ の場合には、その特殊性により、解の regularity を詳しく調べる事ができる。

定義 3.1 u が (E) の解であるとは、$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ かつ u が (E) を超関数の意味で満す事をいう。以後、$S(a,b)$ によって $\Omega=(a,b)$ の時の (E) の非自明解全体を表わすものとする。

命題 3.2 $u\in S(a,b)$ ならば $u\in C^{\alpha}([a,b])\cap C^{\langle q\rangle}([a,b]\setminus Z)$.

ここで、$Z=Z(u)=\{x\in[a,b]\,;\ u_x(x)=0\}$, $\alpha=\min\left(\langle q\rangle,\ \left\langle \frac{2-p}{p-1}\right\rangle+1\right)$,

$$r=\begin{cases}+\infty & r\text{ が偶整数},\\ \min\{n\,;\ n\geqq r\ \ n\in\mathbb{N}\} & \text{その他}.\end{cases}$$

更に、もし $p>2$ であれば $u(x)$ は $x\in Z$ で 2 回微分可能でない。

注意 (1) $p>2$ の時 $\alpha=1$ となり、特に $u\in C^1([a,b])$.

(2) $1<p<2$ の時、$\alpha\geq 2$ となり、特に $u\in C^2([a,b])$.

(3) もし $p=(2m+2)/(2m+1)$, $m=0,1,\cdots$, で q が偶数であれば、$\alpha=q=\infty$, 即ち $u\in C^\infty([a,b])$.

(4) 後に示される様に $Z(u)$ は有限個の点からなる。

命題 3.2 の証明 まず $W_0^{1,p}(a,b)\hookrightarrow C([a,b])$ であるから、$u\in C([a,b])$ よって $|u|^{q-2}u\in C([a,b])$. 更に、

$$\int_a^b |u_x|^{p-2}u_x(x)\,\varphi_x(x)\,dx = \int_a^b -\int_a^x |u|^{q-2}u(\xi)\,d\xi\;\varphi_x\,dx \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(a,b)$$

であるから、

(7) $|u_x|^{p-2}u_x(x) = -\int_a^x |u|^{q-2}u(\xi)\,d\xi + \text{Const.} \equiv v(x)$ a.e. $x\in(a,b)$.

(8) $u_x(x) = |v|^{p^*}v(x)$, $p^*=(2-p)/(p-1)$.

よって、$v(x)\in C^1$, 特に $u(x)\in C^1([a,b])$. ここで、$u\in C^r([a,b])$ (resp. $C^r([a,b]\setminus Z)$) であれば、関数 $t\mapsto|t|^\beta t$ は、$C^{<\beta>}$ に属するから、(7)-(8) より、$u\in C^\ell([a,b])$ (resp. $u\in C^{\hat{r}+2}([a,b]\setminus Z)$) を得る。ここで $\ell=\min(<p^*>+1,\hat{r}+2)$, $\hat{r}=\min(r,<q>-2)$. この操作を、$1\leq r\leq \ell$ (resp. $1\leq r\leq\hat{r}+2$) まで続ければ、命題の主張の前半が示される。

次に、$u(x)$ がすべての点で2回微分可能であるとすれば、(E) は $(p-1)|u_x|^{p-2}u_{xx}(x) = -|u|^{q-2}u(x)$ と書きなおせるが、$|u(x)|$ の最大値を与える点 $x=x_0$ で、左辺 $=0$ となるから $u\equiv 0$ でなくてはならない。 [Q.E.D.]

3.2. 正値解の存在と一意性. 定理1 の (i) で構成した、非自明解 u は

(9) $\|u\|_{L^q} = C_1 \|u_x\|_{L^p}$, $C_1 = \sup\left\{ \dfrac{\|v\|_{L^q}}{\|v_x\|_{L^p}} ; v\in W_0^{1,p}(a,b), v\neq 0 \right\}$.

かつ

(10) $\|u\|_{L^q}^q = \|u_x\|_{L^p}^p$

を満たす $W_0^{1,p}(a,b)$ の元として与えられたが、もし u が (9),(10) を満たせば、$|u(x)|$ も $W_0^{1,p}(a,b)$ の元であり、(9) かつ (10) を満たすから、$|u(x)|$ も (E) の解である。よって、命題3.2 より、(9) かつ (10) を満たす (E) の非自明解（この集合を以後、$S_1(a,b)$ と記す。）は、(a,b) で定符号（i.e. (a,b) に零点をもたない）なる事が、わかる。実は、更に $S_1(a,b)$ の構造は、次の様に決定される。

定理 2. (E) は一意的な正値解 u_1 をもち、$S_1 = \{\pm u_1\}$。

(証明)　簡単の為，$(a,b)=(0,1)$ として，証明の概略を述べる。

(オ一段)　<u>任意の S_1 の元 u は $x=\frac{1}{2}$ で最大値をとる</u>。

$u(x)$ が $x=\beta\in(0,\frac{1}{2})$ で最大となれば，

$$v(x)=u(x)\quad 0\leq x\leq\beta\ ,\quad v(x)=u(2\beta-x)\quad \beta\leq x\leq 2\beta$$

で $v(x)$ を定義すれば，v は (E) の $(0,2\beta)$ での解となる。更に，

(11)　$$W(x)=\alpha^{\delta}v(\alpha x)\quad ,(\alpha=2\beta\ ,\ \delta=p/(q-p))\quad x\in(0,1)$$

なる変換で W は (E) の $(0,1)$ での解になるが，簡単な計算により，$\|W\|_{L^q}/\|W_x\|_{L^p}>C_1$ となり (9) に矛盾する。

(オ二段)　<u>正値解は，$S_1(0,1)$ の中で一意的である</u>。

まず，すべての正値解 W は

(12)　$$q(p-1)|W_x(x)|^p+p|W(x)|^q=q(p-1)|W_x(0)|^p\quad \forall x\in(0,1)$$

を満たす事に注意する。u,v を $S_1(0,1)$ に属する相異なる，正値解とすれば，(9),(10),(12) より $u_x(0)=v_x(0)$。よって，前段の結果及び (12) より，$u(\frac{1}{2})=v(\frac{1}{2})$ を得る。これより，ある区間 $[\alpha,\beta]\subset[0,\frac{1}{2}]$ が存在し

$$v(x)>u(x)\quad \forall x\in(\alpha,\beta)\quad かつ\quad v(x)-u(x)=v_x(x)-u_x(x)=0\quad x=\alpha,\beta$$

となる。ここで，(7) 式を (α,β) で積分すれば，矛盾が導かれる。

(オ三段)　<u>正値解は，$S(0,1)$ の中で一意的である</u>。

u_1 を $S_1(0,1)$ の中の一意的な正値解，v を $S(0,1)\setminus S_1(0,1)$ に属する他の正値解とすれば，(9),(10),(12) より，ただちに

$p<q$ (resp. $p>q$) の場合、$(u_1)_x(0) \geqq v_x(0)$ (resp. $(u_1)_x(0) \leqq v_x(0)$) の可能性が否定される。 他の場合には、$u_\alpha(x) = (1/\alpha)^{p/(q-p)} u_1(x/\alpha)$ $\alpha = \left((u_1)_x(0)/v_x(0) \right)^{(q-p)/q} > 1$，とおくと $(u_\alpha)_x(0) = v_x(0)$ であるから u_α と v とに (12) を適用して、前段と同様な矛盾を導く事ができる。 [Q.E.D]

系 一意正値解 $u_1(x)$ は $x=1/2$ に関して対称である。

(証明) $u_1(1-x)$ も (E) の正値解である事に注意すれば良い。

3.3. $S(0,1)$ の構造決定

$$\begin{cases} u_k(x) = (-1)^m u_{1/k}\left(x-\frac{m}{k}\right), & x \in \left[\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}\right], \quad m=0,1,\cdots,k-1, \\ u_{1/k}(x) = k^{p/(q-p)} u_1(kx), & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \end{cases}$$

で $u_k(x)$ を定義すれば、明らかに $u_k(x)$ は丁度 $(0,1)$ に $(k-1)$ 位の零点をもつ (E) の非自明解である。 逆に、この u_k を使って $S(0,1)$ の構造が決定できる。

定理 3 $S(0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\pm u_k\}$.

証明 u を $S(0,1)$ の任意の元とする。 $|u(x_0)| = \max_{0\leq x\leq 1} |u(x)|$ とすれば、x_0 を含むある区間 $[\alpha, \beta]$ が存在して、

$u(\alpha)=u(\beta)$ かつ $|u(x)|>0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$ となる。即ち、$|u(x)|$ は (E) の $[\alpha,\beta]$ での正値解となる。よって (12) 式より $u_x(\alpha)=-u_x(\beta)\neq 0$ となる。よって、($\beta=1$ でなければ) もう一つの点 $\gamma\in(\beta,1]$ が存在して、$|u(x)|$ は (E) の (β,γ) に於ける正値解となる。正値解の一意性及び (12), (9), (10) より $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ かつ $u(x)$ の $[\alpha,\beta]$ 及び $[\beta,\gamma]$ に於ける曲線は $[0,\beta-\alpha]$ に於ける (E) の正値解のそれに合同でなければならない。同様の議論を、続ければ、定理の主張を得る。

[Q.E.D]

3.4. 非自明解の特徴づけ　先に述べた様に、正値解 u_1 は、(9) 及び (10) で特徴づけられていた。即ち、

命題 3.3. $R(u_1)=C_1=\max\{R(v);\ v\in W_0^{1,p}(0,1),\ v\neq 0\}$

かつ、u が上の max を達成すれば、適当な $\lambda\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$ が存在して、$u=\lambda u_1$ となる。

$\{u_k\}_{k\geq 1}$ に対しても、同様な特徴づけが以下の様にしてできる。即ち、$\mathcal{W}_k$ を $W=W(m_0,m_1,\cdots,m_k)=\{u\in W_0^{1,p}(0,1)\setminus\{0\};$ $u(m_i)=0$ for $0=m_0<m_1<\cdots<m_k=1\}$ なる集合全体のなす族とすると、次が成立する。(証明は [9] 参照)

定理4. $p>q$ の時，次が成立する。

$$\min_{W\in\mathcal{W}_k}\ \max_{u\in W} R(u) = R(u_k) = \frac{C_1}{k}.$$

更に，もし $u\in C^1(0,1)$ が上の min-max を達成すれば，適当な $\lambda\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$ が存在して，$u=\lambda u_k$ となる。

（注意）$p<q$ の時にも $\mathcal{W}_k$ を適当な $\mathcal{W}_k$ の部分集合に置きかえれば，同様な特徴づけができる。

3.5. 安定性，不安定性

(E) の解は，次の放物型方程式の定常解と見做す事ができる。

$$(P)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-|u|^{q-2}u=0, & (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty),\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in(0,\infty),\\ u(x,0)=a(x), & x\in(0,1).\end{cases}$$

空間次元が1次元なので，$\forall a\in W_0^{1,p}(0,1)$ に対して (P) は，いつも，局所解（tについて）を持つ事が，わかっている。（cf. [7]）

（ここで，$u(x,t)$ が (P) の $[0,T]$ に於ける解であるとは，$u\in C([0,T];W_0^{1,p}(0,1))$ かつ $\partial u/\partial t$，$\partial(|\partial u/\partial x|^{p-2}\partial u/\partial x)/\partial x\in L^2((0,T)\times(0,1))$ で u が (P) を満たす事をいう。）

自明解 $u\equiv 0$ と，非自明解 $\{\pm u_k\}_{k\in N}$ の安定性に関して，次の結果が得られる。

定理5. $p<q$ かつ $2<q$ の時、次の意味で非自明解は、不安定かつ自明解は安定となる。即ち，$u_{\lambda,k}(x,t)$ を $a(x)=\lambda u_k(x)$，$\lambda\in\mathbb{R}^1$ とした時の（P）の解とすれば，

(1) $|\lambda|<1$ ならば $\lim_{t\to\infty}\|u_{\lambda,k}(\cdot,t)\|_{W_0^{1,p}}=0$，

(2) $|\lambda|>1$ ならば $\|u_{\lambda,k}(\cdot,t)\|_{W_0^{1,p}}$ は有限時間で爆発する。

特に，$a\in W_0^{1,p}(0,1)$ かつ $\sup\frac{|a(x)|}{u_1(x)}<1$ (resp. $1<\inf\frac{|a(x)|}{u_1(x)}$) であれば，（P）の解 $u(x,t)$ は $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{W_0^{1,p}}=0$ (resp. $\|u(\cdot,t)\|_{W_0^{1,p}}$ は有限時間で爆発する。

定理5′ $p<q$ かつ $1<q\leqq 2$ の時、定理5の主張で"有限時間で爆発する"を"無限時間で爆発する"としたものが成立する。

定理6. $p>q$ の時、次の意味で非自明解は、大域的に安定で、自明解は不安定になる。即ち、$u_{\lambda,k}(x,t)$ を定理5と同じく定義すれば、$\forall\lambda\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$ に対して、

$$u_{\lambda,k}(\cdot,t)\longrightarrow \mathrm{sign}(\lambda)\cdot u_\lambda(\cdot)\quad \text{in } W_0^{1,p}(0,1)\quad \text{as } t\to+\infty.$$

特に、$0<\inf\frac{a(x)}{u_1(x)}$ (resp. $\sup\frac{a(x)}{u_1(x)}<0$) ならば、（P）の解は $t\to+\infty$ とした時 $u_1(x)$ $\overset{\text{resp.}}{(-u_1(x))}$ に $W_0^{1,p}(0,1)$-normで近づく。

これ等の結果の証明は (P) に対する、比較定理と (P) の解の漸近挙動が、次の3つの場合に分類できるという事実を組みあわせて行なわれる。（詳しくは〔9〕参照）

(P) の解 $u(x,t)$ の漸近挙動は次のうちの一つである。（cf.〔8〕）

(1) $u(x,t)$ は $[0,\infty)$ に於ける (P) の大域解であり

$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{W_0^{1,p}} < +\infty$ かつ $\omega(u) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{u(s)\,;\, s\geq t\}}^{L^2} \subset S(0,1) \cup \{0\}$.

(2) $u(x,t)$ は $[0,\infty)$ に於ける (P) の大域解であり

$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^2} = \infty$，これは「$p=q$」又は「$p<q$ かつ $1<q\leq 2$」の時のみ起こり得る。

(3) $\|u(t)\|_{L^q}$ は有限時間で爆発する。これは $p<q$ かつ $2<q$ の時のみ起こり得る。

注意　$1<q<2$ の場合には、(P) の解の一意性がくずれるので、(cf.〔11〕) 上の定理5′及び6は正しくない。しかし、定理の主張を満たす解 $u_{\lambda,t_0}(\cdot,t)$ を常に構成できる。

3.6 $p=q$ の場合に関する注意

$p=q$ の場合には、$p=2$ 即ち $-u_{xx}=u$ の場合を考えてみれば、容易に想像がつく様に、上の状況と全く異なる。実際、次の結果が成立する。

定理7　S_α を (E) の $(0,\alpha)$ に於ける $p=q$ の時の解の集合とすれば、ある正定数 α_p と関数列 $\{u_n\}_{n\in N}$ があって次を満たす。

(1)　$\alpha \neq n\alpha_p$ ならば　$S=\{0\}$,

(2)　$\alpha = n\alpha_p$ ならば　$S=\{\lambda u_n\}_{\lambda\in R^1}$.

ここで、$u_1(x)$ は $(0,\alpha_p)$ で正値であり、$x=\frac{\alpha_p}{2}$ に関して対称、かつ u_n は $u_n(x)=(-1)^k u_1(x-k\alpha_p)$, $x\in [k\alpha_p,(k+1)\alpha_p]$, $k=0,1,\dots,n-1$ で与えられる。

注意 (1)　α_p は Beta 関数を使って、$\alpha_p=\frac{2(p-1)^{1/p}}{p}B(\frac{1}{p},\frac{1}{p}+1)$ と表わされる。

(2)　$\Omega=(0,\alpha)$ の長さ α をパラメーターに取るかわりに、

λ をパラメーターとして

$$(E)_\lambda \quad -(|u_x|^{p-2}u_x)_x(x)=\lambda|u|^{p-2}u(x) \qquad x\in(0,1)$$

を考えれば、定理7は"固有値問題 $(E)_\lambda$ の固有値は $\lambda=\lambda_k=(k\cdot\alpha_p)^p$　$k=1,2,\cdots$ で与えられる"という事を主張している。

REFERENCES

[1] BERESTYCKI, H., Le nombre des solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques, J. Functional Analysis 40 (1981), 1-29.

[2] BERGER, M.S., A Sturm-Liouville theorem for nonlinear elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 543-582.

[3] BROWDER, F.E., Existence theorems for nonlinear partial differential equations, Proc. Symp. in Pure Math, 16, AMS, Providence, Rhode Island, 1970, 1-60.

[4] COFFMAN, C., Lyusternik-Schnirelman theory and eigenvalue problems for monotone potential operators, J. Functional Analysis 14, (1973), 237-252.

[5] DE MOTTONI, P. and A. TESEI, On the solutions of a class of nonlinear Sturm-Liouville problems, SIAM J. Math. Anal. 9 (1978), 1020-1029.

[6] NEHARI, Z, Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations, Acta Math. 105 (1961) 141-175.

[7] ÔTANI, M., Non-monotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problem J. Differential Equations, 46 (182), 268–299

[8] ÔTANI, M., Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 30, Qualitative Theory of Differential Equations, North-Holland 1981, P. 795–809.

[9] ÔTANI, M., On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities, to appear in Nonlinear Analysis.

[10] ÔTANI, M., Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear elliptic equations, to appear.

[11] ÔTANI, M., Non uniqueness of solutions of some nonlinear parabolic equations, to appear.

[12] RYDER, G.H., Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations, Pac. J. Math. 22 (1967), 477-503.

[13] POHOŽAEV, S.I., Eigenfunctions of the equations $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Sov. Math. Doklady 5 (1965), 1408 – 1411.