

Global Knots の Conjugation と Prime 分解

東大 理 宮崎 桂

(Katura Miyazaki)

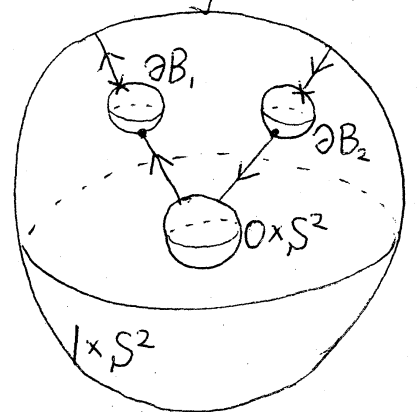
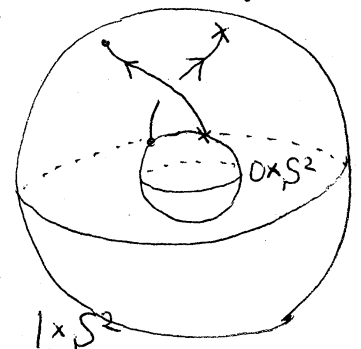
S^3 の knot がただ一通りの prime 分解を持つことはよく知られている。しかし、一般の 3次元多様体^体の knot については “prime knot” はしばしば定義されるが (e.g. Gordon-Litherland [1]) prime 分解自体は調べられていないようだ。closed, oriented 3-mfd の oriented knot の prime 分解については次の定理が成立する。(言葉の正確な定義は §1 参照)

定理 1 (存在条件) nontrivial knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が prime 分解をもつ必要十分条件は、meridian m ($\subset \partial N(K)$) が exterior $M - \text{Int} N(K)$ で essential なこと。

この定理は Haken の有限性定理 と innermost disk argument によりたやすく示される。([1] の section 1 に全ての link が prime 分解を持つと書いてあるのは誤り)。分解の規則を述べるには、§2 で定義される knot とうしの conjugation という概念が必要になる。さらに、prime knot \mathcal{R} と \mathcal{U} を次のように定義する。

\mathcal{R} を $S^1 \times S^2$ の knot で、 $(I \times S^2, I \times \{p_1, p_2\})$ から $0 \times S^2$ と $1 \times S^2$ を同一視して得られるものとする。

$2S^1 \times S^2$ の knot \mathcal{U} は次のように定める。2つの circle $t_1 \equiv S^1 \times p_1, t_2 \equiv S^1 \times p_2 (\subset S^1 \times S^2)$ に逆の向きを入れる。 $B_1, B_2 (\subset S^1 \times S^2)$ を $(B_i, B_i \cap t_i)$ が trivial ball pair かつ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ にとる。そして $(S^1 \times S^2, t_1 \cup t_2)$ から B_1, B_2 を取り除き、できた境界 $(\partial B_i, \partial B_i \cap t_i) \ i=1, 2$ を orientation reversing homeo. で同一視して得られる knot が \mathcal{U} である。



定理2 \mathcal{K} を prime 分解を持つ knot とする。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \dots \# \mathcal{K}_t \# n\mathcal{R} \# m\mathcal{U} \# (N, \phi)$$

$$= \mathcal{K}'_1 \# \dots \# \mathcal{K}'_{t'} \# n'\mathcal{R} \# m'\mathcal{U} \# (N', \phi) \text{ を } \mathcal{K}$$

の prime 分解とする。ただし、 $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}'_i$ は \mathcal{R} でも \mathcal{U} でもない prime knot、 N, N' は 3-mfd。このとき次が成立する。
の1)~3)

1) $t = t'$ 。 \mathcal{K}_i は \mathcal{K}'_i の conjugation (up to order)

2) $n + 2m = n' + 2m'$ 。もし $n = 0$ なら $n' = 0$ かつ

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{K}'_i \text{ (up to order).}$$

3) $N = N'$ 。

系 knot \mathcal{K} が \mathcal{R} を factor に含まない prime 分解を持てば、それが \mathcal{K} の唯一の prime 分解である。

定理3 \mathcal{K}_1 が \mathcal{K}_2 の conjugation なら、 $\mathcal{R} \# \mathcal{K}_1 = \mathcal{R} \# \mathcal{K}_2$ 。特に、 $\mathcal{R} \# \mathcal{R}$ は \mathcal{U} の conjugation なので $\mathcal{R} \# \mathcal{R} \# \mathcal{R} = \mathcal{R} \# \mathcal{U}$ 。

定理2, 3 から prime 分解は “conjugation” の範囲で多意性を持つことがわかる。本稿では conjugation の説明に主眼をおき、定理の証明については §3 でアイデアを述べ

るにとどめる。

くわしくは preprint [2] を参照のこと。

§1 M を closed, oriented 3-mfd, $K \subset M$ を oriented circle とした時、対 (M, K) を knot と呼ぶ。 K のことを knot と呼ぶこともある。2つの knot は、その間に orientation preserving homeo. が あるとき同じものとみなす。

2つの knot $\mathcal{K}_i = (M_i, K_i)$ $i=1, 2$ の和 $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ は対 $(M_1, K_1) \# (M_2, K_2)$ で def する。

$\mathcal{K} = (M, K)$ が trivial knot $\stackrel{\text{def}}{\iff} K$ に embedded disk がはいる。

\mathcal{K} が prime knot $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{K}$ は nontrivial knot で、任意の分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ に対して \mathcal{K}_1 or \mathcal{K}_2 は S^3 の trivial knot.

この定義によると、prime knot の exterior は irreducible 3-mfd.

分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \dots \# \mathcal{K}_n \# (N, \phi)$, N は 3-mfd, は $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ が prime knot のとき、prime 分解と呼ぶ。

§2 X を connected, oriented 3-mfd で $\partial X = T_1 \cup \dots \cup T_n$ は n 個の torus, d_1, \dots, d_n を $d_i \subset T_i$ なる essential oriented circle とする。対 $(X, \bigcup_{i=1}^n d_i)$ から次のように

knotを構成する。

構成 1 $(V_1, a_1) (V_2, a_2)$ を trivial ball pair とする。
 orientation revers. embedding $f: \bigsqcup_{\text{disjoint}} N(\alpha_i) \rightarrow \partial V - \partial a_1$ を
 $lk_{V_1}(f(\alpha_i), a_1) = +1$ になるようにとる。この時
 $M = X \cup_f V_1$ とおくと $\partial M = S^2$, arc a_1 は M に properly
 embedded. よって $(M, a_1) \cup (V_2, a_2)$ は knot \mathcal{K}
 を与える。 $(\partial M, \partial a_1) = (\partial V_2, \partial a_2)$

この \mathcal{K} は $(X, \cup \alpha_i)$ と f に依存しているようだが、実は
 f のとり方にはよらないことが次からわかる。

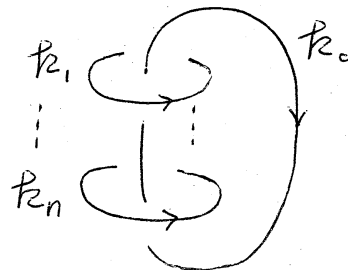
構成 2 上で作った \mathcal{K} を再構成する。

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (M, a_1) \cup (V_2, a_2) \\ &= (X \cup_f (V_1, a_1)) \cup (V_2, a_2) \\ &= X \cup ((V_1, a_1) \cup (V_2, a_2)) \quad \text{と書ける。} \end{aligned}$$

$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 - \partial X$ は n 個の annulus と 2 個の disk
 $N(\partial a_1)$ からなる。 (V_i, a_i) は trivial ball pair なので $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{K}_i$
 を図のような S^3 の link とすると、 $(V_1, a_1) \cup (V_2, a_2) =$
 $(S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(\mathcal{K}_i), \mathcal{K}_0)$ となる。

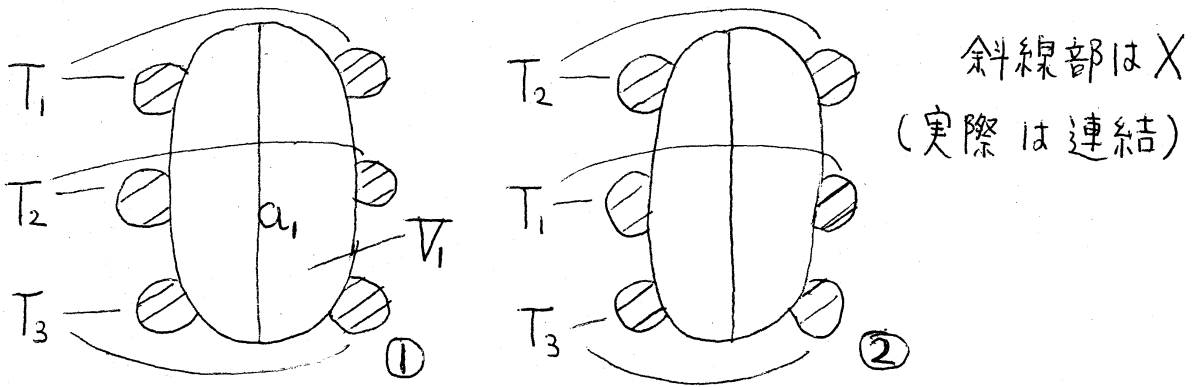
$$(C_n, \mathcal{K}_0) = (S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(\mathcal{K}_i), \mathcal{K}_0) \quad \text{とおく}$$

$$\mathcal{K} = X \cup_{\partial X = \partial C_n} (C_n, \mathcal{K}_0)$$

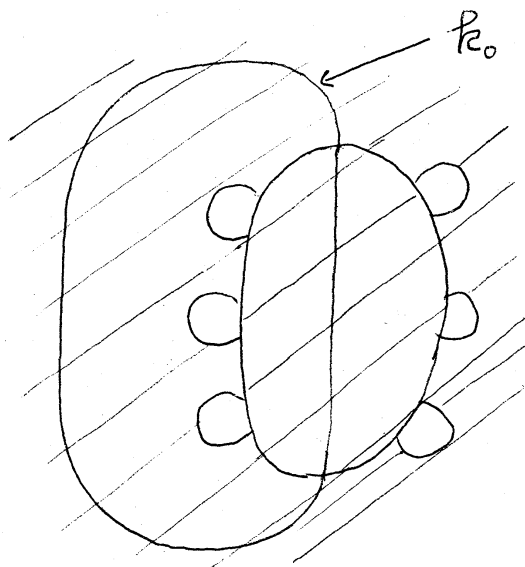


と書ける。

この union U は f から induce される orientation rev. homeo $\hat{f}: \bigcup^n T_i \rightarrow \bigcup^n \partial N(K_i) = \partial C_n$ で定められる。(この時、 $lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), K_i) = +1$, $lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), K_j) = 0$ となる)。 $\forall i \neq j$ に対して (C_n, K_i) の orientation $\underbrace{= 0}_{\text{for } \forall i, j}$ pres. autohomeo g で $g(\partial N(K_i)) = \partial N(K_j)$, $g(\partial N(K_j)) = \partial N(K_i)$, $g|_{\partial N(K_l)} = id$ for $l \neq i, j$. となるものがあるので \mathcal{K} は f のとり方にはよらない。(下図も参照せよ)



f のとり方により (M, α_1) の断面図は ①にも ②にもなる。



$\mathcal{K} = (M, \alpha_1) \cup (T_2, \alpha_2)$ の断面図。斜線部は C_3 (M, α_1) が ①でも ②でも \mathcal{K} は同じになる。

定義 上の $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ を \mathcal{K} の degree n の inducing-pair と呼ぶ。 $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ は \mathcal{K} の inducing-pair、 $(X', \bigcup_{i=1}^n \alpha'_i)$ は \mathcal{K}' の inducing-pair とする。もし $X = X'$, かつ 各 i ごとに α_i が α'_i or $-\alpha'_i$ に ∂X で isotopic (up to order) ならば、 \mathcal{K} は $(X, \bigcup_{i=1}^n \pm \alpha_i)$ を介して \mathcal{K}' の conjugation であるという。略して \mathcal{K} は \mathcal{K}' の conjugation と呼ぶ。

注意 任意の knot $(M, K) = \mathcal{K}$ について、 $\overbrace{E(\mathcal{K})}^{E(\mathcal{K})}$ と meridian (ただし oriented s.t. $lk(K, m) = +1$) との対 $(E(\mathcal{K}), \underbrace{m}_m)$ は \mathcal{K} の inducing-pair になる。 $(E(\mathcal{K}), -m)$ は $(M, -K) \equiv -\mathcal{K}$ の inducing-pair なので、 \mathcal{K} は $-\mathcal{K}$ の conjugation。

§3 最後に conjugation や inducing pair が どのように prime 分解にかかわってくるかを見る。

簡単のため、knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}'_1 \# \mathcal{K}'_2$ という 2通りの prime 分解を持つとする。このとき K と 2点で横断的に交わる separating 2-sphere S, S' があり、

$$(M, K) = (M_1, a_1) \bigcup_S (M_2, a_2) \quad \text{s.t. } (M_i, a_i)^\wedge = \mathcal{K}_i$$

$$= (M'_1, a'_1) \bigcup_{S'} (M'_2, a'_2) \quad \text{s.t. } (M'_i, a'_i)^\wedge = \mathcal{K}'_i$$
 となっている。

目標 \mathcal{K}_1 は \mathcal{K}' の conjugation (up to order).

証明方針 議論をやさしくするため、いくつか都合のいい仮定をおく。

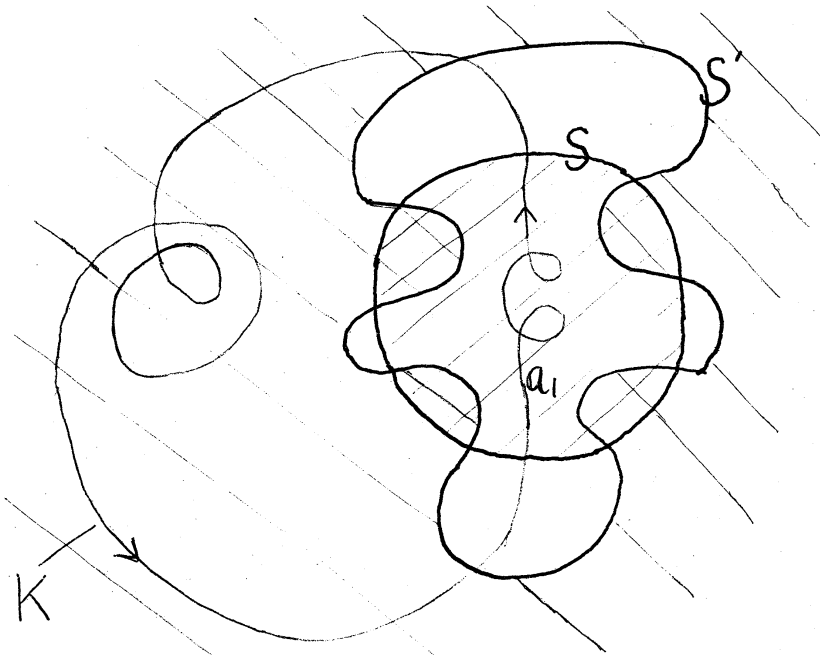
仮定1 S' は次の条件をみたす位置まで isotopy で動かせる。
 1° S' と S は横断的に交わる 2° $S' \cap \alpha_i = \emptyset$ 3° $S' \cap S$ は $\partial S - \partial \alpha_i$ に含まれる essential circle からなる。

および $\partial S' - \partial \alpha_i$

この結果 $S' \cap M_1$ は \emptyset または いくつかの annulus からなる。 \emptyset ならば $M_1 \supset M_1$ として一般性を失わないので $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}'$ 。以下 \emptyset でないとする。

仮定2 $M - S'$ は2つの連結成分 X, V からなる。さらに $X \neq S^1 \times D^2$, $\partial V = S^2$ である。

仮定1, 2の結果 ∂X はいくつかの torus からなり、 S, S', K の関係は断面図で次のページの図のようにかける。
 $\mathcal{K}_1 = (X \cup \underbrace{(V, \alpha_1)}_{2 \text{ annuli}})^{\wedge}$ とかけることに注意せよ。もし (V, α_1) が trivial ball pair ならば(仮定3)、 \mathcal{K}_1 は $(X, \alpha_1 \cup \alpha_2)$ を inducing pair に持つ。ただし、 α_1, α_2 は2つの annulus $\partial X \cap \partial V$ の core で $lk_V(\alpha_i, \alpha_i) = +1$ となるよう向きづけたもの。



/// 部分 M_1 , $////$ 部分は M_1' として一般性を失わない。 $####$ 部分は X : connected

\mathcal{K}_1 と同じことを \mathcal{K}_1' についても考える。 $\mathcal{V}' = M_1' - \text{Int } X$ とおくと $\mathcal{K}_1' = (X \cup (\mathcal{V}', a_1))^\wedge$ は (\mathcal{V}', a_1) が trivial ball pair ならば (仮定 3'), $(X, d_1' \cup d_2')$ から induce される。 (d_1', d_2' は d_1, d_2 と同様に定める)。
 $d_1 \cup d_2$ と $d_1' \cup d_2'$ は 2 tori の X 上で向きを無視して isotopic。故に \mathcal{K}_1' は $(X, \pm d_1 \cup \pm d_2)$ を介して \mathcal{K}_1 の conjugation とわかる。 \square

以上のように、innermost argument を途中であき

らめるのがミソである。実際には、仮定1は innermost で常に成立し、仮定3も K_1 や K_1' の primeness と $X \neq S^1 \times D^2$ の仮定により常になりたつ。しかし仮定2は必ずしも成立せず、図のような簡単な関係になるとはかぎらない。それでも innermost の議論は仮定1を示す以上には用いない。くわしくは [2] をみて下さい。Th 2, 3 の \mathcal{R} や \mathcal{U} を考える必要もそこから生じます。

References

- [1] C. McA. Gordon and R.A. Litherland, *Incompressible surfaces in branched coverings*, The Smith conjecture, Acad. Press.
- [2] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-mtds*, preprint.