数理解析研究所講究録
第545巻 1985年 152-161

Yang-Mills 接続の変形

大阪大学理学部　小磯憲史 (Norihito Koiso)

__問題__　Yang-Mills 接続が一つ与えられた時、その「近く」にどのくらい「他の」Yang-Mills 接続があるか決定せよ。

Yang-Mills 接続については、4次元の多様体上で多くの研究が行なわれている。ここでは、その変形に関して、①高次元に拡張すること、②低次元の場合も含めて、簡単な証明を与えること、を目的とする。Yang-Mills 接続の定義等については詳しく述べない。前の伊藤氏を参照されたい。

1. 変形の障害

最初に、幾何学的構造の、変形における基本的命題を述べる。

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & \overset{p_I}{\nearrow} & \mathrm{Im}\,E'_{x_0} \\ \mathcal{S} & \subset & \mathcal{E} & \subset & X & \xrightarrow{\quad E \quad} & Y & = & & & \oplus \\ \| & & & & x_0 & \longmapsto & 0 & & & \underset{p_C}{\searrow} & C \\ E^{-1}(0) & & & & & & & & & & \end{array}$$

補題 1.1　$E: X \to Y$ を Hilbert 空間から Hilbert 空間への実解析的写像で、$E(x_0)=0$ とする。もし $\mathrm{Im}\, E'_{x_0}$ が Y において閉ならば、$\mathrm{Ker}\, E'_{x_0}$ を接空間とする X の実解析的部分多様体 $\mathcal{E}$ が存在し、E の零点集合 $\mathcal{S}$ は(x_0 の近くで)$\mathcal{E}$ の実解析集合となる。

証明)　ほぼ明らかである。$\mathrm{Im}\, E'_{x_0}$ の補空間 C をとれば、$\mathrm{Im}\, E'_{x_0}$ への射影を P_I としたとき、$P_I \circ E$ の x_0 における微分は全射である。よって、陰関数定理から、$\mathcal{E} := (P_I \circ E)^{-1}(0)$ が X の実解析的部分多様体であることがわかり、また、$\mathcal{S} = (P_C \circ E|\mathcal{E})^{-1}(0)$ である。　//

系 1.2　補題 1.1 において、$\mathrm{Ker}\, E'_{x_0} = 0$ ならば、x_0 は孤立零点である。

補題 1.1 によって、$\mathcal{S}$ がある程度小さいということがわかるが、次に、いつ $\mathcal{S}$ が $\mathcal{E}$ に一致するかということが問題となる。

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset X \xrightarrow{E} Y \qquad X \times Y \xrightarrow{I} Z$$

定義　補題 1.1 の条件に加え、$X \times Y$ から Hilbert 空間 Z への C^ω 写像 I が存在して、次を満たすとする。

① $x \in X$ を固定した写像 $I_x : Y \to Z$ が線型 ($\forall x$)

② $\forall x \in X$ に対して　$I_x(E(x)) = 0$

このとき、$\mathrm{Im}\, E'_{x_0} \subset \mathrm{Ker}\, I_{x_0}$ であるが、商空間 $\mathrm{Ker}\, I_{x_0} / \mathrm{Im}\, E'_{x_0}$ を（写像Eの零点の変形の、写像Iに関する、x_0における）障害の空間という。

実際、次のことが成立する。

<u>定理1.3</u> 上の定義の条件下で、障害の空間が消えるならば、零点集合 $\mathcal{S}$ は多様体 $\mathcal{E}$ に x_0 の近くで一致する。

証明） 補題1.1により、$\hat{E} = E|\mathcal{E}$, $\hat{I} = I|\mathcal{E}\times C$ とおけば $\mathcal{S} = \hat{E}^{-1}(0)$ であり、又、

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \xrightarrow{\hat{E}} \mathcal{E} \times C \xrightarrow{\hat{I}} Z$$

$$\mathrm{Ker}\, \hat{I}_{x_0} = C \cap \mathrm{Ker}\, I_{x_0} = C \cap \mathrm{Im}\, E'_{x_0} = 0,$$

即ち $\hat{I}_{x_0}$ は単射である。更に、$\hat{I}_x(\hat{E}(x)) = 0$ であったから、これを微分し、$\hat{I}_{x_0}$ が単射であることに注意すれば、帰納法によって、$\hat{E}$ の x_0 におけるすべての微分が0であることが容易にわかる。

<u>注意</u> もし、I_{x_0} の像が Z において閉ならば、$\hat{I}_{x_0}$ は C から Z の中への同型を与えるから、任意の $x \in \mathcal{E}$ に対して $\hat{I}_x$ が単射となる。従って、$\hat{I}_x(\hat{E}(x)) \equiv 0$ から $\hat{E} \equiv 0$ を得る。この時は、Eの実解析性も必要としない。

2. Yang-Mills 接続とその局所前分類空間

以下、コンパクトなRiemann多様体(M, g)とその上のHermite内積を持った複素ベクトル束(E, I, k)を固定する。これらはC^∞のカテゴリーで考える。(E, I, k)の接続∇に対して曲率テンソルR^∇が定まる。局所的には、束の次元をkとしたとき、∇は$u(k)$に値を持つ1-形式A、R^∇は$u(k)$に値を持つ2-形式であって、

$$(2.1) \quad R^\nabla{}_{ij}{}^p{}_q = (\partial_i A_j{}^p{}_q - \partial_j A_i{}^p{}_q) + (A_i{}^p{}_r A_j{}^r{}_q - A_j{}^p{}_r A_j{}^r{}_q)$$

と表示される。R^∇がAと∂Aに関して実解析的であることに注意する。

<u>定義</u> 接続∇に対して、$\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2$ ($\|\cdot\|$はL_2ノルム)を対応させる汎関数をYang-Mills汎関数と呼び、F_{YM}で表わす。F_{YM}に関するEuler-Lagrangeの方程式E_{YM}をYang-Millsの方程式といい、その解をYang-Mills接続という。

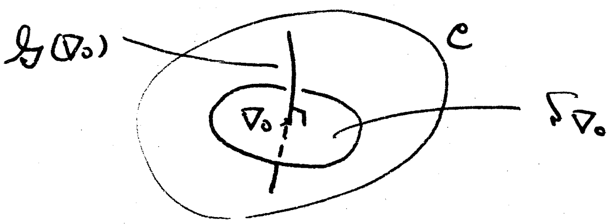
さて、(2.1)の主要部は外微分dで与えられているから、E_{YM}の主要部は1-形式に対するδd (δはdの形式的随伴)になる。従ってYang-Millsの方程式は楕円型ではない。実は、この退化部分は、幾何学的にいうと、束Eの自己同型群から来ている。自己同型は本質的には単なる座標変換のようなもので、汎関数F_{YM}や方程式E_{YM}はそれで

不変にされるからである。自己同型は局所的に $u(E)$ に値を持つ関数 $\gamma^p{}_q$ であって、

(2.2) $\quad A_i{}^p{}_q \rightsquigarrow \partial_i \gamma^p{}_q + A_i{}^p{}_q + \cdots$

なる変換を引き起こす。

接続全体のなす空間 $\mathcal{C}$ と E の自己同型群 $\mathcal{G}$ を考えたとき、上の立場から、商空間 $\mathcal{C}/\mathcal{G}$ を考える必要があるが、これは一般に特異点を持ち、分析しにくい。そこで、接続 ∇_0 が与えられた時、軌道 $\mathcal{G}(\nabla_0)$（これは $\mathcal{C}$ の部分多様体になる）の ∇_0 における接空間の L_2 内積に関する直交補空間をとり、その十分小さな近傍を切片 S_{∇_0} と定義する。



このとき、次が成りたつ。

<u>事実 2.1</u> [完備性] ∇_0 に近い任意の ∇ に対し、$\gamma \in \mathcal{G}$ が存在して $\gamma(\nabla) \in S_{\nabla_0}$ となる。[効果的] $\nabla \in S_{\nabla_0}$ を $\gamma \in \mathcal{G}$ で移して S_{∇_0} に入るなら、即ち $\gamma(S_{\nabla_0}) \cap S_{\nabla_0} \neq \emptyset$ ならば、実は $\gamma(\nabla_0) = \nabla_0$ で $\gamma(S_{\nabla_0}) = S_{\nabla_0}$ である。

即ち、S_{∇_0} は「∇_0 の近くの接続を過不足なく」含んでいる。必要ならば $H := \{\gamma \in \mathcal{G} \,;\, \gamma(\nabla_0) = \nabla_0\}$ で割ることになるが、H はコンパクト Lie 群であって、その性質は見

やすい。

<u>定義</u>　∇_0 を Yang-Mills 接続とするとき、S_{∇_0} の中の Yang-Mills 接続全体のなす空間を ∇_0 の周りの Yang-Mills 接続の局所的分類空間という。

この空間の定義方程式の主要部は E_{YM} からの δd, (2.2) の形式的随伴からの δ であるから、合わせて楕円型である。このことから、$\mathrm{Im}(E_{YM}|S_{\nabla_0})_{\nabla_0}$ (主要部 $\sim \delta d(\mathrm{Ker}\,\delta)$) が適当な Sobolev ノルムに関して閉であることもわかる。更に、E_{YM} の係数が ∇ に関して実解析的で、E_{YM} が Hilbert 空間から Hilbert 空間への実解析的写像であることが確かめられる。従って、補題 1.1 から次を得る。

<u>定理 2.1</u>　∇_0 を Yang-Mills 接続とする。このとき、$T_{\nabla_0}S_{\nabla_0} \cap \mathrm{Ker}(E_{YM})_{\nabla_0}$ (有限次元) を接空間とする S_{∇_0} の実解析的部分多様体が存在して、∇_0 の周りの Yang-Mills 接続の局所的分類空間はその実解析集合となる。

実解析集合というのは弱い条件のようであるが、特に局所で弧状連結ということだから、臨界値として E_{YM} の値が局所的に定数であることがわかる。従って、次の系を得る。

<u>系 2.2</u>　Yang-Mills 汎関数の、Yang-Mills 接続においてとる値は、高々可算個である。

系 2.3 平坦(あるいは自己双対, 反自己双対)な Yang-Mills 接続 ∇_0 の近くの Yang-Mills 接続も平坦(自己双対, 反自己双対)である。

実際、この3種の Yang-Mills 接続は, 汎関数 F_{YM} のある位相的な最小値を実現することでそれぞれ特徴付けられる(平坦 ⇔ $F_{YM}(\nabla)=0$, 双対は伊藤氏を参照のこと)。

3. 正則 Einstein 接続

この節では, 多様体 M が n 次元複素多様体で, g が Kähler 計量であると仮定する。又, g の Kähler 形式を ω であらわす。このとき, 接続 ∇ の曲率テンソル R^∇ は2つの成分: 反 Hermite 成分と Hermite 成分に分解し, 後者は ω との内積成分を含んでいる。それを跡成分と残りに分解しておく。

$$R^\nabla \left\langle \begin{array}{l} AR^\nabla \cdots [R^\nabla_{\alpha\beta}] \\ HR^\nabla \cdots [R^\nabla_{\alpha\bar\beta}] \left\langle (\omega, R^\nabla) \left\langle \begin{array}{l} T(\omega, R^\nabla) \\ Z(\omega, R^\nabla) \end{array} \right. \right. \end{array} \right.$$

事実 3.1 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}} R^\nabla$ 及び $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(R^\nabla \wedge R^\nabla)$ は第1, 2 Chern 類(微分位相不変量)をあらわし、特に、

$$\int_M (\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}} R^\nabla) \wedge \omega^{n-1}, \qquad \int_M (\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(R^\nabla \wedge R^\nabla)) \wedge \omega^{n-2}$$

は ∇ に依らない。これらは上の分解を用いて次のように表示される。

$$\int_M T(\omega, R^\nabla)\, v_g = A$$

$$\|AR^\nabla\|^2 - \|HR^\nabla\|^2 + \|(\omega, R^\nabla)\|^2 = B$$

さて、ここで、$F_{YM}(\nabla)$, $\|(\omega, R^\nabla)\|^2$ は

$$\|R^\nabla\|^2 = \|AR^\nabla\|^2 + \|HR^\nabla\|^2$$

$$\begin{aligned}\|(\omega, R^\nabla)\|^2 &= \|Z(\omega, R^\nabla)\|^2 + \|T(\omega, R^\nabla)\|^2 \\ &\geq \|Z(\omega, R^\nabla)\|^2 + \left(\int_M T(\omega, R^\nabla)\, v_g\right)^2 / Vol(M, g)\end{aligned}$$

と変形できるから、結局

$$F_{YM}(\nabla) \geq 2\|AR^\nabla\|^2 + \|Z(\omega, R^\nabla)\|^2 + A^2/Vol(M, g) - B$$

（等号 $\Leftrightarrow$ $T(\omega, R^\nabla)$ が定数）

となる。

<u>定義</u>　$AR^\nabla = 0$ かつ $(\omega, R^\nabla) = c \cdot I$（$c$ は定数）なる接続 ∇ を正則 Einstein 接続という。

従って、正則 Einstein 接続は F_{YM} の最小値を与え、特に Yang-Mills 接続である。よって、系 2.3 と同様にして次を得る。

<u>定理 3.2</u>　∇ を正則 Einstein 接続とすると、∇ の回りの Yang-Mills 接続の局所前分類空間は「正則 Einstein 接続の局所前分類空間」に一致する。

従って、正則Einstein接続の回りでは、Yang-Mills接続を調べることと正則Einstein接続を調べることとは同じことである。実は、Yang-Millsの方程式自体に対しては1節で述べた「変形の障害空間」を効果的につくることはできないが、正則Einsteinの方程式に対してはそれが存在し、結局、正則Einsteinを経由することでYang-Millsを調べることができる。

事実3.3 任意の接続 ∇ に対して

$$(\partial^\nabla R^\nabla)_{\alpha\beta\gamma} := \nabla_\alpha R^\nabla_{\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\nabla_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R^\nabla_{\alpha\beta} = 0$$

この等式と、前に与えた恒等式(A)を1節で述べた恒等式 I として採用すれば、次の定理を得る。

定理3.4 ∇を正則Einstein接続とする。もし、$H^0_\nabla(M, \mathfrak{u}(E)) = \mathbb{R}\cdot I$ かつ $H^{2,0}_\nabla(M, \mathfrak{u}(E)^{\mathbb{C}}) = 0$ ならば、∇の回りのYang-Mills接続の局所的分類空間は $H^1_\nabla(M, \mathfrak{u}(E)^{\mathbb{C}})$ と同型なベクトル空間を接空間とする多様体である。

ここで、空間 H^1_∇ 等の定義を述べることができないが、それはある線型楕円型微分方程式の解空間として得られるもので、(M, g) 及び ∇ が「きれいなもの」ならば、計算可能なものである。

例3.5 複素射影空間 $P^n(\mathbb{C})$ の上の正則ベクトル束 $T^+P^n(\mathbb{C})$ の対称テンソル積 $S^2T^+P^n(\mathbb{C})$ をとる。そこに

は $P^n(\mathbb{C})$ の Fubini－Study計量から自然に定まる正則Einstein接続 ∇ が定義され、上の定理の条件を満たし、かつ $H^1_\nabla \neq 0$ である。従って、∇の近くに、標準的でない Yang-Mills 接続がある。

注意3.6 空間 H^1_∇ 等は、ベクトル束の正則構造の変形を考察した時に得られるものと同型なものである。「正則 Einstein」という言葉もそれに由来する。詳しい関係は（4次元に限るが）伊藤氏を参照されたい。