数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 171-185

moonshine について

名大 理 小池 正夫
(Masao Koike)

moonshine というのは Conway と Norton が 1979 年に発表した論文の中で、保型関数と "monster" とよばれる散発的単純群で最大位数のものとの間の奇妙な関係につけた nickname です。それは当時存在証明のなかった monster の存在証明のヒントとして期待されたし、一方では単純群の分類問題完成後の群論の新しい研究対象として提出されたわけです。ここでは moonshine が保型形式論の分野でひきおこした問題についてのべる。

保型関数, 保型形式について簡単にふれておく。
$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ に $GL_2^+(\mathbb{R})$ が 1 次分数変換で作用している。$GL_2^+(\mathbb{R})$ の discrete な部分群 Γ で次の群を含んでいるものを考える。$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ ; \ a \equiv d \equiv 1 \mod N, \ c \equiv 0 \mod N \right\}$.

$\Gamma_0(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \; ; \; c \equiv 0 \bmod N \}$ もその1つです。$\mathbb{H}$ を Γ で割って得られる商空間は有限個の cusp とよばれる点を付加することで閉リーマン面 X_Γ になる。$\mathbb{H}$ 上の関数で X_Γ 上の有理型関数をひきおこすものを Γ に関する保型関数という。 $k \geqq 1$ 整数 χ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ とする。

<u>Def.</u> $\mathbb{H}$ 上の関数 $f(z)$ が $\Gamma_0(N)$ に関する weight k, 指標 χ の保型形式とは 次の (1) (2) をみたすものをいう。

(1) $f(z)$ は $\mathbb{H}$ 上有理型で、

$$f(\gamma z) = \chi(d)(cz+d)^k f(z), \quad {}^\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

(2) ${}^\forall$cusp で 有理型.

上記の定義で 有理型を全て正則にかえたものを modular form といい、更に (2) を (2)$'$ ${}^\forall$cusp で 0 にかえたものを cusp form という。この時

$$\{\text{modular forms}\} = \{\text{cusp forms}\} \oplus \{\text{Eisenstein 級数}\}$$

と分解できる。Eisenstein 級数とかいたのは 具体的にその形が書ける関数達です.

$\Gamma_0^+(N)$ を $\Gamma_0(N)$ と $\begin{pmatrix} & -1 \\ N & \end{pmatrix}$ で生成される群とし、$X_{\Gamma_0^+(N)}$ でその閉リーマン面とする。

次に sporadic な単純群についてのべる。

リー型でない単純群については Mathieu 群が最初で、1861年に M_{12}, 1873年に M_{24} が見つかり、それから約100年たって Janko 群, 鈴木群等と爆発的に研究が進み, 1973年に Fisher と Griess によって "Monster" F_1 の存在が予想され、数年前に 26個の sporadic 単純群の分類が完成している。

F_1 の位数は $2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$ です。F_1 と保型関数の間の奇妙な関係はそれに先だついくつかの観察にもとづいている。

(I) Ogg の観察

p を素数とした時

$$p \mid F_1 \text{の位数} \iff X_{\Gamma_0^+(p)} \text{の genus が } 0$$

この中で, p が $p+1 \mid 24$ の時はその $\Gamma_0^+(p)$ の保型関数体の生成元がきれいにかける。いくつか例をあげる。

$\Gamma_0(1)$ は素数ではないが 先ずかく。

$$J(z) = \text{楕円曲線の不変量の } 1728 \text{ 倍}$$

$$= \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = \frac{\theta(z;E_8)^3}{\eta(z)^{24}}$$

ここで $\eta(z)$ は Dedekind の η-関数で $\Delta(z)=\eta(z)^{24}$ は weight 12 の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する cusp form, E_8 は E_8-lattice で $\theta(z;E_8)$ はその theta 関数で $E_4(z)=\theta(z;E_8)$ は

$SL_2(\mathbb{Z})$に関する weight 4 の Eisenstein 級数です。

$\Gamma_0^+(2)$ に対応するのは $\dfrac{\theta(z;E_8)\,\theta(2z;E_8)}{\eta(z)^8\,\eta(2z)^8}$ です。

$\Gamma_0^+(3)$ に対応するのは $\dfrac{\theta\left(z;\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)^6}{\eta(z)^6\,\eta(3z)^6}$ です。

(II) Mckay の観察

F_1 の既約指標 χ で自明でないものは $\chi(1) \geq 196883$ が成立つ。しかも $\chi(1) = 196883$ をみたすものが存在することが予想されていた。(今ではこのことが正しいことが証明されている。) 一方 $J(z)$ の Fourier 展開は

$$J(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + \cdots \quad = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$$

$q = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とかけている。Mckay は q の係数について

$$196884 = 196883 + 1$$

で右辺は F_1 の既約表現の次数の和と見れることを注意した。

(III) Thompson の観察

c_1 以外の小さい n についての c_n 達に対しても

$$c_n = \sum_{\chi:\ F_1\text{の既約指標}} a_{n,\chi}\cdot\chi(1) \qquad ,\ 0 \leq a_{n,\chi} \in \mathbb{Z}$$

とかけることをみた。ただし，$a_{n,\chi}$ は全て簡単な数でかけるところが大切。ただ単に上にかくだけなら $196884 = 196884\cdot 1$ とかいてもよいのだから。

(IV) Conway と Norton の予想

Thompson の式にもとづいて $H_n = \sum_{\chi} a_{n,\chi}\chi$ とおけば、H_n は F_1 の指標を定める。Thompson の示唆によって Conway は F_1 の単位元以外の元 g について $H_n(g)$ を計算して

$$q^{-1} + \sum_{n\geq 1} H_n(g) q^n$$

という形の Fourier 展開をもつ関数が保型関数の Fourier 展開と小さいnについてぴったり一致することを発見する。そして、次の予想を提出した。

F_1 の各元 g について、$\mathbb{H}$ 上の正則関数 $T_g(z)$ が対応して次の性質をみたす。

(0) $T_e(z) = J(z) - 744$, e: F_1 の単位元

(1) $T_g(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(g) q^n$, $H_n(g) \in \mathbb{Z}$, と Fourier 展開をもち、$\forall n \geq 1$ について $H_n(g)$ は g の関数として、F_1 の指標である。

(2) $^{\exists}\Gamma_g \supset \Gamma_0(N)$ で Γ_g の genus が 0 であって、Γ_g の保型関数体の生成元が $T_g(z)$ となるものがある。

[C-N] では $T_g(z)$ が具体的にかきあげられ、それについてのぼう大な情報が与えられている。ここでは (1) の性質が証明されねばならないことに注意する。この現象が moonshine とよばれる。

moonshine をみた時、最初は (2)は保型関数に関する条件, (1)は群の指標に関する条件と全く異なる組み合わせにおどろく。しかし、次の2つに区別して考えてもよかろう。

(I) 群の指標を係数にもつ保型関数, 保型形式の研究.

(II) F_1と保型関数の関係の研究.

(II)については [C-N] の書かれた時は F_1の存在証明がなかったので、それのヒントと期待され、存在証明のできた今は、それから moonshine の証明ができないかと調べられている。それに比べれば (I)はより取り扱いやすいし、(I)を詳しく調べることが (II)にも役立つと思える。

(I)を 2次形式と η-積の 2つから説明する。

(1) 2次形式

$L = \sum \mathbb{Z} e_i$, e_i: basis が even lattice とは 2次形式 $\langle , \rangle$ が入っていて, $\langle e_i, e_j \rangle = a_{ij}$, $A = (a_{ij})$ とおいたとき

$a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ii} \in 2\mathbb{Z}$, $A > 0$

が成立つものとする.

G を $\mathrm{Aut}\, L$ の有限部分群とする. G の元 π に対して

$L^\pi = \{ x \in L \ ; \ \pi x = x \}$ は又 even lattice である.

L^π の theta 関数:

$$\theta(z; L^\pi) = \sum_{x \in L^\pi} e^{\pi i z \langle x, x \rangle}, \quad z \in H$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi)\, q^n$$

は もし rank L^π が偶数なら ある $\Gamma_0(N)$ に関する modular form になる。各 $n \geq 1$ について

$$L_n = \{ x \in L \ ; \ \langle x, x \rangle = 2n \}$$

は有限集合で、G は L_n に置換をひきおこす。これで定まる G の表現の指標を χ_n とすれば

$$a_n(\pi) = \chi_n(\pi), \qquad {}^\forall \pi \in G$$

が成立つ。従って係数が群の指標となる modular form がつくれた。

(2) η-積

有限群 G の有限次元表現 (ρ, V) に対して、G の各元 π の定める行列 $\rho(\pi)$ の固有多項式 $f_\pi(X)$ の根を $\{\varepsilon_i(\pi)\}$ とする。

次の形式的巾級数

$$\prod_i \left(1 - \varepsilon_i(\pi) q\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\pi) q^n$$

の係数 $b_n(\pi)$ は V の n 次対称テンソルできまる G の表現の指標となる。更に (ρ, V) が G の有理表現ならば、$f_\pi(X)$ の係数は有理整係数だから

$$f_\pi(X) = \prod_{1 \leq t \in \mathbb{Z}} (X^t - 1)^{r_t}, \qquad r_t \in \mathbb{Z}$$

の形に1意的にかける。

Def. π の (ρ, V) に関する Frame shape とは

$$\prod_t t^{r_t} = 1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdots$$

とかける symbol のことをいう。

$\prod_t t^{r_t}$ symbol が Frame shape になっていれば、有限個の t を除いて $r_t = 0$ である。Frame shape は輪積表示を一般化したものになっている。

Def. $\pi = \prod t^{r_t}$ の η-積 $\eta_\pi(z)$ を次で定義する。

$$\eta_\pi(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$$

Lemma 上記の状況で

$$\eta_\pi(z)^{-1} = q^{-\frac{\sum t\cdot r_t}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\pi) q^n, \quad A_n(\pi) \in \mathbb{Z}$$

とかけば、$A_n(\pi)$ は G の指標になる。

証明は前頁の $b_n(\pi)$ が G の指標になることと、$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} 1-q^n$ とかけることよりでる。

従って、$\eta_\pi(z)$ の係数は G の一般化された指標になることがわかる。

(I) に対する2通りの解答を与えたが、それを次のように一緒に組みあわせれば保型関数でその Fourier 係数が群の指標となるものがつくれる。

G: 有限群で G の有理表現 (ρ, V) で $\dim V = 24$ なるものを考える。この時 V の lattice L で次の性質をもつものがとれる。

(1) L は even lattice.

(2) $\mathrm{Aut}\, L \leftarrow G$

このとき $G \ni \pi$ に対して

$$j_\pi(z) = \frac{\theta(z; L^\pi)}{\eta_\pi(z)} = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\pi) q^n, \quad c_n(\pi) \in \mathbb{Z}$$

とかける。この時

(1) $c_n(\pi)$ は G の指標である。

(2) $\operatorname{rank} L^\pi$ が偶数ならば、$j_\pi(z)$ はある $\Gamma_1(N)$ に関する保型関数になる。

が証明できる。従って $j_\pi(z)$ が genus 0 の保型関数体の生成元になっていることがわかれば moonshine のもつ2つの性質が成立つことがいえる。注意することは この構成では Conway-Norton の場合と違って (1) の性質が自明で (2) の性質が moonshine の成立するカギになっていることです。そして Ogg の観察のところで注意したように、genus 0 の保型関数で $j_\pi(z)$ と同じ形 i.e. 2次形式の theta 関数を η-積で割って得られる関数 をしているものが数多く知られている。

moonshine を上の原理で構成しようとする時、次のあいまいな形で提出される問題を解くことが重要になる。

問題1　$\eta_\pi(z)$ の研究。η-積で得られる保型形式のもつ性質を調べる。

問題2　1.で調べた $\eta_\pi(z)$ について、それで2次形式の theta 関数を割って得られる保型関数が genus 0 の

保型関数体の生成元になる条件は何か?

<u>問題3</u>　全ての $\pi \in G$ について、$j_\pi(z)$ が問題2の解になるような"いい lattice"はあるか?

<u>問題4</u>　G の表現 (ρ, V) が"いい lattice"を持つための条件は何か?

これらの問題に対する部分的な解答に順にふれていく。

<u>Lemma</u>　$\pi = \prod_t t^{r_t}$ について

(1) $\sum r_t$: 偶数で、$\geqq 2$ とする

(2) $\sum t \cdot r_t \equiv 0 \pmod{24}$

が成立てば、$\eta_\pi(z)$ はある $\Gamma_0(N)$ に関するある指標の保型形式になる。更に

(3) $\displaystyle\sum_t \frac{(t,c)^2}{t} \cdot r_t \geqq 0 \ (> 0)$　$c \in \mathbb{Z}$

が成立てば modular form (cusp form) になる。

上記の Lemma で一般的に保型形式が得られることがわかるが"よい" $\eta_\pi(z)$ 達はその中の一部です。それに関して Mckay の次の仕事がある。$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_s \geqq 1$ を整数で $\sum k_i = 24$ をみたすものに対して $f(z) = \eta(k_1 z) \cdots \eta(k_s z) = q + \sum_{n \geqq 2} a_n q^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$ と Fourier 展開を考える。

この時 $f(z)$ の係数が乗法的とは互いに素な n, m について $a_{nm} = a_n \cdot a_m$ が常に成立つこととする。

Mckay は乗法的になる$\{k_i\}$を計算機を使って 全て見つけた。それらを Mckay list とよべば $k_1 \cdots k_s$ を Frame shape のようにかけば

$$\{24,\ 8^3\} \cup \{28\text{個}\}$$

とわかれ，$24, 8^3$ は $\sum k_i$ が奇数，残りは偶数になるものとする．$\eta(24z)$, $\eta(8z)^3$ が乗法的なのは古典的な Euler の等式，Jacobi の等式からの帰結です．残りの 28 個については次の定理が成りたつ。

<u>定理</u> 次の3つの集合は全て同じものになる．

(A) Mckay list の 28 個の解

(B) $\{k_i\}$ は次の条件をみたす．

(1) $^\forall k_i$ は k_1 の約数．

(2) $N = k_1 \cdot k_s$ とした時 $\{k_i\}_{i=1}^{s} = \{\frac{N}{k_i}\}_{i=1}^{s}$

(3) s : 偶数

(4) $\sum k_i = 24$.

(C) $\eta(k_1 z) \cdots \eta(k_s z)$ は primitive な cusp form

証明は [2] を参照．

ここで不思議なことは群の Frame shape とつながりがあることで，M_{24} の 24 次の置換表現の Frame shape は全て (B) の条件をみたしていることです．

更に問題 2 に関係する所は，Mckay list の元は全て，

問題2の解にもなっていることが確かめられる。

他のよい $\eta_\pi(z)$ は Leech lattice と関わってでてくるもので問題2, 3と直接つながりがある。

Leech lattice L は rank 24, unimodular な even lattice で長さ2の vector を持たないことで特徴づけられる。L の自己同型群を $\cdot O$ とかく。$\cdot O$ をその中心 $\{\pm 1\}$ で割った群は散発的単純群 $\cdot 1$ となる。$\cdot O$ の L で定まる自然な表現の Frame shape は $\pi = \prod t^{r_t}$ とかいた時 $\sum r_t \geq 0$ かつ偶数になることがたしかめられる。Conway と Norton は先にあげた論文の中で次のことが成立つのではないかと推測している：

$\cdot O \ni \pi$ について　ある F_1 の元 g があって

$$\frac{\theta(z; L^\pi)}{\eta_\pi(z)} = T_g(z) + \text{const}$$

が成立つ。

上のことが正しければ，$\eta_\pi(z)$ は全て問題2の解にもなるし，Leech lattice と $\cdot O$ の組は問題3の解にもなると推測していることになるが，残念ながら上記の推測そのものは正しくない。しかし，よい $\eta_\pi(z)$ をたくさん生じさせる事はいえるので，それを説明する。

<u>Def.</u>　$\cdot O \ni \pi = \prod t^{r_t}$ について

π が C型 $\Longleftrightarrow$ $\forall t$ について $r_t \geq 0$

π が E 型 $\Longleftrightarrow$ $\sum r_t > 0$ かつ $\exists t$ s.t. $r_t < 0$.

π が F 型 $\Longleftrightarrow$ $\sum r_t = 0$

と定義する。

C 型, E 型, F 型の元は近藤[5] に具体的にかかれているのでここではその表はかけない。その表を眺めることによって以下にのべる結果が証明できる。

Theorem. (1) π が C 型ならば, π は Mckay list の元で, $\eta_\pi(z)$ は primitive cusp form である.

(2) π が E 型ならば, $\eta_\pi(z)$ は Eisenstein 級数で その係数は乗法的である。

(3) π が F 型ならば. $\eta_\pi(z)$ は genus 0 の保型関数体の生成元である。

従って 問題 2 との関連でいえば, π が C 型, F 型の場合は問題 2 の解である. 更に π が E 型の時は Atkin-Lehner involution との関係で π が self-conjugate であるという概念が定義でき. self-conjugate な π については 問題 2 の解になることが ほとんどいえる。

M_{24} は $\cdot 0$ の部分群で. M_{24} の各元の L による Frame shape は全て C 型になるが. 最近. 田坂-近藤によって $M_{24} \ni \pi$ に

ついて $\theta(z;L^{\pi})$ が計算され，[3]で予想した形と一致することが確められた．よって この場合は Conway と Norton の推測が正しいことがわかった。従って M_{24} と Leech lattice の組は 問題3の解となる"いいlattice"である。

他にも $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ と $E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$ が "いいlattice" であることもわかっている．[4]参照．

問題4についても，一言ふれておく。G として $PSL_2(\mathbb{F}_8)$ を考えて，その有理表現 (ρ, V)，$\dim V = 24$ で 次の条件をみたしているものを考える：

<u>条件</u>　$G \ni \pi$ について π の (ρ, V) に関する Frame shape は $\cdot 0$ の Frame shape と一致する．

この条件をみたす (ρ, V) について G の元 π を Frame shape と同一視すると，self-conjugate な E型の元は問題2の解にほとんどなっていることが使えて，各 π ごとに 2次形式の theta 関数 $\Theta_\pi(z)$ が定められて $G \ni \pi \longrightarrow \dfrac{\Theta_\pi(z)}{\eta_\pi(z)}$ の写像が G の moonshine となる。

次にこの moonshine が"いいlattice"からきているものかどうかを調べている．これについても [4]を参照。

References

[1] J.H.Conway and S.P.Norton, Monstrous moonshine, Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 308-339.

[2] M.Koike, On Mckay's conjecture, Nagoya Math., 95 (1984), 85-89.

[3] M.Koike, Mathieu group M_{24} and modular forms, to appear in Nagoya J.

[4] M.Koike, Moonshines of $PSL_2(F_q)$ and the automorphism group of the Leech lattice, in preparation.

[5] T.Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, preprint.

[6] T.Kondo and T.Tasaka, The theta functions of sublattices of the Leech lattice, preprint.