

## Hyperbolic 3-cone-manifolds について

早大教育 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

1981年に、Thurston [3] は 1次元以上の singular locus を持つ compact, irreducible 3-orbifold は geometric decomposition を持つと発表した。この定理は hyperbolic 3-cone-manifolds の構造の deformation 理論及び deformation のある種の極限 (geometric limit) の解析を使って証明されている。Thurston の定義した hyperbolic 3-cone-manifold においては、その singular locus の各 vertex における valency はすべて 3 である。我々の目標は hyperbolic 3-cone-manifold の定義を singular locus がより一般の combinatorial type を持つものへと拡張し、かつそのような定義のもとでもある程度の構造の deformation が可能なことを示すことにある。最後になぜこのような deformation の一般化を考えたのか、その理由を簡単に述べる。

## § 1. $\mathbb{H}^3$ の isometry の基本的な性質

$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  を向きを保つ  $\mathbb{H}^3$  の自己等長写像の集合とする。 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  は、その元を Möbius transformation と考えることにより、 $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  と同一視される。 $\varphi: \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  を等化写像 (ここでは 2-fold covering) とする。 $\alpha \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  の元を  $\varphi^{-1}(\alpha)$  の元の 1 つ  $\tilde{\alpha}$  と同一視する。 $\text{tr}(\tilde{\alpha})$  を  $\alpha$  の trace といい  $\text{tr}(\alpha)$  と書く。非自明な  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  の元  $g$  に対し、(i)  $\text{tr}(g) = \pm 2$  のとき  $g$  を parabolic, (ii)  $\text{tr}(g) \in \mathbb{R}$ ,  $|\text{tr}(g)| < 2$  のとき elliptic, (iii)  $\text{tr}(g) \in \mathbb{R}$ ,  $|\text{tr}(g)| > 2$  のとき hyperbolic, (iv)  $\text{tr}(g) \notin \mathbb{R}$  のとき loxodromic という。 $g$  が上の 4 種類の型のどれに入るかによって  $g$  の  $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$  上への作用が特徴づけられるが、ここではそれには言及しない。詳しいことは Thurston [2] 参照。

定義.  $l_1, l_2$  を  $\mathbb{H}^3$  の geodesics とする。 $\mathbb{H}^3$  の中の (totally geodesic) plane  $P$  で  $P \supset l_1 \cup l_2$  となるものが存在するとき、 $l_1$  と  $l_2$  は planar position にあるといい、それ以外の場合は general position にあるという。

補題 1.  $l_1, l_2, l_3$  を  $\mathbb{H}^3$  の中の geodesics で、 $l_1 \cup l_2 \cup l_3$  を含む plane は存在しないと仮定する。もし  $\{l_1, l_2, l_3\}$

のそれぞれの2対が planar position にあれば、次のいずれかが成立する。

(i)  $l_1 \cap l_2 \cap l_3$  は  $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$  の中の1点。

(ii) plane  $P$  で、各  $l_i$  と1点で垂直に交わるものが唯一つ存在する (図1参照)。

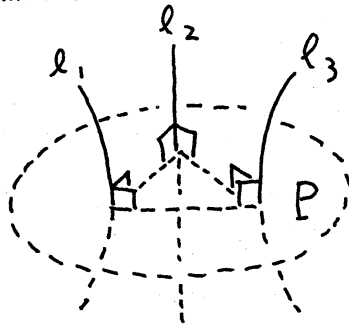


図 1

次の補題の一部分は Thurston による。

補題 2.  $\alpha, \beta$  を elliptic elements とし、それぞれの回転軸を  $l_\alpha, l_\beta$  とする。このとき  $l_\alpha, l_\beta$  が planar position にあるための必要十分条件は  $\text{tr}(\alpha\beta) \in \mathbb{R}$  である。

証明.  $l_\alpha, l_\beta$  が planar position にあるとする。  $l_\alpha = l_\beta$  のときは、明らかに  $\alpha\beta$  は elliptic。  $l_\alpha \cap l_\beta$  が  $\mathbb{H}^3$  の中の1点のときは、  $\text{fix}(\alpha\beta) \supset l_\alpha \cap l_\beta$  より、  $\alpha\beta$  は elliptic。  $l_\alpha \cap l_\beta$  が  $S_\infty^2$  の中の1点  $\infty$  のときは  $\text{fix}(\alpha\beta) \ni \{\infty\}$ 。  $E$  を点  $\infty$  における holosphere とするとき、  $\alpha(E) = \beta(E) = E$ 。 よって  $\alpha\beta(E) = E$ 。 したがって  $\alpha\beta$  は elliptic または parabolic。  $l_\alpha \cap l_\beta$

$\neq \emptyset$  のとき、 $P$  を  $l_\alpha \cup l_\beta$  を含む plane とする。  $s$  を  $l_\alpha$  と  $l_\beta$  を結ぶ最短の線分とする。このとき  $s \subset P$ 。  $s$  を含み  $P$  と直交する plane を  $Q$  とすると、 $\alpha(Q) = \beta(Q) = Q$  である。したがって  $\alpha\beta$  は  $PSL_2(\mathbb{R})$  の元と conjugate、特に  $\text{tr}(\alpha\beta) \in \mathbb{R}$ 。

次に  $l_\alpha, l_\beta$  が general position にあると仮定する。  $\alpha, \beta$  の rotation angle を  $r(\alpha), r(\beta)$  とする。  $r(\alpha), r(\beta) < \pi$  と仮定できる。もし  $r(\alpha) \geq \pi$  のときは  $\gamma^2 = \alpha$  なる elliptic element  $\gamma$  を考えれば、 $\text{Tr}(\alpha\beta) + \text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\gamma) \text{Tr}(\gamma\beta)$ 、 $\text{Tr}(\gamma)$  キロより、 $\text{Tr}(\alpha\beta) \in \mathbb{R}$  が  $\text{Tr}(\gamma\beta) \in \mathbb{R}$  と同値になるからである。  $l_\alpha$  と  $l_\beta$  を結ぶ最短線分を  $s$  とする。  $s$  を通り  $l_\alpha, l_\beta$  と直交する plane をそれぞれ  $P_\alpha, P_\beta$  とする。  $\{x_\alpha\} = l_\alpha \cap P_\alpha$ 、 $\{x_\beta\} = l_\beta \cap P_\beta$  とおく。  $P_\alpha$  の  $x_\alpha$  を通る geodesics  $\lambda_1, \lambda_2$ 、 $P_\beta$  の  $x_\beta$  を通る geodesics  $\mu_1, \mu_2$  を次の図で示されているように定義する。

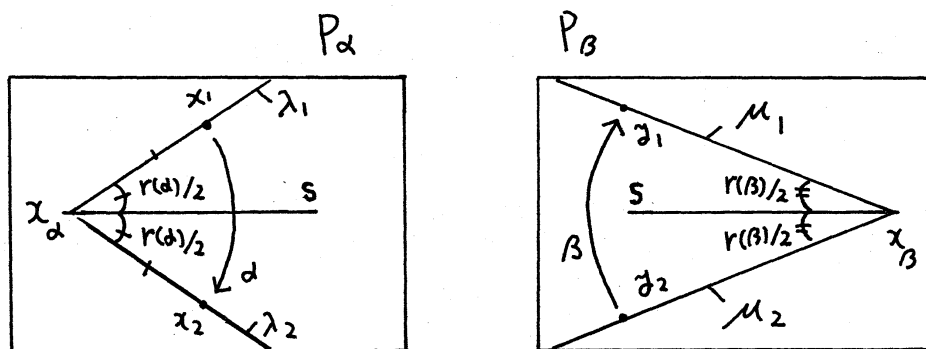


図 2

また  $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  を  $s$  のまわりの  $180^\circ$  回転とする。

$l_\alpha, l_\beta$  は general position にあるので、 $\lambda_1, \mu_1$  は general position にある。 $\lambda_1, \mu_1$  を結ぶ最短線分を  $t_1$ ,  $\lambda_2, \mu_2$  を結ぶ最短線分を  $t_2$  とする。 $t_i \cap \lambda_i = \{x_i\}$ ,  $t_i \cap \mu_i = \{y_i\}$  とおく (図3参照)。

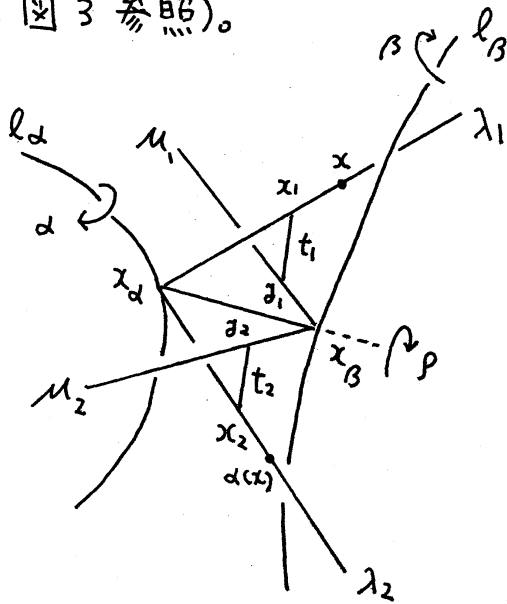


図3

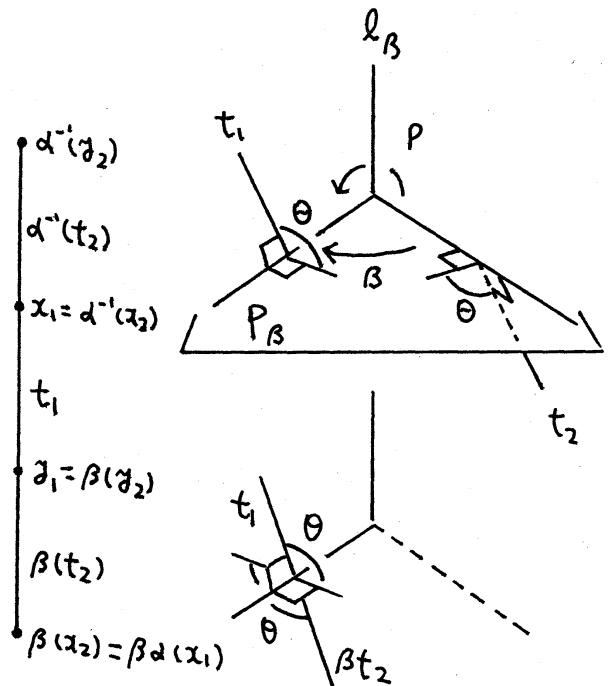


図4

図5

$p(\lambda_1) = \lambda_2$ ,  $p(\mu_1) = \mu_2$  より,  $p(t_1) = t_2$ 。したがって  $x_2 = \alpha(x_1)$ ,  $\beta(y_2) = y_1$ 。図4, 図5 からわかるように  $\alpha^{-1}(y_2)$ ,  $x_1$ ,  $\beta(y_2)$ ,  $\beta\alpha(x_1)$  を通る geodesic  $l$  が存在する。 $\beta\alpha(l) = l$  であり,  $\beta\alpha(x_1) \neq x_1$  より,  $\beta\alpha$  は hyperbolic または loxodromic である。 $\lambda_1$  上の  $x_1$  以外の点を  $x$  とすると,  $x$  と  $\beta\alpha(x)$  は  $\mu_1$   $\cup t_1$  を含む plane  $Q$  ( $\cap l$ ) によ, て分離される。したがって  $\beta\alpha(Q) \neq Q$  または  $\beta\alpha(Q) = Q$  かつ  $\beta\alpha|_Q: Q \rightarrow Q$  は向きを

逆にする isometry。よって  $\beta\alpha$  は loxodromic。特に  $\text{tr}(\alpha\beta) = \text{tr}(\beta\alpha) \in \mathbb{R}$ 。(証明終)

## §2. Hyperbolic 3-cone-manifold の定義

hyperbolic 3-cone-manifold の local model とは 3-ball または 3-ball から内点を 1 点除いた空間上に定義された metric で次の (i)-(iv) のいずれかの型に属するものをいう。

(i)  $P_1, P_2$  を  $\mathbb{H}^3$  の plane で  $P_1 \cap P_2$  が  $\mathbb{H}^3$  の geodesic になるものとする。 $\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2$  の 1 つの component を  $X$  とし、 $\bar{X}$  をその closure とする。2 つの half planes  $P_1 \cap \bar{X}, P_2 \cap \bar{X}$  のつくる  $\bar{X}$  側の angle を  $r(\bar{X})$  ( $0 < r(\bar{X}) < \pi$ ) とおく。 $x \in P_1 \cap P_2$  に対して、 $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$  とおく。 $A(\varepsilon) = B_\varepsilon(x) \cap \bar{X}$  とおくと、 $A(\varepsilon) \cap P_1, A(\varepsilon) \cap P_2$  を  $A(\varepsilon)$  の face,  $\alpha(A(\varepsilon)) = \alpha(\bar{X})$  を  $A(\varepsilon)$  の angle といい。同様にして構成された  $A_1(\varepsilon), \dots, A_n(\varepsilon)$  を考える。 $A_i(\varepsilon)$  の face を  $F_{i1}, F_{i2}$  とする。明らかにすべての  $F_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2$  は isometric である。 $A_1(\varepsilon), \dots, A_n(\varepsilon)$  の disjoint union から  $F_{i2}$  と  $F_{i+1,1}$  (ただし  $n+1=1$  とする) を向きを逆にする isometry で同一視してできた metric 3-ball を  $B_I^{(\varepsilon)}$  とする。 $\varphi: A_1(\varepsilon) \cup \dots \cup A_n(\varepsilon) \rightarrow B_I^{(\varepsilon)}$  をその等化写像とすると、 $\Sigma_I^{(\varepsilon)} = \varphi(A_1(\varepsilon)) \cap \dots \cap \varphi(A_n(\varepsilon))$  を singular locus といい、 $\alpha = \alpha(A_1(\varepsilon)) + \dots +$

$\alpha(A_n(\varepsilon))$  を  $\Sigma_I^{(\varepsilon)}$  のまわりの cone-angle といい。  $(B_I^{(\varepsilon)}, \Sigma_I^{(\varepsilon)})$  を type I の  $\varepsilon$ -local model といい。

(ii) (i) と同じ記号を使う。  $Q$  を  $P_1, P_2$  に直交し、かつ  $x$  を含む plane とする。  $\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2 \cup Q$  の 1 つの component  $Y \subset X$  の closure  $\bar{Y}$  に対して、  $B(\varepsilon) = \bar{Y} \cap B_\varepsilon(x)$  とおく。  $B(\varepsilon)$  の face を  $B(\varepsilon) \cap P_1, B(\varepsilon) \cap P_2$  で定義する。 以下 (i) と同様にして定義した metric 3-ball  $(B_{II}^{(\varepsilon)}, \Sigma_{II}^{(\varepsilon)})$  を type II の  $\varepsilon$ -local model といい。  $\Sigma_{II}$  のまわりの cone-angle も同様にして定義できる。

(iii)  $P_1, P_2, P_3$  を  $\mathbb{H}^3$  の planes で、  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$  が  $\mathbb{H}^3$  内の 1 点  $x$  であるものとする。  $\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2 \cup P_3$  のある component  $Z$  の closure を  $\bar{Z}$  とし、  $C^{(\varepsilon)} = \bar{Z} \cap B_\varepsilon(x)$  とおく。  $C^{(\varepsilon)} \cap P_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) を  $C^{(\varepsilon)}$  の face といい。 同様にして定義された  $C_1^{(\varepsilon)}, \dots, C_n^{(\varepsilon)}$  が次の条件を満足すると仮定する。

[条件]  $T$  を  $S^2$  の三角分割とし、  $T^{(2)}$  を  $T$  の 2-simplex 全体の集合とする。  $T^{(2)}$  の各元  $\Delta_i$  に対して、 PL-同相  $h_i :$   
 $(\Delta_i * p, p) \rightarrow (C_i^{(\varepsilon)}, x_i)$  が存在し、次のようになっているとする。  $\Delta_i \cap \Delta_j (\neq \emptyset, i \neq j)$  に対して、  $h_i((\Delta_i \cap \Delta_j) * p) = F_{ij}$  は  $C_i^{(\varepsilon)}$  の face,  $h_j \circ h_i^{-1} : F_{ij} \rightarrow F_{ji}$  は isometry。  
 $C_1^{(\varepsilon)}, \dots, C_n^{(\varepsilon)}$  の disjoint union より  $h_j \circ h_i^{-1}$  に沿って faces を同一視してできる metric 3-ball  $(B_{III}^{(\varepsilon)}, \Sigma_{III}^{(\varepsilon)})$  を type III

の  $\varepsilon$ -local model といい。ただし  $\varphi: C_1(\varepsilon) \cup \dots \cup C_n(\varepsilon) \rightarrow B_{\text{III}}^{(\varepsilon)}$  を等化写像とするとき,  $\Sigma_{\text{III}}^{(\varepsilon)} = \varphi(C_1(\varepsilon)) \cap \dots \cap \varphi(C_n(\varepsilon))$ 。

(iv)  $P_1, P_2, P_3$  は  $\mathbb{H}^3$  の planes で各 2 対  $P_i, P_j$  に対して  $P_i \cap P_j$  は geodesic であり,  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$  は  $S_{\infty}^2$  内の 1 点  $y$  であるとする。  $\mathbb{H}^3$  を  $y$  を無限遠点とした上半平面 model で考えると,  $l_i = P_i \cap \mathbb{C}$  は  $\mathbb{C}$  内の直線である。  $l_1, l_2, l_3$  で囲まれた  $\mathbb{C}$  内の三角形と隣接する  $\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2 \cup P_3$  の component を  $W$  とおく。  $B(y)$  を  $y$  における holoball とし,  $D = \overline{W} \cap B(y)$  とおく。ただし  $\overline{W}$  は  $W$  の  $\mathbb{H}^3$  における closure。  $D \cap P_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) を  $D$  の face といい, (iii) と同様に  $S^2$  の三角分割  $T$  を考える。  $\Delta_i \in T^{(2)}$  に対して PL-同相  $h_i: (\Delta_i * p - \{p\}) \rightarrow D_i$  が定義されていいて,  $h_j \circ h_i^{-1}: F_{ij} \rightarrow F_{ji}$  は isometry になっているとす。ただし  $F_{ij} = h_i((\Delta_i \cap \Delta_j) * p)$  は  $D_i$  の face。  $D_1, \dots, D_n$  の disjoint union より  $h_j \circ h_i^{-1}$  に沿って face を同一視して metric 3-ball  $(B_{\text{IV}}, \Sigma_{\text{IV}})$  が定義できたとき, これを type IV の local model といい。ただし  $\varphi: D_1 \cup \dots \cup D_n \rightarrow B_{\text{IV}}$  を等化写像とするとき,  $\Sigma_{\text{IV}} = \varphi(D_1) \cap \dots \cap \varphi(D_n)$ 。

注意.  $h_j \circ h_i^{-1}$  に沿っての同一視によって  $B_{\text{IV}} - \Sigma_{\text{IV}}$  上に hyperbolic structure を定義することは常に可能である。これが  $(B_{\text{IV}}, \Sigma_{\text{IV}})$  上の local model に拡張されるためには,  $\Sigma_{\text{IV}}$  の各 edge の meridian における holonomy が elliptic であら



ばよい。

$N$  を compact, connected, orientable 3-manifold とし、 $\partial N$  は空であるかまたは 2-spheres からなるとする。  $p_1, \dots, p_k$  を  $\text{int} N$  内の相異なる点とし、  $N - \{p_1, \dots, p_k\}$  上に次のような metric が定義されているとする。  $N \ni x$  が  $\{p_1, \dots, p_k\}$  の元でないとき、十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対して、  $B_\varepsilon(x)$  は type I, II, III の  $\varepsilon$ -local model のいずれかと isometric。ただし  $B_\varepsilon(x)$  が type II の  $\varepsilon$ -local model と isometric になるのは  $x \in \partial N$  のとき、またそのときに限る。  $x \in \{p_1, \dots, p_k\}$  に対しては、  $x$  の  $N$  における近傍  $U$  が存在し、  $\bar{U} - \{x\}$  は type IV の local model と isometric。  $\Sigma_0$  をこれらの isometries によって local model から引き戻された singular locus の逆像の和集合から cone-angle  $2\pi$  の edges を取り除いたものとする。  $\partial N$  の各 component  $S_i$  に対して、  $(B_i, \Sigma_i)$  を  $(S_i * p_i, (S_i \cap \Sigma_0) * p_i)$  で定義する (図 6 参照)。

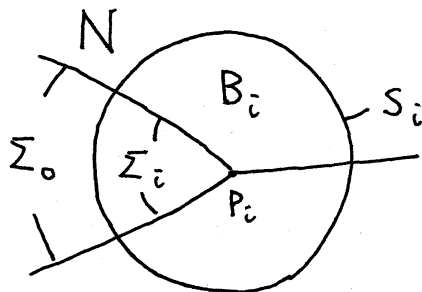


図 6

$N, B_1, \dots, B_n$  の各 boundary を同一視することにより

closed 3-manifold  $M$  が得られる。  $M \supset \Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n \cup \{p_1\} \cup \dots \cup \{p_n\}$  とおくと  $\Sigma$  は  $M$  の中の simplicial 1-subcomplex になる。このようにして定義された  $M$  または  $(M, \Sigma)$  を structure  $N$  を持つ hyperbolic 3-cone-manifold という。また  $\Sigma$  をこの cone-manifold の singular locus という。

### §3. Hyperbolic 3-cone manifold structure の deformation

Thurston は補題2の結果を利用して, singular locus の各 vertex における valency が3の場合の deformation を考えている。ここで, それを簡単に復習してみる。  $v$  を  $\Sigma$  の vertex とし,  $e_1, e_2, e_3$  を  $v$  を end の1つとしてもつ edges とする。  $M - \Sigma$  は hyperbolic manifold の構造を持つから, holonomy  $\rho_0: \Pi \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  が定義される。ただし  $\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$ 。  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  を edges  $e_1, e_2, e_3$  のまわりの meridian であるとする (図7参照)。

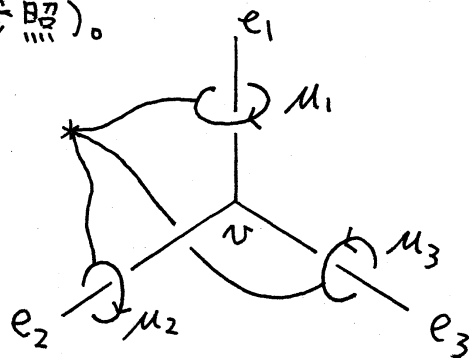


図 7

このとき  $\rho_0([\mu_i])$  ( $[\mu_i] \in \Pi$ ) は elliptic になる。ここ

で次の問題を考える。

問題  $\rho_0$  に十分近い representation  $\rho : \Pi \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  において、 $\Sigma$  の各 edge のまわりの meridian  $\mu$  に対し  $\rho([\mu])$  が elliptic になっているとき、 $\rho$  は hyperbolic 3-cone-manifold の holonomy として実現できるか？

まず  $N(\Sigma)$  を  $\Sigma_0$  の  $N$  における regular neighborhood とする。Thurston [2] により、 $\rho_0$  の十分近くの representation  $\rho$  は  $N - \partial N \cup N(\Sigma_0)$  上の hyperbolic structure の holonomy として実現できる。また任意の  $\rho([\mu])$  は elliptic であるから hyperbolic Dehn surgery の可能性に関する議論と同様にし、上の hyperbolic structure  $\mathcal{S}$  は  $\Sigma$  の vertex  $v$  の近傍を除いた edges  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  まで拡張できる。図 8 参照。

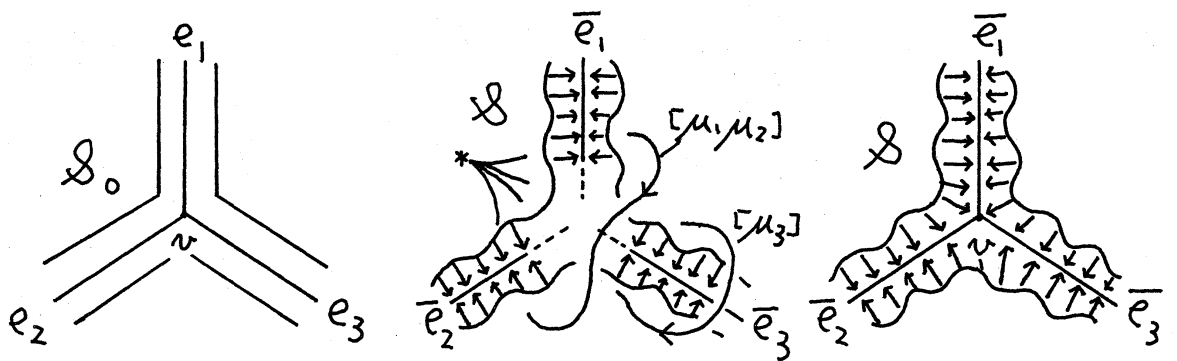


図 8

ここで  $[\mu_1, \mu_2] = [\mu_3]$  であるから、 $\rho([\mu_1]) \rho([\mu_2])$

$= \rho([\mu_3])$ 。特に、 $\text{tr}(\rho([\mu_1])\rho([\mu_2])) \in \mathbb{R}$ 。したがって補題2より  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  のそれぞれの2対は planar position にある。よって補題1より、 $\mathcal{S}$  は  $M$  上の hyperbolic cone-manifold structure まで拡張される。

上の議論は  $\Sigma$  の vertex の valency が 3 より大きくなるときには適用できないのは明らかである。 $(M, \Sigma)$  を hyperbolic 3-cone-manifold とし、 $\rho_0: \pi \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  をその holonomy とする。ただし、 $\pi = \pi_1(M - \Sigma)$ 。  $\Sigma$  の各 vertex  $v$  に対して、 $v$  を中心とした  $M$  の中に embed された 3-ball を  $B(v)$  とする。 $v$  を end としてもつ edges を  $e_1, \dots, e_n$  とする。 $\partial B(v)$  上の  $n(n-1)/2$  個の simple loops  $\{C_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  の集合とは次のようなものとする。 $C_{ij}$  は  $\partial B(v)$  上の disk  $D_{ij}$  で  $D_{ij} \cap \Sigma = \partial B(v) \cap (e_i \cup e_j)$  となるものを bounds する (図9参照)。

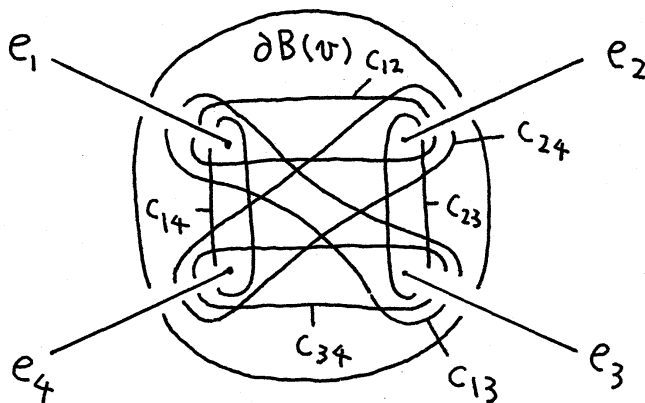


図 9

補題 1, 2 より,  $\text{tr } \rho_0([C_{ij}]) \in \mathbb{R}$  。

定義. representation  $\rho: \pi \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  が "geometrically realizable" (簡単に  $g$ -realizable) であるとは,  $\rho$  が  $(M, \Sigma)$  上のある hyperbolic 3-cone-manifold structure の holonomy として実現できることをいう。また  $\rho$  が "algebraically realizable" (簡単に  $a$ -realizable) であるとは,  $\Sigma$  の各 edge のまわりの meridian  $\mu$  に対して  $\rho([\mu])$  は elliptic であり, かつ各 vertex  $v_k$  のまわりで上のようにして定義された  $C_{ij}^{(\mathbb{R})}$  に対して  $\text{tr } \rho([C_{ij}^{(\mathbb{R})}]) \in \mathbb{R}$  となることをいう。

(i)  $\rho$  が  $a$ -realizable であるという定義は各 vertex  $v_k$  における  $\{C_{ij}^{(\mathbb{R})}\}$  の選択の仕方によらない。

(ii)  $\rho$  が  $g$ -realizable であれば,  $a$ -realizable であるが, 逆は一般に成立しない。

命題.  $\rho_0$  を  $g$ -realizable representation とし,  $\rho$  を  $\rho_0$  に十分近い representation とする。このとき, もし  $\rho$  が  $a$ -realizable であれば,  $g$ -realizable である。

この命題は一見もっともらしいが, 実のところは何も言っ

ていないのに等しい。というのは、命題が成立するように  $a$ -realizable の定義がされているからである。したがって、ここでしなければいけないことは実際には  $g$ -realizable な representation の近くに  $a$ -realizable な representation が存在することを示さなくてはならない。

$(M, \Sigma)$  を closed 3-manifold と collapse (ない simplicial 1-subcomplex) の対とする。  $\Sigma$  の各 vertex  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を中心とした 3-ball を  $B_i$  とする。  $(M - \text{int}(B_1 \cup \dots \cup B_n), \Sigma - \Sigma \cap (\text{int}(B_1 \cup \dots \cup B_n)))$  の 2 つの copy  $(N_1, \Sigma_1), (N_2, \Sigma_2)$  の対応する境界を同一視して得られた対を  $(D(M), D(\Sigma))$  とおく。  $D(\Sigma)$  は closed 3-manifold  $D(M)$  の中の link になる。  $i: (N_1, \Sigma_1) \subset (D(M), D(\Sigma))$  を inclusion とする。 また  $N_1 - \Sigma_1 \subset M - \Sigma$  は homotopy 同値である。  $\Pi = \pi_1(N_1 - \Sigma_1) = \pi_1(M - \Sigma)$ ,  $\Pi^D = \pi_1(D(M) - D(\Sigma))$  とおく。  $\Pi \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ ,  $\Pi^D \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  の representation 全体のつくる空間を  $X(\Pi)$ ,  $X(\Pi^D)$  とおく。 詳しい定義は Culler-Shalen [1] を参照。 [1] より,  $X(\Pi), X(\Pi^D)$  は affine algebraic varieties になる。  $i_*: \Pi \rightarrow \Pi^D$  より, regular map  $i_*: X(\Pi^D) \rightarrow X(\Pi)$  が定義される。 ここで  $D(M) - D(\Sigma)$  が finite volume の complete hyperbolic structure  $\infty$  をもつとする。  $i_*(\infty)$  を含む  $X(\Pi)$  の irreducible component を  $X_\infty$  とする。 このとき次の定理が得

られる。

定理.  $X_0$  を real algebraic variety とみなしたとき,  $X_0$  の中の (real) algebraic curve  $\delta$  で次の (i)-(iii) を満足するものが存在する。

(i)  $\delta \ni i^* \infty$

(ii)  $\delta$  を  $\mathbb{R}$  と同一視したとき,  $\delta$  の中に半開区間  $[i^* \infty, \rho_0)$  が存在し,  $[i^* \infty, \rho_0)$  内の任意の元  $\rho$  は  $a$ -realizable である。

(iii) 命題より,  $[i^* \infty, \rho_1)$  ( $\rho_1 \leq \rho_0$ ) 内の任意の元  $\rho$  は  $g$ -realizable であるが,  $\rho_1$  が  $g$ -realizable でないとき,  $\rho_1$  を geometric limit といい。もし  $[i^* \infty, \rho_0)$  が geometric limit を持たないならば,  $[i^* \infty, \rho_0)$  の元  $\rho$  で各 edge のまわりの meridian  $\mu$  に対して  $\rho(\mu)$  が "rotation angle  $2\pi$  の elliptic element" になるものが存在する。すなわち  $M$  は hyperbolic 3-manifold になる。

#### §4. これからの目標

上の定理の real algebraic curve  $\delta$  が定理の (iii) の仮定を満足していることが最も望ましいことであるが一般にそれは不可能である。hyperbolic 3-cone manifolds の列が

geometric limit に到達したとき、cone-manifold structure をそれ以上 deform させることができない。したがって、今すべきことは、hyperbolic 3-cone-manifold の概念を一般化し、その中で deformation を考えることによつて、geometric limit を自然に通過できるようにすることである。これは上の定理を利用することによつてある程度可能である。次にすべきことは、一般化された概念の中の deformation によつて得られた結果をいかにして underlying manifold  $M$  の性質と結びつけるかにある。

講演者はこのような方向での 3-manifolds の研究から、Geometrisation Conjecture に寄与できるような結果が得られるのではないかと考えている。

### 参考文献

- [1] M. Culler, P. Shalen: Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds, Ann. of Math. 117 (1983), 109-149.
- [2] W. Thurston: The geometry and topology of 3-manifolds (to appear).
- [3] \_\_\_\_\_: Three-manifolds with symmetry, preprint.