数理解析研究所講究録
第 542 巻 1985 年 102-118

2-sided incompressible Klein bottles in 3-manifolds of genus two

神大 理 森元勘治 (Kanzi Morimoto)

本稿において、genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が 2-sided incompressible Klein bottle を含めば、その Klein bottle は、一つの固定された Heegaard surface との交わりが、一つの circle であるような 2-sided incompressible Klein bottle に ambient isotopic であることを示し、(Lemma 2.1) それを用いて genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が 2-sided incompreesible Klein bottle を含む為の一つの必要十分条件を与える (Theorem 3.1)。さらに、fundamental groups 及び homology groups の計算によって、そのような 3-manifolds は無限個存在することを示す。また、genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed 3-manifold が、2-sided non-separating compressible Klein bottle を含めば、それは P※P であ

る(Proposition 3.2) ここでPは the twisted S^2-bundle over S^1 である。

§1 Essential annuli and essential Möbius bands in a non-orientable handle body of genus two.

次の二つの lemmas は、W.B.R. Lickorish [5] の Klein bottle 上の simple loops の分類に注意し、T. Kobayashi [4] の lemma 3.2 と同様の議論を用いることによって示される。

Lemma 1.1 V を genus 2 の non-orientable handle body とし、A を V 内に proper に埋め込まれた、2-sided essential annulus とする。このとき、以下の五つのうちの一つが成り立つ。(Fig. 1)

(1) A は V を、一つの solid torus と、一つの genus 2 の non-orientable handle body に切り開く。

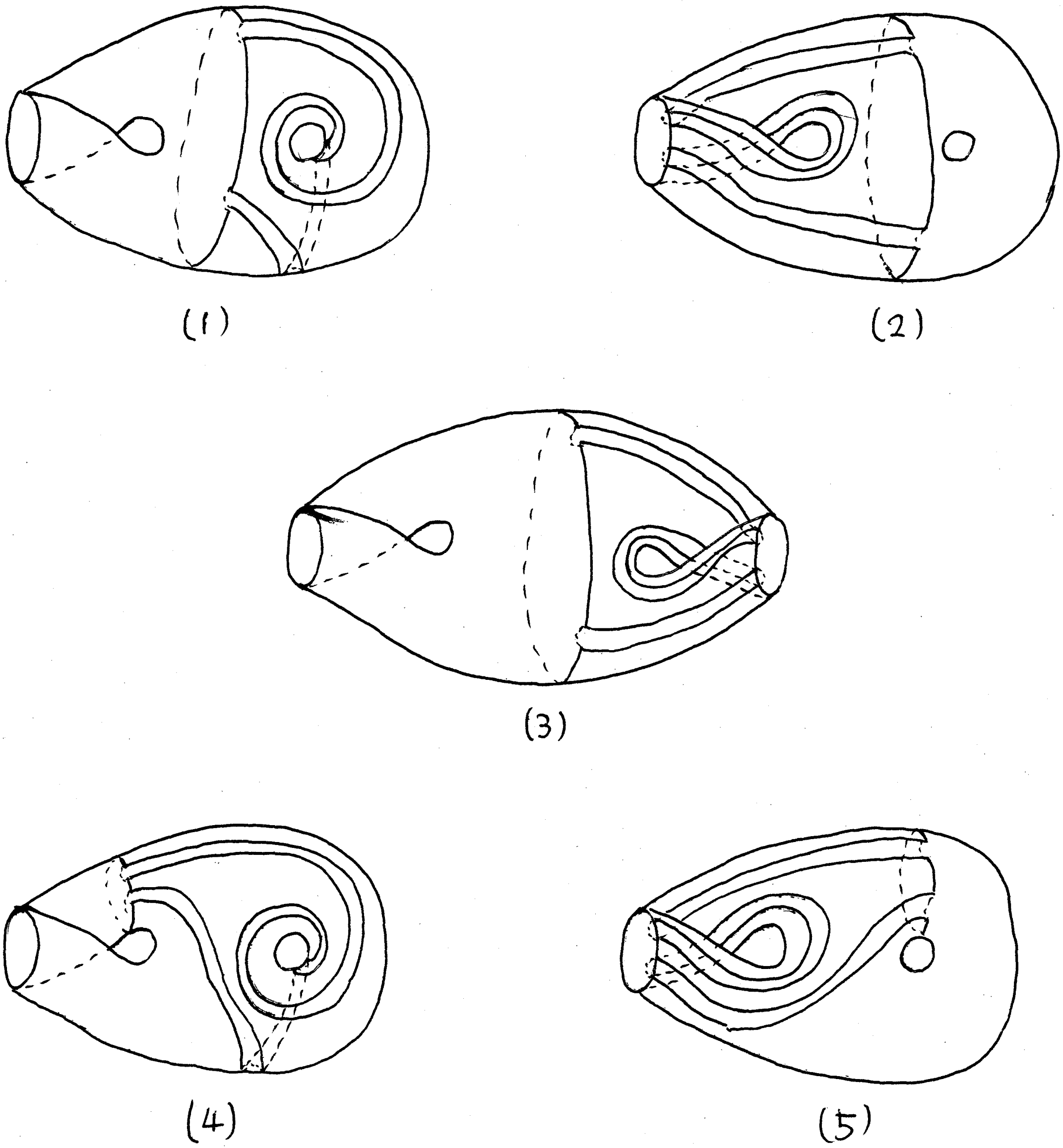
(2) A は V を、一つの solid Klein bottle と、一つの genus 2 の orientable handle body に切り開く。

(3) A は V を、一つの solid Klein bottle と、一つの genus 2 の non-orientable handle body に切り開く。

(4) A は V を、一つの genus 2 の orientable handlebody に

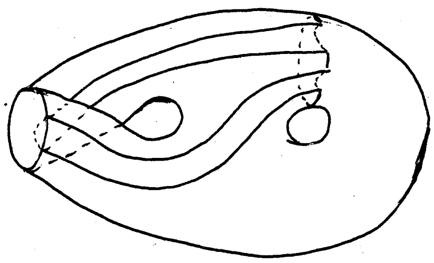
と切り開く。

(5) AはVを 一つの genus 2 の non-orientable handlebody に切り開く



(Fig. 1)

Lemma 1.2 Vを genus 2の non-orientable handlebody とし、SをV内に properに埋め込まれた、2-sided essential Möbius band とすれば、SはVを genus 2の non-orientable handlebody に切り開く。(Fig.2)



(Fig.2)

genus 2の non-orientable handlebody 内の separating Möbius bandは全て boundary parallel であることに注意されたし。

§2 Proof of Lemma 2.1

Mを non-orientable closed connected 3-manifold とし $M=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\partial V_1=\partial V_2$ をMの genus 2の Heegaard splittingとする。ここで、V_iは genus 2の non-orientable handlebodyである。このとき次の lemmaが成り立つ。

Lemma 2.1　M内の任意の2-sided incompressible Klein bottleは、$\partial V_1 (=\partial V_2)$と一つのcircleだけで交わる2-sided incompressible Klein bottle Kにambient isotopicである。

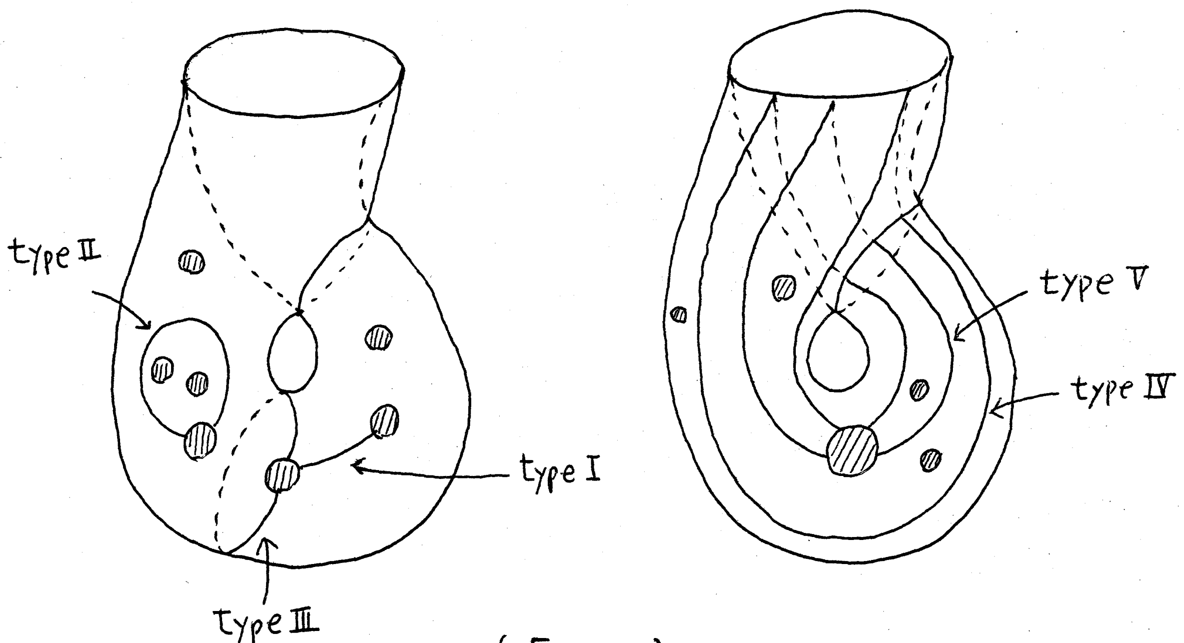
証明

Kを任意に一つ与えられた2-sided incompressible Klein bottleにambient isotopicでありかつ、V_1との交わりの各componentがdiskであるようなKlein bottleの中で、V_1との交わりのcomponentsの数が最小のものとする。

$i=1,2$に対して$K_i = K \cap V_i$とおく。KはV_2内の2-sided incompressible surfaceとしてよい。このとき、W. Jaco [3]に記されている如く、$K_2^0 = K_2$のhierarchy $(K_2^0, \alpha_1), (K_2^1, \alpha_2), \cdots, (K_2^{m-1}, \alpha_m)$で、$\alpha_i$による$i$番目のcutがisotopy of type A at α_iであるような、Mのisotopiesの列を生ぜしめるものがある(W. Jaco [3] Ch. IV 参照)。このときW. B. R. Lickorish [5]によって各α_iは以下の五つのtypesのうちのいずれかである。

α_iは、∂K_2の異なるcomponentsに交わるとき、type Iと呼ばれる。α_iは、∂K_2の一つのcomponentに交わり、K_2をKlein bottle with holesに切り開くとき、type IIと呼ばれる。α_iは、∂K_2の一つのcomponentに交わり、K_2をannulus (with holes)に切り開くとき、type IIIと呼ばれる。α_iは∂K_2の一つのcomponentに交わり、K_2を二つのMöbius bands (with holes)に

切り開くとき、type IV と呼ばれる。α_i は ∂K_2 の一つの component に交わり、K_2 を Möbius band (with holes) に切り開くとき、type V と呼ばれる。(Fig. 3)



(Fig. 3)

特に、α_i は、type I でありかつ、α_i が交わる ∂K_2 の component C で、$j<i$ ならば $\alpha_j \cap C = \phi$ となるようなものが存在するとき、d-arc と呼ばれる。

$i=1,\cdots,m$ に対して $K^{(i)}$ を isotopy of type A at α_i による $K^{(i-1)}$ の image とする。ただし $K^{(0)}=K$ である。しからば、
$K_2^i = K^{(i)} \cap V_2$ である。また、$K_1 = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_r$ $(r \geqq 1)$ とおく。ここで D_i は disk である。そうして $C_i = \partial D_i$ とおく。しからば $\partial K_2 = \partial K_1 = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ である。

主張 1 各α_iはd-arcではない。

証明。あるα_iがd-arcとする。しからば、M. Ochiai [7]で定義されたisotopy of type Aの逆操作の議論を用いて、Mのambient isotop h_t $(0 \leq t \leq 1)$で、$h_0 = id$、$h_1(K) \cap V_1$の各componentはdisk かつ、$h_1(K) \cap V_1$のcomponentの数は、rより小さい。というものが存在する。これは$K \cap V_1$のcomponentsの数の最小性に矛盾。

以下の主張2, 3, 4は 主張1の系である。

主張 2 各α_iはtype IIではない。

主張 3 共にtype IIIか又は共にtype IV であるような二つのarcs α_iとα_jが∂K_2の同じcomponentに交わることはない。

主張 4 type IVのarc α_iと、type Vのarc α_jが∂K_2の同じcomponentに交わっていれば、$i < j$である。

さて、主張1と主張2よりα_iはtype III又はtype IV又はtype Vである。一般性を失わずにα_1はC_1に交わるとしてよい。また、Kのincompressibilityから、$\{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$は、$V_1$のa complete system of meridian disks となるような二つのdiskは含まない。故に以下の三つの場合が生じる。

場合1　$\{D_1, \cdots, D_r\}$ は互いに parallel である separating disks。

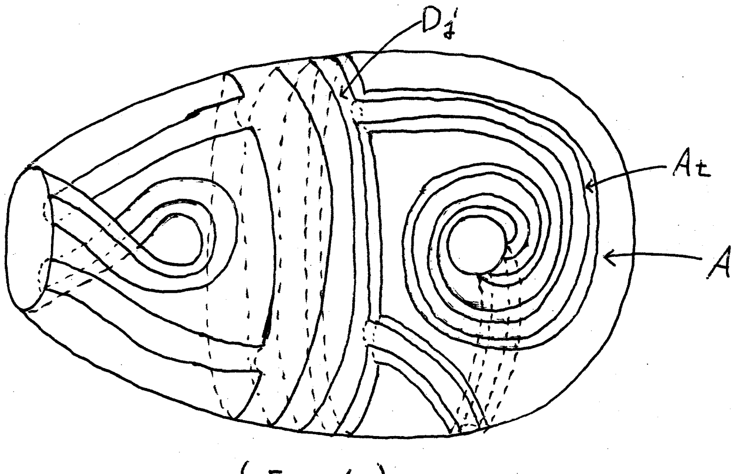
場合1.1　α_1 は type Ⅲ。

このとき各 α_i は type Ⅰ 又は type Ⅲ 又は type Ⅴ であるが、もし、ある α_i が type Ⅴ とすれば、α_i は C_1 に交わらなければならず、$\alpha_1 \cup \alpha_i$ は $Cl(K-D_1)$ を a disk に切り開く。故に主張1から $r=1$ である。今 $r \geqq 2$ とせよ。しからば各 α_i は type Ⅰ 又は type Ⅲ である。

主張5　α_i を type Ⅰ、α_j を type Ⅲ とすれば $i>j$ である。

証明。k を以下の条件を満たす正整数とする：$l \leqq k$ なる整数 l に対しては α_l は type Ⅲ であり、α_{k+1} は type Ⅰ。今 α_i は type Ⅰ、α_j は type Ⅲ かつ $i<j$ となるような i と j が存在したとする。しからば主張3に注意して以下を得る。

$K^{(k)} \cap V_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup D_{k+1} \cup \cdots \cup D_r$　ここで A_i は isotopy of type A at α_i $(1 \leqq i \leqq k)$ によって生じた separating essential annulus in V_1 であり、D_j は互いに parallel な separating disks $(k+1 \leqq j \leqq r)$ である。ただし添え字は適当に変えられているかもしれない。主張1より、α_{k+1} はある annuli A_s と A_t $(1 \leqq s < t \leqq k)$ に交わり、ある D_j で V_1 を二つの genus 1 の handle body に切り開くことにより、A_s と A_t が parallel でなることがわかる。(Fig. 4)



(Fig.4)

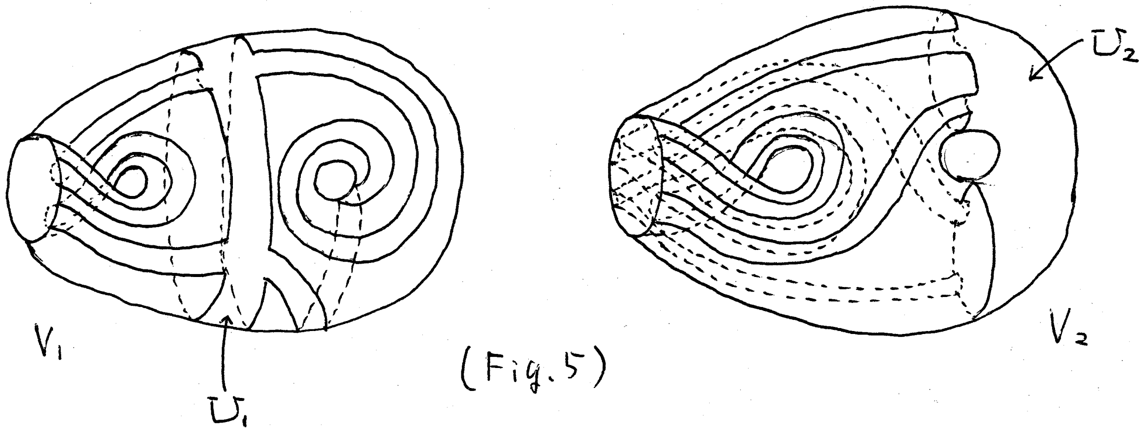
故に $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ の順番を以下のように変えることができる。$\alpha_i' = \alpha_i$ $(1 \leq i \leq s,\ k+2 \leq i \leq m)$、$\alpha_{s+1}' = \alpha_{k+1}$、$\alpha_{j+1}' = \alpha_j$ $(s+1 \leq j \leq k)$。しからば新しい順番の hierarchy (K_2^{i-1}, α_i') $(i=1,\cdots,m)$ において α_{s+1}' は d-arc となり主張1に矛盾。故に主張5が証明された。

さて、主張5により $K^{(r)} \cap V_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$ を得る。ここで A_i は separating essential annulus である。このとき $K^{(r)} \cap V_2 = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ で、各 B_i は essential annulus である。

主張6 $\{A_i\}_{i=1}^{r}$ は全て互いに parallel な annulus である。

証明。$\{A_i\}_{i=1}^{r}$ が parallel でない annuli を含んでいたとする。しからば $\{B_i\}_{i=1}^{r}$ も parallel でない annuli を含む。$i=1,2$ に対して、以下の条件を満たすような $cl(V_i - N(K^{(r)}))$ の component U_i が唯一つ存在する。ここで $N(K^{(r)})$ は $K^{(r)}$ の M における regular neighborhood である。

$\mathcal{U}_i$ は genus 2 の orientable handlebody であり、$(\partial V_i)\cap\mathcal{U}_i$ は 2-sphere with 4-holes (Fig. 5)



(Fig. 5)

故に、$(\partial V_1)\cap\mathcal{U}_1$ と $(\partial V_2)\cap\mathcal{U}_2$ が張り合わされ $\partial(\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2)$ は一つの torus となり矛盾。これで主張6が証明された。

主張6によって A_i's は全て parallel であることがわかり、このとき V_1 の separating disk D で $K^{(r)}$ に交わらず、かつ V_1 を二つの genus 1 の handle body に切り開くものを見つけることができる。しからば主張5の証明と同様の議論を用いて $r\geqq 2$ なる仮定から矛盾を得る。故に $r=1$ である。これで場合1.1が証明された。

以下、場合1.2 α_1 が type IV。場合1.3 α_1 が type V。

場合2 $\{D_1,\cdots,D_r\}$ が互いに parallel な non-separating disks。

場合2.1 α_1 が type III, ⋯, 場合2.3 α_1 が type V。

場合3. $\{D_1,\cdots,D_r\}$ が互いに parallel な separating disks と互いに parallel な non-separating disks。と場合分けするのであ

るが、全て場合1.1と同様の議論によって証明される。
これでLemma 2.1の証明を終わる。

§3 Statement and proof of Theorem 3.1

以下の定義において、Vはsolid Klein bottle、SはMöbius band、Iはunit interval $[0,1]$を表わすものとする

定義

Vにproperに埋め込まれたarc γがtrivialとは、$(V, V\cap\gamma)$が$(S\times I, \{x\}\times I)$にpairとして同相なことを言う。ここで$x$は$S$の一つの内点である。$P=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\partial V_1=\partial V_2$をthe twisted S^2-bundle over S^1とする。ここで$V_1\cong V_2\cong V$。P内のsimple loop kは、$i=1,2$に対して$V_i\cap k$がtrivial arcのときone bridge knotと呼ばれる。QによってmonodromyがreflectionであるようなS-bundle over S^1を示す。$T(n)$によってorbit manifoldがdiskで、index nのexceptional pointを一つ持つようなSeifert fibered spaceを示す。ここでnは2以上の整数である。Aを$\partial T(n)$上のannulusで先のfibrationにsaturatedなものとする。$V=S\times I$とおき、$B=\partial S\times I$とおく。Bは∂V上のannulusである。$T(n)$とVからAとBを同一視して得られる3-manifoldを$K(n)$と書く。

以上の準備のもとに、2-sided incompressible Klein bottle を含む 3-manifolds の三つの族を与える。

C(1) kをP内の one bridge knot で orientation reversing simple loop であるものとする。$P(k)$をkの knot exterior とする。このとき C(1) を $P(k)$ と Q からそれらの boundaries を張り合わせて得られる 3-manifolds で $P^2 \times S^1$ でないもの全体の族とする。

C(2) γをVに proper に埋め込まれた trivial arc とし、$V(\gamma)$をγの arc exterior とする。αを$\partial V \cap V(\gamma)$上の simple loop で、$\partial V$をその各が$\partial\gamma$の一点を含むような二つの Möbius bands に切り開くものとする。$\mho$をαに沿って$V(\gamma)$に 2-handle を付けて得られる 3-manifold で solid Klein bottle でないものとする。このとき C(2) を $\mho$ と $K(\eta)$ からそれらの boundaries を張り合わせて得られる 3-manifolds 全体の族とする。

C(3) Fを Klein bottle with one hole とし、ℓ_1, ℓ_2をF上の disjoint orientation reversing simple loops とする。$W = F \times I$, $\ell^{(i)} = \ell_i \times \{0\}$ $(i=1,2)$ とおく。αを∂W上の simple loop で∂Wをその各が$\ell^{(i)}$を含むような二つの Klein bottles with one hole に切り開くものとし、$\mho$をαに沿ってWに 2-handle を付けて

て得られる3-manifoldとする。このとき $C(3)$ を、$\tilde{U}$ から、$\partial\tilde{U}$ の二つの Klein bottles を $\ell^{(1)}$ が $\ell^{(2)}$ に移されるような同相写像で張り合わせて得られる3-manifoldsで P※P でないものの全体の族とする。

上記の定義のもとに、我々の主定理は以下の如くである。

Theorem 3.1

M を genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed connected 3-manifold とする。このとき、M が separating incompressible Klein bottle を含む為の必要十分条件は、M が $C(1)$ 又は $C(2)$ に属することである。M が 2-sided non-separating incompressible Klein bottle を含む為の必要十分条件は、M が $C(3)$ に属することである。

証明。

M の genus 2 の Heegaard splitting を $M=V_1\cup V_2$ とする。M が 2-sided incompressible Klein bottle を含めば、Lemma 2.1 の証明からその Klein bottle は以下のような四つの Klein bottles K のいずれかに ambient isotopic である。

場合 1.1　$i=1,2$ に対して $K\cap V_i$ は Lemma 1.1 における type (3) の annulus.

場合 1.2　$K\cap V_1$ は Lemma 1.1 における type(1) の annulus、

$K \cap V_2$ は二つの non-separating Möbius bands。

場合 2.1　$i=1,2$ に対して $K \cap V_i$ は Lemma 1.1 における type (5) の annulus。

場合 2.3　$i=1,2$ に対して $K \cap V_i$ は non-separating Möbius band。

場合 1.1 と場合 1.2 の時。M を K で切り開くことによって M は場合 1.1 なら C(1) に、場合 1.2 なら C(2) に属することがわかる。逆に M が C(1) 又は C(2) に属せば、M は genus 2 の Heegaard splitting を持ち separating incompressible Klein bottle を含むことがわかる。

場合 2.1 のとき、場合 2.3 のような Klein bottle が存在することがわかる。場合 2.3 のとき M は C(3) に属する。逆に M が C(3) に属せば、genus 2 の Heegaard splitting を持ち、2-sided non-separating incompressible Klein bottle を含むことがわかる。

Proposition 3.2

M を genus 2 の Heegaard splitting を持つ non-orientable closed connected 3-manifold とする。M が 2-sided non-separating compressible Klein bottle を含めば、M は P※P である。

証明。

Kを2-sided non-separating compressible Klein bottleとし、Dをcompressible diskとする。W.B.R. Lickorish [5] に注意し、M. Ochiai [6] の結果を用いれば、∂D は K を一つのannulusに切り開くことがわかる。このとき J. Hempel [2] の lemma 3.17に注意すれば、M≅P※P を得る。

§4 Calculatians of homology groups and fundamental groups.

Proposition 4.1

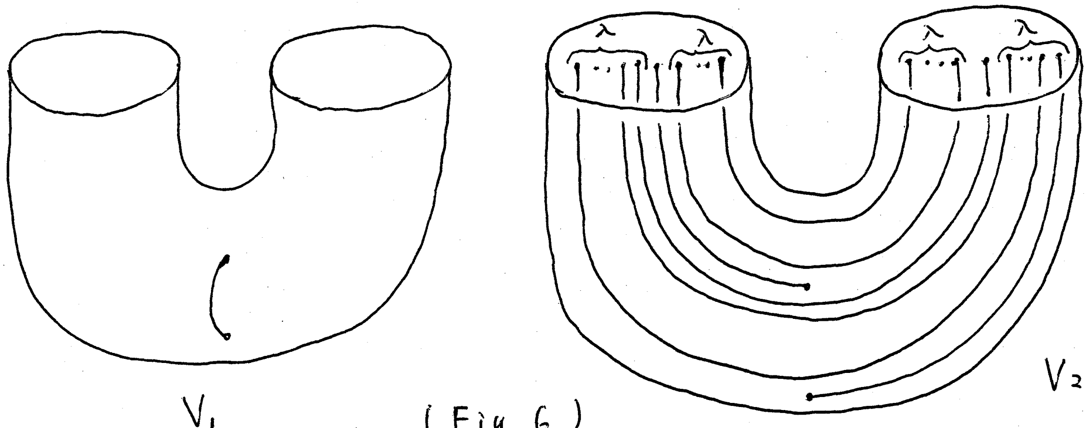
Mが C(1) に属せば、$H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ である。M が C(2) に属せば、n が奇数のとき、$H_1(M) \cong \mathbb{Z}$、n が偶数のとき、$H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ である。

証明略

正整数λに対して、Fig.6 で与えられる P 内の one bridge knot を k(λ) とし、この k(λ) から得られる C(1) の 3-manifold を M(λ) とすれば、

$$\pi_1(M(\lambda)) \cong \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} (xyx^{-1}y)^{\lambda} xx (y^{-1}x^{-1}y^{-1}x)^{\lambda} \\ (xyx^{-1}y)^{\lambda} xyxy^{-1} (x^{-1}y^{-1}xy^{-1})^{\lambda} \end{matrix} \right\rangle$$

となる。



V_1 (Fig.6)

このとき、R.H.Crowell and R.H.Fox [1] に従って $\pi_1(M(\lambda))$ の elementary ideals を計算することにより、$\lambda \neq \lambda'$ ならば、$\pi_1(M(\lambda)) \ncong \pi_1(M(\lambda'))$ を得る。故に次の命題が成り立つ。

Proposition 4.2

genus 2 の Heegaard splitting を持ち、separating incompressible Klein bottle を含み、基本群が同型でない 3-manifolds が無限個存在する。

最後に $C(3)$ については次の命題が成り立つ。

Proposition 4.3

負でない任意の整数 t に対して、$C(3)$ に属する 3-manifold M で $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{4t}$ となるものが存在する。

証明略

References

[1] R.H.Crowell and R.H.Fox : Introduction to Knot Theory , Ginn and Co. , Boston , Math. , 1963.

[2] J.Hempel : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton N.J. , Princeton University Press , 1976.

[3] W.Jaco : Lectures on three manifold topology , Conference board of Math. No. 43 , 1980.

[4] T.Kobayashi : Structures of the Haken manifolds with Heegaard splitting of genus two , Osaka J. Math. 21 (1984) , 437 - 455.

[5] W.B.R.Lickorish : Homeomorphisms of non-orientable two manifolds , Proc. Cambridge Philos. Soc. 59 (1963) , 307 - 317.

[6] M.Ochiai : 2-sided embedding of projective planes into 3-manifolds , Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) , 641 - 650.

[7] M.Ochiai : On Haken's Theorem and its Extension , Osaka J. Math. 20 (1983) 461 - 468.