数理解析研究所講究録
第546巻 1985年 150-158

$U(1,2)$と$U(3)$におけるHecke作用素の跡の交代和

東大・理　古関春隆 (Harutaka Koseki)

互いに他のinner formであるようなふたつの代数群の保型形式の間のLanglands対応の問題に関して，伊吹山氏と橋本氏は，具体的で接近しやすいと思われるひとつの枠組を導入され，$Sp(2,\mathbb{R})$とそのcompact twistの場合に‘次元の交代和の比較定理’を得られた([1], [2], [3])．ここでは$U(1,2)$と$U(3)$に対し，類似物と思われる‘Hecke作用素の跡の交代和の間の関係式’について報告する．

1. 設定

Fを虚2次体とし，$F/\mathbb{Q}$に関し次のふたつの3次Hermite行列を考える：

$$H_1=\begin{pmatrix} & & 1\\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix},\quad H_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

我々の対象は，$\mathbb{Q}$上定義されたふたつのreductive群G_1, G_2であって，それらの$\mathbb{Q}$-有理点の群は次式で与えられる：

$$G_i(\mathbb{Q}) = \{ g \in GL(3, F) \mid {}^t\bar{g} H_i g = H_i \} \quad (i=1,2).$$

Landherr の古典的定理より，Fを固定したときの3次ユニタリ群のQ上の同型類はこれらを代表とする2個のみであることがわかる．　また，G_1とG_2はQの任意の有限素点ℓにおいて同型である．　そこで同型

$$\Theta_\ell : G_{1,\ell} \xrightarrow{\sim} G_{2,\ell}, \quad \Theta_\ell(g) = \vartheta_\ell^{-1} g \vartheta_\ell$$

の列$\{\Theta_\ell\}_{\ell \neq \infty}$を固定する．　ここで$\vartheta_\ell$は，適当な条件を満足する$GL(3, F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$の元である．

実reductive群$G_{1,\infty}$は連結であって，対称領域

$$\mathfrak{D} = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid 2\mathrm{Re}(z) - |w|^2 > 0 \}$$

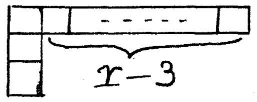
に対する作用$g\langle \mathfrak{z} \rangle$とスカラー値保型因子$j(g, \mathfrak{z})$が

$$g \begin{pmatrix} {}^t\mathfrak{z} \\ 1 \end{pmatrix} = j(g, \mathfrak{z}) \begin{pmatrix} {}^t(g\langle \mathfrak{z} \rangle) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g \in G_{1,\infty},\ \mathfrak{z} \in \mathfrak{D})$$

により定まる．　整数$x > 4$と$G_{1,f} = G_{1,A_f}$の開コンパクト部分群$U_{1,f}$に対し，$U_{1,f}$に関するweight xの正則cusp formの空間$\mathfrak{S}_x(U_{1,f})$を次のように定義する：

$$\mathfrak{S}_x(U_{1,f}) = \{ f : G_{1,A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{(i) 左}G_1(\mathbb{Q})\text{右}U_{1,f}\text{-不変，(ii) }G_{1,\infty}\text{への制限は }j(g,\mathfrak{z})^x\text{ を保型因子として正則，(iii) 有界} \}.$$

同じ整数xに対し，コンパクト群$G_{2,\infty}$の表現$\rho = \rho_x$を，そのYoung図式が



となるものとする. ρ の表現空間 M は $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ 次元であり，このような対応 $r \longleftrightarrow \rho$ により，$G_{1,\infty}$ と $G_{2,\infty}$ の上の軌道積分の間によい関係式が成立することになる. この ρ と $G_{2,f}=G_{2,A_f}$ の開コンパクト部分群 $U_{2,f}$ に対し，$U_{2,f}$ に関する 'weight ρ' の保型形式の空間 $\mathfrak{S}_\rho(U_{2,f})$ を

$$\mathfrak{S}_\rho(U_{2,f})=\left\{f: G_{2,A}\longrightarrow M \;\middle|\; \text{(i) 左}\,G_2(\mathbb{Q})\,\text{右}\,U_{2,f}\text{-不変, (ii) } f(gg_\infty)=\rho(g_\infty)^{-1}f(g)\ \ \forall g_\infty\in G_{2,\infty}\right\}$$

により定める.

上の状況において，$G_{i,f}$ の $U_{i,f}$ に関するHecke環を $\mathcal{L}(G_{i,f},U_{i,f})$ とし，$\varphi_1\in\mathcal{L}(G_{1,f},U_{1,f})$ [resp. $\varphi_2\in\mathcal{L}(G_{2,f},U_{2,f})$] の定める $\mathfrak{S}_r(U_{1,f})$ 上 [resp. $\mathfrak{S}_\rho(U_{2,f})$ 上] のHecke作用素を $T_1(\varphi_{1,f})$ [resp. $T_2(\varphi_{2,f})$] と書くことにする. 周知のSelberg trace formulaにより，次の跡の積分表示を得る:

$$\begin{aligned}&\mathrm{trace}(T_i(\varphi_{i,f}))\\ &=\int_{G_i(\mathbb{Q})\backslash G_{i,A}}\sum_{\gamma\in G_i(\mathbb{Q})}(\varphi_{i,\infty}\otimes\varphi_{i,f})(g^{-1}\gamma g)\,dg \quad (i=1,2).\end{aligned}$$

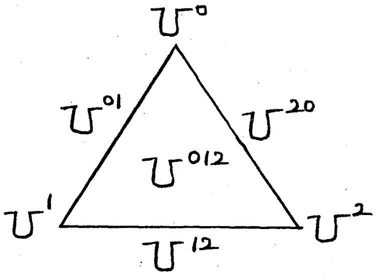
ここで $\varphi_{1,\infty}$ は $G_{1,\infty}$ 上のweight r のBergman核，$\varphi_{2,\infty}$ は ρ^{-1} のtraceとする.（測度のnormalizationについては省略する.）

2. 結果

以下，$\left(\frac{F/\mathbb{Q}}{p}\right)=+1$ なる $\mathbb{Q}$ の有限素点 p をひとつ固定する．従って，

$$G_{1,p}\cong G_{2,p}\cong GL(3,\mathbb{Q}_p).$$

$GL(3,\mathbb{Q}_p)$ の standard parahoric subgroups を U^τ（$\tau=0,1,2,01,12,20,012$）と書く．これらの包含関係は下図のようになる：



ここで $U^0=GL(3,\mathbb{Z}_p)$，$U^{01}=\left\{\begin{pmatrix} * & * & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix}\right\}\cap U^0$，$U^{012}=\left\{\begin{pmatrix} * & p* & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix}\right\}\cap U^0$（$*\in\mathbb{Z}_p$）で，$U^0$ と U^1 と U^2，U^{01} と U^{12} と U^{20} はそれぞれ共役な部分群であり，また U^{012} は Iwahori subgroup である．先程の同型により，$G_{i,p}$ の開コンパクト部分群 $U_{i,p}^\tau$ が各 τ に対し定まる．ただし $\Theta_p(U_{1,p}^\tau)=U_{2,p}^\tau$ とする．さらに各 τ に対し，$G_{i,f}$ の開コンパクト部分群 $U_{i,f}^\tau$ を，

$$U_{i,f}^\tau=\prod_{l\neq p}U_{i,l}\times U_{i,p}^\tau \qquad (i=1,2)$$

で定める．ここに $U_{i,l}$ は $G_{i,l}$ の（τ によらぬ）開コンパクト部分群で $\Theta_l(U_{1,l})=U_{2,l}$ をみたすものとする．

次に Hecke 環 $\mathcal{L}(G_{i,f},U_{i,f}^\tau)$ の元 $\varphi_{i,f}^\tau$ を次の形のものとする：

$$\varphi_{i,f}^{\tau} = \bigotimes_{\ell \neq p} \varphi_{i,\ell} \otimes \varphi_{i,p}^{\tau} \qquad (i=1,2).$$

ここに$\varphi_{i,\ell} \in \mathcal{L}(G_{i,\ell}, U_{i,\ell})$ $(\ell \neq p)$であり，$\Theta_{\ell}^{*}(\varphi_{2,\ell}) = \varphi_{1,\ell}$とする． また$\varphi_{i,p}^{\tau}$は$U_{i,p}^{\tau}$の特性関数とする．

各$\varphi_{i,f}^{\tau}$は，$\mathfrak{S}_r(U_{1,f}^{\tau})$ $(i=1)$もしくは$\mathfrak{S}_p(U_{2,f}^{\tau})$ $(i=2)$上にHecke作用素$T_i(\varphi_{i,f}^{\tau})$を定めるが，我々の結果は，

<u>定理</u>　$^{\forall} r > 4$に対し次の関係式が成立する：

$$\sum_{\tau} \varepsilon(\tau)\, \mathrm{trace}(T_1(\varphi_{1,f}^{\tau})) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau)\, \mathrm{trace}(T_2(\varphi_{2,f}^{\tau}))$$

ただし，

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1 & \cdots \quad \tau = 0, 1, 2, 012 \\ -1 & \cdots \quad \tau = 01, 12, 20 \end{cases}.$$

さて，伊吹山・橋本両氏の，$Sp(2,\mathbb{R})$とそのcompact twistに関する比較定理においては，ふたつの$\mathbb{Q}$-groupsは無限素点とある1個の有限素点で同型でなく，その唯1個の有限素点においてparahoric subgroupsに関する交代和が導入されている． ところが我々のG_1とG_2はすべての有限素点で同型なのであるから，どこかの有限素点で交代和をとるという必要はないのではないかとも思われよう． 実際，別の定式化（たとえば表現論的な定式化）によってより‘自然’な比較定理が得られる可能性はあると思うが，現在のところよくわからない． しかし，我々がここに述べてきたような方向で比較しようとするときには，次のことを示すことがで

きる：

<u>命題</u>　$G_{i,f}$ の開コンパクト部分群 $U_{i,f}=\prod_{l\neq\infty} U_{i,l}$ $(i=1,2)$ で $^\forall l$ において $\Theta_l(U_{1,l})=U_{2,l}$ をみたすものが，任意に与えられたとき，次の(i), (ii) をみたす $\mathcal{L}(G_{i,f},U_{i,f})$ の元 $\varphi_{i,f}=\bigotimes_{l\neq\infty}\varphi_{i,l}$ $(i=1,2)$ が存在する．

(i) $^\forall l$ において $\Theta_l^*(\varphi_{2,l})=\varphi_{1,l}$．

(ii) $\mathrm{trace}(T_1(\varphi_{1,f})|\mathfrak{S}_p(U_{1,f}))\neq \mathrm{trace}(T_2(\varphi_{2,f})|\mathfrak{S}_p(U_{2,f}))$

となるような $p>4$ が無限個存在する．

<u>3. 証明の方針</u>

定理の証明で主に用いるのは，以下のことである：

(イ) $G_{1,\infty}$ と $G_{2,\infty}$ の上の軌道積分の間の関係式．

(ロ) $G_{1,\infty}$ における Selberg 原理．

(ハ) $G_{1,p}\cong G_{2,p}\cong GL(3,\mathbb{Q}_p)$ の上の 'Steinberg型' 軌道積分がある範囲の共役類上で消えていること．

(ニ) $G_i(\mathbb{Q})$ のひとつの stable conjugacy class に含まれる共役類の記述．

(ホ) G_1 の trace formula において，半単純でない元の寄与（$\lim_{s\downarrow 0}$ つきの表示）から(ハ)の軌道積分が 'くくり出せる' こと．

ここでは(ニ)についてのみ，簡単に触れておくことにする．

我々の群G_iにおいては，stable conjugacyとconjugacyは一致しない．Langlands [5]の序文にあるように，このような場合のtrace formulaの比較には，$GL(n)$とsimple algebraの場合などには見られない新しい困難があると考えられる．それは，半単純元に対してすら，localな軌道積分の間の関係式からglobalなtraceの間の関係式が直ちには出てこないという困難である．

我々の場合，(二)の知識を使ってこれを見なおすことができる．$f(x)$をF係数，3次，monicで$f(0)\neq 0$かつ'相反型'の多項式とし，簡単のため$f(x)$はseparableとする．このとき

$$C_i(f(x))_{\mathbb{Q}} = \{ g \in G_i(\mathbb{Q}) \mid g\text{の固有多項式は}f(x) \}$$

とし，$\sim_{\mathbb{Q}}$で$G_i(\mathbb{Q})$－共役による同値を表わす．また$\mathbb{Q}$の各素点vにおいて$C_i(f(x))_v$，$\sim_v$を同様に定義する．このときよく知られているように，自然な写像

$$C_i(f(x))_{\mathbb{Q}}/\sim_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \prod_v C_i(f(x))_v/\sim_v$$

はinjectiveであるが，もちろんsurjectiveではなく，その像は(i) adelicな条件，および(ii)各vにおける不変量の，すべてのvをわたる積が1という形のproduct formula型の条件，の両者によって特徴づけられる．ここで容易にわかることは，上に述べた困難をひきおこしているのは(ii)のproduct formulaだということである.

ところが, $f(x)$ がF上既約の場合, このproduct formula型の条件は出てこないのである. 従ってそのような $f(x)$ に対応する寄与については, localな(イ)から直ちにglobalな関係式を得ることができる.

では, $f(x)$ がF上可約の場合はどうかと言うと, この仮定から $C_i(f(x))_p$ が(ハ)の'消える'型になることがわかる. つまりこのような $f(x)$ に対応する寄与は0になる. ここでpが $\left(\frac{F/\mathbb{Q}}{p}\right)=+1$ なる素点であるため, 'pで交代和をとる'という操作は, 共役類の寄与を消す働きが大きく,それによって話がうまくいったのである.

詳細については[4]を参照して下さい.

文献

[1] T. Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 30 ('84)

[2] ——————, On relations of dimensions between automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I), Bonn. Math.

[3] T. Ibukiyama and K. Hashimoto, —————— (II), Bonn. Math.

[4]. H. Koseki, On a comparison of trace formulas for GU(1,2) and GU(3), to appear.

[5]. R. P. Langlands, Stable conjugacy; definitions and lemmas, Canad. J. Math. 31 ('79).