

A の進位相の分離性と M 列の並べかえ

広島修道大学 坂口通則 (Michinori Sakaguchi)

A を可換ネータ環, M を零でない有限生成 A 加群とする。 A の元の列 a_1, \dots, a_n が M 列であるとは

(1) a_i が $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ 正則である ($i=1, \dots, n$),

(2) $M \neq (a_1, \dots, a_n)M$,

を満たすことである。

M 列の並べかえがまた M 列であるかという問題は、一般には成立しないが、 A が局所環であれば成立する。これは、局所環は Zariski 環であるという事実によると思われる。この逆は、条件付きで D. Taylor [5] によって得られている。

定理 ネータ環 A が長さ 3 の A 列を持つとする。もし任意の A 列のすべての並べかえが A 列であれば、 A は局所環である。

環 A が長さ n の A 列を持たない場合について考える。問題「 a, b が M 列ならば, ba も M 列であるか」は一般には成立しないが, どのような条件があると成立するかを考える。このため, 条件「 A の元 a が M 正則ならば, M は Aa 進位相で分離的である」を満たす A 加群 M を研究する。

以下環はネーター可換環とし, 加群はすべて有限生成とする。

A を環とし, M を A 加群とする。このとき,

$$Z(M) = \{a \in A \mid M \xrightarrow{a} M \text{ が単射でない}\},$$

$$R(M) = \{a \in A \mid M \xrightarrow{a} M \text{ が単射であるが全射でない}\},$$

$$U(M) = \{a \in A \mid M \xrightarrow{a} M \text{ が全単射である}\}$$

とする。

$M \neq 0$ ならば, $Z(M), R(M), U(M)$ は A の互いに排反な部分集合で, $A = Z(M) \cup R(M) \cup U(M)$ である。さらに,

$$K(M) = \{a \in A \mid \cap a^n M = 0 \ (n=1, 2, \dots)\}$$

とする。

$K(M)$ は A の部分集合であって, $K(M) \subset Z(M) \cup R(M)$ となる。一般に $K(M)$ はイデアルにならない。

§1 $K(M)$.

$a \in A$ のとき, $a \in K(M)$ であるかどうかの判定は, Krull の共通部分定理に Aa を適応して得られる次の命題を使う.

命題 1.1 A を環とし, M を A 加群とする. $a \in A$ について, $a \in K(M)$ であるための必要十分条件は, すべての $\mathfrak{p} \in \text{Ass } M$ に対して $Aa + \mathfrak{p} \neq A$ が成立することである.

系 1.2 A を環, \mathfrak{p} を A の素イデアルとする. M を零でない A 加群とする. すべての M の素因子 (associated prime ideal) が \mathfrak{p} に含まれれば, $\mathfrak{p} \subset K(M)$ である.

系 1.3 A を環, M を A 加群とする. このとき, $Z(M) \subset K(M)$ であるための必要十分条件は, すべての $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j \in \text{Ass } M$ に対して $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \neq A$ が成立することである.

命題 1.1 により良く知られている次の事が分かる.
 A が整域か局所環であれば, $K(A) = A - U(A)$ となる. A

が半局所環であれば, A の Jacobson 根基は $K(A)$ に含まれる. 系 1.3 は $Z(M) \subset K(M)$ であることを $\text{Ass } M$ の元の条件で示したが, $K(M) \subset Z(M)$ であることは次の命題から分かる.

命題 1.4 A を環, M を零でない A 加群とする. このとき, $K(M) \subset Z(M)$ であるための必要十分条件は, $\text{Ass } M$ の中に A の極大イデアルが存在することである.

系 1.5 A を環, M を零でない A 加群とする. このとき, $K(M) = Z(M)$ であるための必要十分条件は, ある A の極大イデアル \mathfrak{m} が $\text{Ass } M$ の中に存在して, \mathfrak{m} はすべての $\text{Ass } M$ の元を含む.

前に述べたように, 零でない A -加群 M に対して, $K(M) \subset Z(M) \cup R(M)$ で $Z(M) \cup R(M) = A - U(M)$ であるから $K(M) \subset A - U(M)$ となる. 命題 1.1, 系 1.2, 系 1.3, 補題 1.6 を使って, A 加群 M が $K(M) = A - U(M)$ となる条件を定理 1.7 で求める.

補題 1.6 A を環, M を A 加群とすると, $U(M) =$

$A - \cup \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in \text{Supp } M$ となる。

定理 1.7 A を環とし, M を零でない A 加群とする。
 $\text{Ass } M = \{\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n\}$ とすると次は同値である。

(1) $K(M) = A - U(M)$.

(2) $\mathfrak{m} \in \text{Supp } M$ である極大イデアル \mathfrak{m} と $\mathfrak{P} \in \text{Ass } M$ に対して $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{m}$ である。

(3) $R(M) \subset K(M)$ が $\mathfrak{P}_1 + \dots + \mathfrak{P}_n \neq A$ である。

さらに, $R(M) \neq \phi$ である場合には, 定理 1.7 の (3) の条件を言いかえて次の定理を得る。

定理 1.8 A を環とし, M を零でない A 加群で $R(M) \neq \phi$ とする。このとき, $K(M) = A - U(M)$ であるための必要十分条件は, $R(M) \subset K(M)$ である。

§ 2 $K(M) = A - U(M)$ となる加群 M 。

A 加群 M で $K(M) = A - U(M)$ を満たすものを構成する一つの方法を示す。

A を環, \mathfrak{a} を A のイデアルとするとき,

$$S(\omega) = \{a \in A \mid Aa + \omega = A\}$$

とする。 $S(\omega)$ は A の積閉部分集合である。命題 1.1, 定理 1.7 を言いかえると次の命題となる。

命題 2.1 A を環, M を A 加群とする。 $a \in A$ に対して, $a \in K(M)$ であるための必要十分条件は, すべての $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M$ に対して $a \notin S(\mathfrak{p})$ となることである。

命題 2.2 A を環, M を零でない A 加群とする。このとき, $K(M) = A - U(M)$ であるための必要十分条件は, すべての $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M$ に対して $S(\mathfrak{p}) = U(M)$ となることである。

A を環, M を零でない A 加群とする。 $S(\omega)$ の定義から, $\text{Ass} M = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ とすると, $S(\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n) \ni 0$ となるのは $\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n = A$ の時である。 $\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n \neq A$ で $S = S(\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n)$ とする。

定理 2.3 上の仮定のもとで次は同値である。

- (1) $K(M) = A - U(M)$.
- (2) $S = U(M)$.

(3) 自然な写像 $M \rightarrow M_S$ が同型である。

この定理より A 加群 M_S が $K(M_S) = A - U(M_S)$ を満たす。

§3 M 列の並べかえ。

A を環, M を A 加群とする。 a, b が M 列とすると, $a \notin Z(M/bM)$ ([1], Th. 117) であるから, b, a が M 列であるための必要十分条件は $b \notin Z(M)$ である。

補題 3.1 A を環, M を A 加群とする。 a, b が M 列ならば $0 :_M b \subset \cap a^n M$ ($n=1, 2, \dots$) である。

系 3.2 M を A 加群で $R(M) \subset K(M)$ とする。 a, b が M 列ならば b, a も M 列である。

定理 3.3 M を A 加群とすると次は同値である。

- (1) a, b が M 列ならば b, a も M 列である。
- (2) $a \in R(M) - K(M)$ ならば $R(M/aM) = \emptyset$ である。
- (3) $a \in R(M) - K(M)$ と $m \in \text{Supp } M/aM$ である極大イデアル m に対して $\text{depth}_{A_m} M_m = 1$ である。

例 k を体とし, $R = k[X, Y, Z]/(XY)$ とする.
 $R = k[x, y, z]$ と表す. $\pi = (x, y, z)$, $\nu = (x-1, y)$,
 $S' = (R-\pi) \cap (R-\nu)$ と置く. このとき, $A = R_{S'}$ とす
ると A は半局所環で $R(A) - K(A) \neq \emptyset$ である. さらに,
 A は A 加群として定理 3.3 の同値条件を満たす.

参 考 文 献

- [1] I. Kaplansky, Commutative rings, The University of Chicago press, Chicago, 1974.
- [2] H. Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin, New York, 1970.
- [3] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, 1962.
- [4] M. Sakaguchi, Remarks on the separation of the A -adic topology and permutations of M -sequences, to appear.
- [5] D. Taylor, Ideals generated by monomials in an R -sequence, Chicago thesis, Chicago, 1966.