数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 110-125

ジーゲル保型形式のフーリエ係数の積公式

長崎大 教養 小関道夫 (Michio Ozeki)

§0 序

1変数の2つの保型形式 $f(z), g(z)$ のフーリエ展開

$$f(z) = \sum a_n \exp(2\pi i n z) \quad ,$$

$$g(z) = \sum_{n \geqq 0} b_n \exp(2\pi i n z) \quad ,$$

があるとき、その積 $f(z)g(z)$ のフーリエ展開

$$f(z)g(z) = \sum_{n \geqq 0} c_n \exp(2\pi i n z)$$

の係数 c_n を a_n, b_n から求めるのは容易である。すなわち

$$c_n = \sum_{\substack{\ell + m = n \\ \ell, m \geqq 0}} a_\ell b_m$$

により、与えられる。1変数でのこのような平易な事情は次数2以上のジーゲル保型形式では、もはや成立せず、同一次数の2つのジーゲル保型形式の積のフーリエ係数は、それを求めることが切実な場合であっても、非常に限定された場合をケースバイケースで扱っているのが、今までの実情であった。例えば、andrianov の L-函数のオイラー因子の実例を計算する場合でも、このような計算上の困難が理由で、せいぜい

2－因子か3－因子を計算して理論的予測に役立てていた（Conf. [5]）。

講演者は、matrix partition（Conf. [1]）の問題を考えているうちに、2-part partitionという問題の解の応用として、ジーゲル保型形式のフーリエ係数の積公式が得られることに気がついた。

§1で、2-part partition problemの定義をし、次数2の場合の結果を概ね述べる。

§2で、積公式の結果と実例を記述する。

§3において、§2で得られた公式を用いて、weight 22のMaass spaceに入らないSiegel modular formのAndrianov式L-函数のオイラー因子を$p = 2, 3, 5$について求める計算を行った。

§1 2-part partition problem.

次数nの半整値、半正値、対称行列で階数がr以上のもの全体を$\mathcal{P}_n(r)$で表す。Tを$\mathcal{P}_n(r)$の元とするとき、

$$T = T_1 + T_2 \qquad T_1 T_2 \in \mathcal{P}_n(r)$$

の形の表し方をTの2-part partitionということにする。

ここで、Tの2-part partition $T = T_1 + T_2$と$T = T_2 + T_1$とは同じものと見なす。

問題　T を $\mathcal{P}_n(r)$ の元とするとき、T の 2-part partition で異なるものはどれ程あるか？

二次形式の reduction の考えを使うと、問題が幾分容易になる。

$G = GL(n, \mathbb{Z})$ とする。$\mathcal{P}_n(r)$ の元 T 及び T' は $g \in G$ があって ${}^t g T g = T'$ となるとき、同値であるという。同値な行列 T と T' の 2-part partition には

$$T = T_1 + T_2 \iff {}^t g T g = T' = ({}^t g T_1 g) + ({}^t g T_2 g)$$

により一対一の対応がつく。

従って、同値なものの class $cl(T)$ の代表について 2-part partition を考察すればよい。

これから先は、最終的な結果が得られている $n=2$ の場合に話を限定する。($n=3$ でも、かなり議論は進められるが、細部の検討が済んでいない。$n \geqq 4$ の場合は reduction の理論が十分に整備されていないせいで、未だ様子がはっきりしない。) $r=0$ と $r=1$ とでは問題はほとんど変わらない。

($r=2$ の 2-part partition は $\mathcal{P}_2(1)$ でのそれを制限することにより得られる)。

$\mathcal{P}_2(1) \ni T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ を (a, b, c) と略記する。$cl(T)$ の代表として、reduced matrix T を選ぶ。すなわち、T は条件

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c \qquad (1)$$

をみたす。

a, b を条件

$$a \geqq b \geqq 0, \quad a > 0 \qquad (2)$$

をみたす integers とする。

$\Phi(a,b,m)$ により、(a,b,m) が属する同値類を表わすことにする。又 $\Phi(0,0,m)$ により $(0,0,m)$ が属する同値数を表わす。

注意 (i) $(a,b,m) \in \mathcal{P}_2(1) \Leftrightarrow m \geqq b^2/4a$

(ii) (a,b,m) : reduced $\Leftrightarrow m \geqq a$

Proposition 1. $b=0$ 又は 1 で $m \geqq$ とする。このとき $(1,b,m)$ の 2-part partitions は次のものでつくされる。

$$\begin{aligned}(1,b,m) &= (1,b,m) + (0,0,0)\\ &= (1,b,m-i) + (1,0,i)\end{aligned}$$

ここで i は $0 \leqq i \leqq m$ if $b=0$

$1 \leqq i \leqq m-1$ if $b=1$ かつ $m \geqq 2$

証明は容易なので略す。

定理1(基本定理) a, b を条件(2)と条件 $a \geqq 2$ とを満たす integers とする。m を $\geqq a$ となる integer とする。このとき、(a,b,m) の 2-part partition は次のものでつくされる。

$$\begin{aligned}(a,b,m) &= (a,b,m-i) + (0,0,i) \qquad (3)\\ &= (a_1, b+k, m-i) + (a_2, -k, i) \qquad (4)\end{aligned}$$

分割 (3) においては i は制限。

$$0 \leqq i \leqq m - b^2/4a$$

を受け、分割 (4) においては、

(i) $a = a_1 + a_2 \quad (1 \leqq a_1 \leqq a_2)$ は $a \geqq 2$ の 2-part partition で

(ii) k は制限

$$\min_{0 \leqq i \leqq m}\left(\max\left(-2\sqrt{a_1(m-i)}-b, -2\sqrt{a_2 i}\right)\right) \leqq k \leqq \max_{0 \leqq i \leqq m}\left(\min\left(2\sqrt{a_1(m-i)}-b, 2\sqrt{a_2 i}\right)\right) \quad (5)$$

を受け

(iii) 条件 (5) をみたす固定された k に対して i は

$$k^2/4a_2 \leqq i \leqq m - (b+k)^2/4a_1 \quad (6)$$

の中で動く。

証明は難しくない。詳しくは [2] を参照。

上の定理では、未だ十分使い易い形をしていない。次の Prop. はその難点を緩和する。

Proposition 2. a, b を条件 (2) 及び $a \geqq 2$ をみたす integer とし、

$$(a, b, m) = (a_2, -k, i) + (a_1, b+k, m-i)$$

を (a, b, m) の 2-part partition で $1 \leqq a_1 \leqq a_2$ とする。このとき

$$(a_2, -k, i) \in \Phi(a_2, k_2, i + (k_2^2 - k^2)/4a_2) \quad (7)$$

$$(a_1, b+k, m-i) \in \Phi(a_1, k_1, m-i + (k_1^2 - (k+b)^2)/4a_1) \quad (8)$$

ここで k_1 と k_2 とは次の条件により一意的に定まる integers である。

$$-k \equiv \pm k_2 \pmod{2a_2} \qquad (9)$$ （例外を除いて $\pm k_2$ のうちの片方だけがみたされる。）

$$0 \leqq k_2 \leqq a_2 \qquad (10)$$

$$b+k \equiv \pm k_1 \pmod{2a_1} \qquad (11)$$ （(9) と同じことが言える。）

$$0 \leqq k_1 \leqq a_1 \qquad (12)$$

証明 略

§2 degree 2 の Siegel modular forms $f(Z)$, $g(z)$ の積 $f(z)g(z)$ のフーリエ係数の公式

§1 の基本定理と Prop. 2 の応用として導かれる。すなわち

$$f(Z) = \sum_T \alpha(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)},$$

$$g(Z) = \sum_T \beta(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

を次数2, even weight h_1, h_2 の Siegel modular form とする。T は集合 $\mathcal{P}_2(1) \cup \{0\}$ を動く。このとき $f(Z)g(Z)$ は weight $h_1 + h_2$ の Siegel modular form で

$$f(Z)\, g(Z) = \sum_T \gamma(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

とすると、$\gamma(T)$ は

$$\gamma(T) = \sum_{T_1+T_2=T} \alpha(T_1)\beta(T_2)$$

で与えられるが, $T_1 + T_2 = T$ は T の $\mathcal{P}_2(0)$ での 2-part partition 全体を動く。さらに $T_1 + T_2$ と $T_2 + T_1$ とは区別される。

注意：ただし (a, b, m) の 2-part partition $T = T_1 + T_2$ で、$T_1 = (a_1, b+k, m-i)$, $T_2 = (a_2, -k, i)$ のとき Prop. 2 の条件中の

(7), (8) のように reduce したとき、$a_1 = a_2$ かつ $k_1 = k_2$ が成り立つときは、i が (6) の条件で動いたとき T_1 がとりうる行列は、全体として、T_2 がとりうる行列と一致してしまうので、$T_1 + T_2$ と $T_2 + T_1$ とは区別しない方が正しくなる。
この注意はこのままでは理解され難いので、後の実例のときさらに説明する。

定理 2. notations を上の通りとする。このとき、次のことが成り立つ。

(i) $T = (1, b, m)$ で $b = 0$ 又は 1, $m \geqq 1$ のとき

$$\gamma(T) = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \alpha(1,0,m-i)\beta(0,0,i) + \alpha(0,0,i)\beta(1,0,m-i) \right\} \qquad \text{if } b = 0$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \alpha(1,1,m-i)\beta(1,0,i) + \alpha(1,0,i)\beta(1,1,m-i) \right\} \qquad \text{if } b = 1 \text{ and } m \geqq 2$$

(ii) $T = (a, b, m)$ $a \geqq b \geqq 0$, $m \geqq a \geqq 2$ のとき

$$\gamma(T) = \sum_{0 \leqq i \leqq m - b^2/4a} \left\{ \alpha(a,b,m-i)\beta(0,0,i) + \alpha(0,0,i)\beta(a,b,m-i) \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{a_1 + a_2 = a \\ 1 \leqq a_1 \leqq a_2}} \sum_{k_1, k_2} \sum_{\mu_1 \leqq h \leqq \mu_2}^{\Delta} \left\{ \alpha(a_2, k_2, h)\beta(a_1, k_1, \mu_3 - h) + \alpha(a_1, k_1, \mu_3 - h)\beta(a_2; k_2, h) \right\}.$$

ここで μ_1, μ_2, μ_3 は次により定まる。

$$\mu_1 = \begin{cases} k_2^2/4a_2 & \text{if } k_2^2/4a_2 \equiv 0 \pmod{1} \\ [k_2^2/4a_2] + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_2 = \left[m + (k_2^2 - k^2)/4a_2 - (b+k)^2/4a_1 \right]$$

上の μ_1, μ_2 で [ ] はガウスの記号を示す。

$$\mu_3 = m + (k_2^2 - k^2)/4a_2 + \{k_1^2 - (k-b)^2\}/4a_1$$

又 k_1, k_2 は Prop. 2 で与えられた有限個の整数。$\sum^{\Delta}$ の意味は $a_1 = a_2$, $k_1 = k_2$ のとき $\{\ \}$ の項は $\alpha(a_2, k_2, h)\beta(a_1, k_1, \mu_3 - \mu)$ だけをとり、$\alpha(a_1, k_1, \mu_3 - h)\beta(\mu_2, k_2, h)$ は除くことである。（上記注意参照）

上の定理の実例を与える。

$A_m = (1, 1, m)$ $m \geqq 1$, $B_m = (1, 0, m)$ $m \geqq 0$, $C_m = (2, 2, m)$ $m \geqq 1$

$D_m = (2, 1, m)$ $m \geqq 1$, $E_m = (2, 0, m)$ $m \geqq 0$, $F_m = (3, 3, m)$ $m \geqq 1$

$G_m = (3, 2, m)$ $m \geqq 1$, $H_m = (3, 1, m)$ $m \geqq 1$, $K_m = (3, 0, m)$ $m \geqq 0$

$S_m = (0, 0, m)$ $m \geqq 0$ 　等と書くと

$$\gamma(A_m) = \sum_{i=0}^{m-1} \{\alpha(A_{m-i})\beta(S_i) + \alpha(S_i)\beta(A_{m-i})\}$$

上式の右辺を $\sum_{i=0}^{m-1}{}^{*} \alpha(A_{m-i})\beta(S_i)$ のように便宜的に略記する。

$$\gamma(B_m) = \sum_{i=0}^{m}{}^{*} \alpha(B_{m-i})\beta(S_i)$$

$C_m \sim K_m$ は観点を少し変更することにより、ある種の無限級数により表されることがわかる。ここでは結果だけを書き、詳細は[2]を参照されたい。

$$\gamma(C_m) = \sum_{i=0}^{m-1}{}^{*} \alpha(C_{m-i})\beta(S_i) + \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-(2g^2+2g+1)} \alpha(B_i)\beta(B_{m-(2g^2+2g+1)-i})$$

$$+ \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{m-(2g^2+4g+3)} \alpha(A_i)B(A_{m-(2g^2+4g+2)-i})$$

上式の右辺において、$m-(2g^2+2g+1) < 0$ 又は $m-(2g^2+4g+3) < 1$

のときは項が消えると解釈する。このように決めておけば、上の公式はすべての m に有効な公式となる。以下の公式も同様。

定理２の直前の注意の式では、どのように反映されているかを見ると、項 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-(2q^2+4q+3)} \alpha(A_i)\beta(A_{m-(2q^2+4q+2)-i})$ のように $f(z)$ の係数 $\alpha(A_i)$ において i が 1 から $m-(2q^2+4q+3)$ まで動けば $\beta(A_{m-(2q^2+4q+2)-i})$ の添数 $m-(2q^2+4q+2)-i$ は $m-(2q^2+4q+3)$ から 1 までを動き、全体として A_i と $A_{m-(2q^2+4q+2)-i}$ とは同じ元を渡る故 $*$ を考える必要がない。

$$\gamma(D_m) = \sum_{i=1}^{m-1}{}^{*}\alpha(D_{m-i})\beta(S_i) + \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-(2q^2+q+1)}{}^{*}\alpha(A_{m-(2q^2+q)-i})\beta(B_i)$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-(2q^2+3q+1)}{}^{*}\alpha(A_i)\beta(B_{m-(2q^2+3q+1)-i})$$

$$\gamma(E_m) = \sum_{i=0}^{m}{}^{*}\alpha(S_i)\beta(E_{m-i}) + \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-2q^2}\alpha(B_i)\beta(B_{m-2q^2-i})$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-(2q^2+2q+1)}\alpha(A_i)\beta(A_{m-(2q^2+2q)-i})$$

$$\gamma(F_m) = \sum_{i=1}^{m-1}{}^{*}\alpha(S_i)\beta(F_{m-i}) + \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-(6q^2+6q+3)}{}^{*}\alpha(E_i)\beta(A_{m-(6q^2+6q+2)-i})$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-(3q^2+3q+2)/2}{}^{*}\alpha(D_i)\beta(B_{m-(3q^2+3q+2)/2-i})$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-(6q^2+1)}{}^{*}\alpha(C_i)\beta(A_{m-6q^2-i})$$

$$\gamma(G_m) = \sum_{j=0}^{m-1}{}^{*}\alpha(G_{m-j})\beta(S_j)$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-(6\ell^2+4\ell+1)}{}^{*}\alpha(E_j)\beta(B_{m-(6\ell^2+4\ell+1)-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(3\ell^2+\ell+2)/2}{}^{*}\alpha(D_j)\beta(A_{m-(3\ell^2+\ell)/2-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(6\ell^2+10\ell+4)}{}^{*}\alpha(C_j)\beta(B_{m-(6\ell^2+10\ell+4)-j})$$

$$\gamma(H_m)=\sum_{j=0}^{m-1}{}^{*}\alpha(H_{m-j})\beta(S_j)$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-(6\ell^2+2\ell+1)}{}^{*}\alpha(E_j)\beta(A_{m-(6\ell^2+2\ell)-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(3\ell^2+5\ell+2)/2}{}^{*}\alpha(D_j)\beta(B_{m-(3\ell^2+5\ell+2)/2-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(6\ell^2+8\ell+3)}{}^{*}\alpha(C_j)\beta(A_{m-(6\ell^2+8\ell+2)-j})$$

$$\gamma(K_m)=\sum_{j=0}^{m}{}^{*}\alpha(K_{m-j})\beta(S_j)$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-6\ell^2}{}^{*}\alpha(E_j)\beta(B_{m-6\ell^2-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(3\ell^2+3\ell+2)/2}{}^{*}\alpha(D_j)\beta(A_{m-(3\ell^2+3\ell)/2-j})$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-(6\ell^2+6\ell+1)}{}^{*}\alpha(C_j)\beta(B_{m-(6\ell^2+6\ell+1)-j})$$

§3　附録

§2で得られた公式を使って得られた数値を利用した計算結果を附記する。

次数2，weight 22 の Siegel cusp form の space を $S(2,22)$

とする。

$S(2,22) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ と直和分解される。

ここで $\mathcal{M}$ は Maass space で

$\dim \mathcal{M} = 3 \quad \dim \mathcal{N} = 1$

weight 10, 12 の normalized cusp forms を χ_{10}, χ_{12} と書き.
$T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ での フーリエ係数を $a(T) = a(a,b,c)$ と書く。
$\mathcal{E}_k$ により、次数2、weight k の normalized Eisenstein series を表すことにする。$S(2,22)$ の基底として

$\varphi_1 = \mathcal{E}_4 \mathcal{E}_6 \chi_{12}$, $\varphi_2 = \mathcal{E}_6^2 \chi_{10}$, $\varphi_3 = \mathcal{E}_4^3 \chi_{10}$, $\varphi_4 = \chi_{10} \chi_{12}$

がとれる。

§2 の公式を使って、φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) のフーリエ係数が容易に計算できる。ただし. アイゼンスタイン級数のフーリエ係数を知らないと駄目だが、それらは〔3〕にある。

表 1

	a(1,1,1)	a(1,0,1)	a(1,0,2)	a(1,0,3)	a(1,1,2)	a(1,0,4)
φ_1	1	10	-2772	-1318736	-352	-34285920
φ_2	1	-2	2052	-478064	-1024	-24815904
φ_3	1	-2	-1404	-332912	704	-27649824
φ_4	0	0	0	0	0	0

	a(2,2,2)	a(2,0,2)	a(2,0,4)	a(2,2,4)
φ_1	52656	-250720	1557708480	-86576128
φ_2	94992	-1576480	7710368832	-2278220800
φ_3	36240	-740128	-4816069056	2068708352
φ_4	1	-18	-3420	4032

	a(4,4,4)	a(1,1,7)	a(1,1,19)
φ_1	2804871676672	-7172200476	124487024452375
φ_2	2732394670336	-4039384860	127106006826775
φ_3	3243200483584	-4524482844	104842215671575
φ_4	1024272	0	0

	a(3,3,3)	a(3,0,3)	a(3,3,6)
φ_1	1058618007	77564480400	-3597369935616
φ_2	1738945431	-36145105488	-2388054564864 0
φ_3	627454359	-11139811920	-7248556085760
φ_4	3072	-55392	-3819648

	a(3,3,7)
φ_1	77834010436375
φ_2	29134677393175
φ_3	-6236389128425
φ_4	64281600

Maass [6] に述べられている方法を使うと、$\hat{\varphi}_4 = a\varphi_4$, $\psi_1 = \varphi_1 + 80640\,\hat{\varphi}_4$, $\psi_2 = \varphi_2 + 169344\,\hat{\varphi}_4$, $\psi_3 = \varphi_3 + 192000\,\hat{\varphi}_4$ により定まる ψ_1, ψ_2, ψ_3 が $\mathcal{M}$ に属することがわかり、かつそれらは一次独立である。上の表から ψ_1, ψ_2, ψ_3 のフーリエ係数も容易に得られる。

T(n) を次数2の Siegel modular form におけるヘッケ作用素とする。T(2) の ψ_i への作用から $\mathcal{M}$ における T(n) の同時固有函数を決定することができるが、$\mathcal{M}$ については Saito-Kurokawa 予想(の解決)により、よく性質がわかっているので、計算的にも意義があまりない。そこで、$\mathcal{N}$ の方に興味を絞る。

Maass space $\mathcal{M}$ に入らないヘッケ作用素の同時固有函数 Φ を

求める。すなわち $\Phi \mid T(n) = \lambda(n)\Phi \quad \forall n \geqq 1$ となる Φ を探す。

$$f(Z) = \sum_T a(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

に作用したときの form のフーリエ展開を

$$f(Z) \mid T(n) = \sum_T a(n;T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

とする。

Andrianov [4] の公式 (2,1,11) を特殊化すれば $a(p;T)$, $a(p^2;T)$ 等の関係式が得られるが、それを一つ一つは書かない。$a(P;T)$ の値を少し表で与えておく。

表 2

	a(2;(1,1,1))	a(2;(1,0,1))	a(2;(1,0,2))
ψ_1	778416	-2828640	-3831043392
ψ_2	1619088	-31107360	4649638464
ψ_3	1764240	-33941280	-12198029760
φ_4	1	-18	-3420

	a(2;(1,1,2))	a(2;(2,2,2))	a(3;(1,1,1))
ψ_1	2101490688	1598885819136	6774937128
ψ_2	1719450624	4988647473408	9907752744
ψ_3	10512399360	6164915155200	9422654760
φ_4	4032	1024272	3072

	a(3;(1,0,1))	a(3;(1,1,2))	a(5;(1,0,1))
ψ_1	37363182480	-6369517668096	6183049439739000
ψ_2	-120567831120	-29702055886848	-1225988235979800
ψ_3	-106857187920	-13848907829760	-697447646309400
φ_4	-55392	-3819648	-1131914880

	a(5;(1,1,1))
ψ_1	601324182655500
ψ_2	603943165029900
ψ_3	581679373874700
φ_4	99837440

表1，表2を使えば

$$(\star)\begin{cases} \psi_1 \mid T(2) = -105984\psi_1 - 834240\psi_2 + 1718640\psi_3 \\ \psi_2 \mid T(2) = -2322432\psi_1 + 1083840\psi_2 + 2857680\psi_3 \\ \psi_3 \mid T(2) = -2534400\psi_1 - 3816000\psi_2 + 8114640\psi_3 \\ \hat{\varphi}_4 \mid T(2) = -12\psi_1 - 10\psi_2 + 31\psi_3 - 2215680\hat{\varphi}_4 \end{cases}$$

(★)より

$$\Phi \mid T(2) = -2215680\Phi \qquad \lambda(2) = -2215680$$

が結論できる。

Φを具体的に求めるには、

$$\Phi = \hat{\varphi}_4 + t_1\psi_1 + t_2\psi_2 + t_3\psi_3$$

とおいて、定数 t_1, t_2, t_3 を求めればよい。

$$\Phi \mid T(2) = \hat{\varphi}_4 \mid T(2) + t_1\{\psi_1 \mid T(2)\} + t_2\{\psi_2 \mid T(2)\} + t_3\{\psi_3 \mid T(2)\} = -2215680\Phi$$

と(★)より

$$t_1 = \frac{30}{19125120}, \quad t_2 = -\frac{5}{19125120}, \quad t_3 = -\frac{61}{19125120}$$ が求まり

$\tilde{\Phi} = 30\psi_1 - 5\psi_2 - 61\psi_3 + 19125120\tilde{\varphi}_4$ も同時固有函数になる。

表1と表2を利用すれば

$$\tilde{\Phi} \mid T(3) = \lambda(3)\cdot\tilde{\Phi}, \quad \lambda(3) = -2991631320$$

$$\tilde{\Phi}|T(5) = \lambda(5)\cdot\tilde{\Phi} \quad , \quad \lambda(5) = 9105\,01379\,83500$$

P における Hecke polynomial を $H_P(X,\tilde{\Phi})$ とすると、

$$H_P(X,\tilde{\Phi}) = 1-\lambda(P)X + (\lambda^2(P)-\lambda(P^2)-P^{40})X^2 - \lambda(P)P^{41}X^3 + P^{82}X^4$$

$\lambda(P^2)$ を単独に計算するのは面倒であるが、個々の P について言えば、$H_P(X,\tilde{\Phi})$ を決定するためには、$\lambda(P^2)$ を計算しないでも済む。([5] の P.161〜162 にその考えが見られる。) すなわち

$$\lambda(2^2) = \lambda(2)^2 - 3\cdot 2^{20}a(1,0,3)\cdot a(1,1,1)^{-1} - 2^{41}$$

$$\lambda(3^2) = \lambda(3)^2 - 3^{20}\lambda(3) - 3^{21}a(1,1,7)\,a(1,1,1)^{-1} - 3^{41}$$

さらに同様の考えで、

$$\lambda(5^2) = \lambda(5)^2 - 3\times 5^{20}a(1,1,19)/a(1,1,1) - 3\times 5^{20}a(3,3,7)/a(1,1,1) - 5^{41}$$

となることも示すことができる。($a(T)$ は $\tilde{\Phi}$ のフーリエ係数)。

ただし、[5] では $a(1,3,0)$ $a(1,7,1)$ と書いている所をここでは、$a(1,0,3)$, $a(1,1,7)$ と書いていることに注意。

これらのことより、

$$H_2(X,\tilde{\Phi}) = 1-\lambda(2)X + 2^{20}\times 2453920\,X^2 - \lambda(2)\,2^{41}X^3 + 2^{82}X^4$$

$$H_3(X,\tilde{\Phi}) = 1-\lambda(3)X - 3^{20}\times 2770092810\,X^2 - \lambda(3)\,3^{41}X^3 + 3^{82}X^4$$

$$H_5(X,\tilde{\Phi}) = 1-\lambda(5)X + 5^{20}\times 37266257592 2500\,X^2 - \lambda(5)\,5^{41}X^3 + 5^{82}X^4$$

で、

$H_2(X,\tilde{\Phi})$, $H_3(X,\tilde{\Phi})$, $H_5(X,\tilde{\Phi})$ の根 $\rho_2^{(1)},\cdots,\rho_2^{(4)}$, $\rho_3^{(1)},\cdots,\rho_3^{(4)}$, $\rho_5^{(1)},\cdots,\rho_5^{(4)}$ は複素数根で、

$$|\rho_2^{(i)}| = 2^{-\frac{41}{2}} \quad , \quad |\rho_3^{(i)}| = 3^{-\frac{41}{2}}, \quad |\rho_5^{(i)}| = 5^{-\frac{41}{2}} \qquad (i=1,2,3,4)$$

であることも確かめられる。

すなわち、この場合も[5]の Conjecture 3 を支持する。

文献

[1] M.Ozeki, "A matrix partition problem." J. Comb. Th. Ser.A 36 (1984).

[2] M.Ozeki, "On 2-part partition problem in symmetric matrices and its application." to appear

[3] M.Ozeki & T.Washio, "An extended table of the Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two." Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ. Natural Science Vol.23 (1982) 1-16.

[4] A.N.Andrianov, "Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2." Russian Math. Surveys, 29 (1974).

[5] N.Kurokawa, "Examples of Eigenvalues of Hecke Operators on Siegel cusp forms of degree two." Inv. Math. 49 (1978).

[6] H.Maass, "Uber eine Spezialschear von Modulformen zweiten Grades." Inv. Math. 52 (1979).