数理解析研究所講究録
第542巻 1985年 168-173

複素射影平面$\mathbb{CP}^2$の直線族から得られる正規軌道曲面のEinstein-Kähler計量の存在について.

九大・理 加藤十吉 (Mitsuyoshi Kato)

Xを非特異compact複素曲面, $D=\bigcup_i D_i$をXの複素曲線で, 各D_iは非特異であり, Dの特異点は正規交叉2重点からなり, $D_i\cap D_j$ $(i\neq j)$は高々1点からなるとする。

このとき, 各D_iに自然数$b_i(\geqq 2)$を指定し,

$$(X, (D, b)\equiv \cup(D_i, b_i))$$

のことを正規軌道曲面という。Dの特異点の全体をΣDとする。非特異複素曲面MとMの自己複素同型群GでMに真性不連続に作用するものが存在し, GによるMの商空間がXと複素同型で, $p: M\longrightarrow X$をその商写像(正規分岐被覆)とするとき, Mの各点xで, Gのisotropy群$G_x=\{g\in G/g(x)=x\}$の位数が

$p(x)\in X-D$のとき, 1 (G_xが自明),

$p(x)\in D_i-\Sigma D$のとき, b_i $(G_x\cong \mathbb{Z}_{b_i})$,

$p(x)\in D_i\cap D_j$ $(i\neq j)$のとき, b_ib_j $(G_x\cong \mathbb{Z}_{b_i}\times\mathbb{Z}_{b_j})$

となるとき, (G, M)を$(X,(D,b))$の一意化という。

Mがcompact (したがって, Gが有限)のとき,

(G, M) を $(X, (D, b))$ の有限一意化という。

M が単連結であるとき，(G, M) は $(X, (D, b))$ の普遍一意化と呼ばれ，一意化を被覆（非分岐）する最大の一意化という普遍性をもつ。（[Ka 1]）

問題

1. $(X, (D, b))$ はいかなる条件のもとに一意化，有限一意化をもつか？

2. $(X, (D, b))$ の普遍一意化の幾何学を行え！

compact 非特異複素曲面 M にはその標準因子 $K(M)$ に関する $K(M)$-次元としての小平次元 $\varkappa(M)$（例えば，[I]），宮岡と Yau の仕事で注目される特性数 $\varepsilon(M) = 3c_2(M) - \{c_1(M)\}^2 = e(M) - 3\,\mathrm{sign}(M)$ が考えられる。$(e(M) = c_2(M))$

$\varkappa(M)$ は双有理型不変量で，$\varepsilon(M)$ はホモトピー不変量である。M が (-1) curve（，(-2) curve）を含まないと仮定すると $\varkappa(M) = 2$，つまり，M が一般型であれば，M には Einstein-Kähler 計量で，Ricci 曲率が負のものが存在し，$\varepsilon(M) \geq 0$ が成立する。しかも，$\varepsilon(M) = 0$ となることが M の普遍被覆が $\mathbb{C}^2$ の開単位球体となる為の必要十分条件である。

正規軌道曲面 $(X, (D, b))$ を (X, b) と表し,

$$c_2(X,b) = e(X,b) = e(X) + \sum_i \left(\frac{1}{b_i} - 1\right)(e(D_i) - d_i) + \sum_d \left(\frac{1}{b_i b_j} - 1\right)$$

(但し, $d_i = \#(D_i \cap \Sigma D)$, $\sum_d$ は ΣD の点 $D_i \cap D_j$ にわたる和を表す。),

$$K(X,b) = K(X) + \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i}\right) D_i$$

$$\varepsilon(X,b) = 3c_2(X,b) - K(X,b)^2$$

$$e^b(D_i) = e(D_i) + \sum_{d_i} \left(\frac{1}{b_j} - 1\right)$$,但し, $\sum_{d_i}$ は $D_i \cap \Sigma D$ の各点 $D_i \cap D_j$ にわたる和,

$$\varepsilon_X^b(D_i) = \frac{2D_i^2}{b_i} - e^b(D_i)$$,

$$\varepsilon_X(D_i) = 2D_i^2 - e(D_i)$$

と定義する。

(Hirzebruch - Höfer):

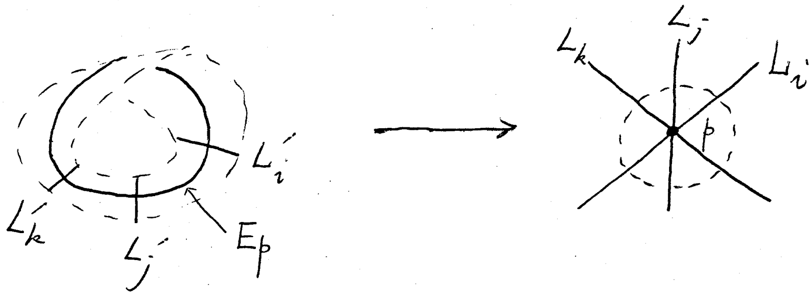
$$\varepsilon(X,b) = \varepsilon(X) + \frac{1}{2}\sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i}\right)\left(\varepsilon_X(D_i) + \varepsilon_X^b(D_i)\right)$$

が成立する。

(X, b) が有限一意化 (G, M) をもつとき,

X の $K(X,b)$ 次元として定義される小平次元 $\kappa(X,b)$ と M の小平次元は一致し, しかも, $\varepsilon(M)$ は $\varepsilon(X,b)$ の自然数倍となるように定義してある。

$\mathbb{CP}^2$ の直線族 $L=\bigcup_i L_i$ を考える。Lの特異点は$m(\geq 2)$重点からなる。$m\geq 3$ なる特異点を特異多重点という。$\mathbb{CP}^2$ をすべての特異多重点で blowing-up したものをX，L_i の proper transform をL_i'，特異多重点pに対する exceptional curve をE_pとする。pでの局所図は次の様である。



pでの blowing-up

$D=\left(\bigcup_i L_i'\right)\cup\left(\bigcup_p E_p\right)$，但し，$\bigcup_p$ は特異多重点pにわたる和集合をとることを表す，とおく。

各L_i'上に任意の自然数$b_i\,(\geq 2)$を指定する。

各E_p上に，pを含み，p以外に特異多重点を含む直線L_{i_k} $(k=1,\cdots,r_p)$ に対応する$b_{i_1},\cdots,b_{i_{r_p}}$の最小公倍数 $b_p=[b_{i_1},\cdots,b_{i_{r_p}}]$ を指定する。

このとき，$(X,(D,b))$ は正規軌道曲面をなしている。

次の結果が成立する。

定理.

(I) 各 L_i 上に特異多重点が存在すれば，(X, b) は有限一意化をもつ。([K_2])

(II) 各 L_i 上に2個以上の特異多重点が存在し，ある L_k に対し，$e^b(L_k') \leqq 0$ であれば，

$$\kappa(X, b) = 2$$

が成立する。しかも，$e^b(E_s) > 0$ なる特異多重点 s に対応する E_s の (X, b) の有限一意化への *lift* は -2 の -1 *curve* で，これらをすべて1点につぶした *variety* には，(−2 curve をつぶした X) ところで(のみ)商特異点をもつ *Einstein-Kähler metric* が存在する。しかも，

$$\varepsilon(X, b) \geqq \sum_s \frac{1}{b_s}$$

，但し，$\sum_s$ は $e^b(E_s) > 0$ なる特異多重点 s にわたる和，が成立する。

(III) L_i 上の特異多重点の個数を σ_i とすると，

$$\varepsilon_X^b(L_i') = \frac{2(1-\sigma_i)}{b_i} - e^b(L_i'), \quad \varepsilon_X^b(E_p) = -\frac{2}{b_p} - e^b(E_p),$$

$$\varepsilon(X, b) = \frac{1}{2}\left\{ \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i}\right) \varepsilon_X^b(L_i') - \sum_p \left(1 + \frac{1}{b_p}\right) \varepsilon_X^b(E_p) \right\}$$

が成立する。さらに，(II) の条件下で，(X, b) の普遍一意化の空間が $\mathbb{C}^2$ の単位球体である為の必要十分条件は，

$$\varepsilon_X^b(L_i') = \varepsilon_X^b(E_p) = 0 \qquad (\forall i, \forall p)$$

となることである。とくに，$e^b(E_s) > 0$ なる s は存在しない。

(IV) $e^b(E_t)=0$ をみたすいくつかの特異多重点 $t=t_1,\cdots,t_m$ について，open 曲面 $X'=X-\bigcup_{i=1}^{m}E_{t_i}$ を考える。このとき，$b_{t_i}=\infty$ とし，$\frac{1}{b_{t_i}}=0$ と解釈し，上の記法を拡張する。このとき，条件(II) 及び

$$\varepsilon_X^b(L_i')=\varepsilon_X^b(E_p)=0 \qquad (\forall i, \forall p)$$

が成立すれば，(X', b) の普遍一意化空間は $\mathbb{C}^2$ の開単位球体である。（$b_{t_i}=\infty$ とは，X' の E_{t_i} に対応する end で∞巡回被覆となる $(X', b|X')$ の一意化と理解する)。

([III] は Hirzebruch-Höfer による。)

参考文献

[I] 飯高茂，代数幾何学III，岩波書店基礎数学講座

[Ka1] M. Kato, *On uniformizations of orbifolds* (preprints).

[Ka2] M. Kato, *On the existence of finite principal uniformizations of* $\mathbb{C}P^2$ *along weighted line configurations*, Memoires of Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A vol 38 (1984), 127-131.

[Ko] R. Kobayashi, *Einstein-Kähler metrics on open algebraic surfaces of general type*, (to appear).