数理解析研究所講究録
第 549 巻 1985 年 18-31

整係数群環の自己同型について

国士舘大・工学部　関口　勝右（Katsusuke Sekiguchi）

G を有限群，R を可換環とする。RG で R 上の群環を表す。本稿では R が $\mathbb{Z}$（the ring of rational integers），又は $\mathbb{Z}_p$（the ring of p-adic integers）の場合における RG の自己同型群についての考察を主な目的とする。

§1. General results.

R を可換環，Λ を R-algebra とする。以下の記号を用いる。

$\mathrm{Aut}_R(\Lambda)$ ： Λ の R-automorphisms 全体のなす群，
$\mathrm{In}(\Lambda)$ ： Λ の inner automorphisms 全体のなす群，
$\mathrm{cent}(\Lambda)$ ： Λ の center，
$U(\Lambda)$ ： Λ の unit group，
$\mathrm{Autcent}(\Lambda)$ ： Λ の central automorphisms 全体のなす群，

但し、Λ の R-automorphism f が central automorphism であるとは，任意の $c \in \mathrm{cent}(\Lambda)$ に対して $f(c) = c$ が成り立つことを言う。

また、

$$\mathrm{Out}_R(\Lambda) = \mathrm{Aut}_R(\Lambda)/\mathrm{In}(\Lambda),$$
$$\mathrm{Outcent}(\Lambda) = \mathrm{Autcent}(\Lambda)/\mathrm{In}(\Lambda)$$ と定める。

(Λ,Λ)-bimodule M が R 上の bimodule であるとは，任意の $r \in R$ と，任意の $m \in M$ に対して $rm = mr$ が成立することである。以後，このことを記号では M/R と書く。

定義 (1.1). (Λ,Λ)-bimodule M/R が R 上 invertible であるとは．(Λ,Λ)-bimodule N/R と bimodule isomorphisms ; $\lambda : M \otimes_\Lambda N \cong \Lambda$, $\mu : N \otimes_\Lambda M \cong \Lambda$ が存在して，次の図形を可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} M\otimes N\otimes M & \xrightarrow{\lambda\otimes 1} & \Lambda\otimes M \\ {\scriptstyle 1\otimes\mu}\downarrow & & \downarrow \\ M\otimes\Lambda & \longrightarrow & M \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} N\otimes M\otimes N & \xrightarrow{\mu\otimes 1} & \Lambda\otimes N \\ {\scriptstyle 1\otimes\lambda}\downarrow & & \downarrow \\ N\otimes\Lambda & \longrightarrow & \Lambda \end{array}$$

Invertible (Λ,Λ)-bimodule M/R の（bimodule としての）同型類を (M) と書き，これらの同型類全体の集合に積を $(M)(M')=(M\otimes_{\Lambda}M')$ で定めたものは，この積に関して群となる。これを $Pic_R(\Lambda)$ と書く。

$$Pic_R(\Lambda)=\{(M)\mid M\text{ は invertible }(\Lambda,\Lambda)\text{-bimodule}/R\}$$

特に R として $cent(\Lambda)$ を考えたとき，$Pic_{cent(\Lambda)}(\Lambda)$ を $Picent(\Lambda)$ と書く。

以下では，特に断わらない限り，R を Dedekind domain，K をその商体，A を separable K-algebra，Λ を A の R-order とする。$Picent(\Lambda)$ の subgroup $LFP(\Lambda)$ を

$$LFP(\Lambda)=\{(M)\in Picent(\Lambda)\mid M\text{ は left }\Lambda\text{-module としては locally free}\}$$

と定める。

(Λ,Λ)-bimodule X/R と R-automorphisms f, g に対し，${}_fX_g$ を加群としては X と同じもので，Λ の左右の作用を $\lambda\circ x\circ\mu=f(\lambda)x\,g(\mu)$ $(\lambda,\mu\in\Lambda,\ x\in X)$ で定めた (Λ,Λ)-bimodule とする。次の定理が知られている。

定理 (1.2)([3])

$\omega_0: Aut_R(\Lambda)\longrightarrow Pic_R(\Lambda)$ を $\omega_0(f)=({}_1\Lambda_f)$

$(f \in Aut_R(\Lambda))$ で定めると ω_0 は group homomorphism であり，$Ker\,\omega_0 = In(\Lambda)$。よって ω_0 より，group monomorphism $\omega : Out_R(\Lambda) \longrightarrow Pic_R(\Lambda)$ が導かれる。特に $\omega : Outcent(\Lambda) \longrightarrow LFP(\Lambda)$ が導かれる。

R の prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}$-adic completion を $R_\mathfrak{p}$ と書き．$\Lambda_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p} \otimes_R \Lambda$ と書く。$A_\mathfrak{p}$ 等の定義も同様である。

A の R-orders Λ, Λ' が locally conjugate であるとは，R の任意の prime $\mathfrak{p}$ に対して $\Lambda_\mathfrak{p}$ と $\Lambda'_\mathfrak{p}$ が $A_\mathfrak{p}$ で共役となることである。Λ と locally conjugate な R-orders 全体のなす集合を $L\text{-}Conj(\Lambda)$ で表すと，これに $U(A)$ は共役によって作用する。その orbits の集合を $L\text{-}Conj(\Lambda)/U(A)$ で表す。

定理(1.3)([4])

Cancellation law が locally free Λ-module について成立するとき，次の exact sequence が存在する。

$$1 \longrightarrow Outcent(\Lambda) \xrightarrow{\omega} LFP(\Lambda) \xrightarrow{\theta} C(\Lambda) \longrightarrow Coker\,\theta \longrightarrow 1$$

更に $Coker\,\theta$ と $L\text{-}Conj(\Lambda)/U(A)$ との間に 1:1 の対応がある。但し，$C(\Lambda)$ で Λ の locally free class group を表し

, θ を $\theta((M)) = [\Lambda] - [M]$ で定める。

定理 (1, 4) ([3])

(1) R の有限個の prime $\mathfrak{p}$ を除いて $LFP(\Lambda_{\mathfrak{p}}) = 1$.

(2) 次の sequence は exact

$$1 \longrightarrow LFP(\mathrm{cent}(\Lambda)) \xrightarrow{\tau} LFP(\Lambda) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} LFP(\Lambda_{\mathfrak{p}}) \to 1$$

但し $\tau((L)) = (L \otimes_{\mathrm{cent}(\Lambda)} \Lambda)$ である。

注意 (1.5). 次のことが知られている。([3], [4])

$LFP(\mathrm{cent}(\Lambda)) \cong C(\mathrm{cent}(\Lambda))$,

$\mathrm{Outcent}(\Lambda_{\mathfrak{p}}) \cong LFP(\Lambda_{\mathfrak{p}})$.

§ 2. Outcent (RG).

この章では以下の記号を用いる。

C_n : 位数 n の cyclic group,

D_n : 位数 $2n$ の dihedral group,

H_n : 位数 $4n$ の quaternion group,

S_n : n 文字上の symmetric group.

はじめに $R=\mathbb{Z}_p$ の場合を考えよう。

定理 (2.1)

G を次の群とすると，任意の素数 p に対して

$\mathrm{Outcent}(\mathbb{Z}_pG)=1$.

(1) D_4, H_2, D_q q：奇素数 ([3])

(2) $C_n]C_m$ ： C_n の C_m による半直積で $(n, m)=1$ かつ，C_m が C_n の各 Sylow-群に忠実に作用している群．

D_n , H_n ([2])

(3) metacyclic p-group , p : odd ([12])

これらの結果をみると $\mathrm{Outcent}(\mathbb{Z}_pG)=1$ が多くの群 G について成立するように思えるが，一般にはそうはならないことが示される。次の記号を用意する。

任意の有限群 G に対して

$$\mathrm{Aut}_c(G)=\{f\in \mathrm{Aut}(G) \mid f(g)\sim g \ \text{(conjugate in } G) \text{ for any } g\in G\}.$$

$\mathrm{In}(G)$ ： G の inner automorphisms 全体のなす群，

とおき，

$\mathrm{Out}_c(G)=\mathrm{Aut}_c(G)/\mathrm{In}(G)$ と定める。

すると任意の可換環 R に対して，自然に group homomorphism $Out_c(G) \longrightarrow Outcent(RG)$ が定まる。このとき

命題(2.2)([2])

Gを有限p-群とすると，次の group homomorphisms はいずれも injective である。

$$Out_c(G) \longrightarrow Outcent(\mathbb{Z}G),$$
$$Out_c(G) \longrightarrow Outcent(\mathbb{Z}_pG).$$

ところが，有限p-群で $Out_c(G)$ が単位群ではないもの，さらに可換群でさえないものの存在が知られている([9])．よって，一般には $Outcent(\mathbb{Z}_pG) \neq 1$ であることが命題(2.2)より出る。ただし，命題(2.2)の写像が surjective であるかどうかはわかっていない。

次に $R=\mathbb{Z}$ の場合を考えよう。

加群 A と自然数 m に対し，$A_{[m]}=\{a\in A \mid ma=0\}$，また，$\mathbb{Z}G$-module M に対して，$M^G=\{m\in M \mid \sigma m=m \text{ for any } \sigma\in G\}$ とおく。

次の結果がある。

定理(2.3)([2])

(1) $\mathrm{Outcent}(\mathbb{Z}D_n) \cong T_n \times C(\mathbb{Z}D_n)_{[2]}$

ここで，$n=2^e m$，$(2,m)=1$ とするとき，

$$T_n = \begin{cases} U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\langle -1\rangle & \text{if } e=0 \\ U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\langle -1\rangle & \text{if } e=1 \\ U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\times \mathbb{Z}/2^{e-1}\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}/2^{e-2}\mathbb{Z} & \text{if } e\geq 2 \end{cases}$$

と置く。

(2) $G=C_n \rtimes C_m$ を定理(2.1)(2)の群とすると

$$|\mathrm{Outcent}(\mathbb{Z}G)| = \frac{2\phi(n)^{m-1}}{|U^*(\mathbb{Z}C_m)|}\left| C\Big(\big[\mathbb{Z}C_n/(\sum_{\sigma\in C_n}\sigma)\big]^{C_m}\Big)_{[m]}\right|$$

ここで、$\phi(\cdot)$ は Euler の関数，$U^*(\mathbb{Z}C_m)=\mathrm{Im}\{U(\mathbb{Z}C_m)\longrightarrow U((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})C_m)\}$.

注意(2.4)

(1) $C(\mathbb{Z}D_n)_{[2]}$ については[1]に詳しい。

(2) 定理(2.3)の群に対しては $LFP(\mathbb{Z}G)$ 等も計算できる([2]).

§3. Normalized automorphism

G を有限群とし，$\mathbb{Z}G$ の augmentation map を ε と書く。

$\mathbb{Z}G$ の automorphism f が normalized であるとは、
$\varepsilon\circ f(\sigma)=1$ が任意の $\sigma\in G$ について成り立つことである。

N-Aut($\mathbb{Z}G$) : $\mathbb{Z}G$ の normalized automorphisms 全体のなす集合

と置く。 N-Aut($\mathbb{Z}G$) $\supset$ Autcent($\mathbb{Z}G$) であることは容易にわかる。また、Aut(G) の元は $\mathbb{Z}$-linear に拡張することによって $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G)$ の元とみなすことができるが、この同一視によって、N-Aut($\mathbb{Z}G$) $\supset$ Aut(G) と考えられる。以上より一般に、 N-Aut($\mathbb{Z}G$) $\supset$ Autcent($\mathbb{Z}G$)$\cdot$Aut(G) が成立することがわかる。

問題(3.1)

N-Aut($\mathbb{Z}G$) $=$ Autcent($\mathbb{Z}G$)$\cdot$Aut(G) となる有限群 G を決定せよ。

この等号が成立しない群 G は現在のところみつかっていない。部分的な解答としては次の結果がある。

定理(3.2)

次の群 G に対して N-Aut($\mathbb{Z}G$) $=$ Autcent($\mathbb{Z}G$)$\cdot$Aut(G) が

成立する。

(1) $G = AB$, where A is a cyclic normal subgroup of G and B is an abelian subgroup of G.

$G = S_n$ ([7], [8])

(2) G : class 2 nilpotent group ([10])

注意(3.3)

この定理に述べられた群以外にも問題(3.1)の等式が成り立つものが知られている。([8]).

§4. Zassenhaus予想

$$V(\mathbb{Z}G) = \{u \in U(\mathbb{Z}G) \mid \varepsilon(u) = 1\},$$

$$TV(\mathbb{Z}G) = \{v \in V(\mathbb{Z}G) \mid v\text{の位数は有限}\}$$

と置く。

次の予想について考えよう。

予想(4.1)([13])

Gを有限群とする。このとき，任意の $u \in TV(\mathbb{Z}G)$ は

$U(\mathbb{Q}G)$ において G の元と共役である。

この予想についての反例は今のところ見つかっていない。部分的な解答としては次の結果がある。

定理 (4.2)

次の群 G に対して Zassenhaus 予想は正しい。

(1) $G = C_p \rtimes C_q$　　p, q : primes　([5]),

(2) $G = C_{p^n} \rtimes C_m$　　p : prime, q : arbitrary　([11]),

(3) $G = C_n \rtimes C_m$　　m, n : arbitrary　([6]),

但し、(1),(2),(3) における群は定理 (2.1)(2) の仮定をみたすものとする。

References

[1] S. Endo and T. Miyata, On the class groups of dihedral groups, J. Algebra 63 (1980), 548–573.

[2] S. Endo, T. Miyata and K. Sekiguchi, Picard groups and automorphism groups of integral group rings

of metacyclic groups, J. Algebra 77 (1982), 286—310.

[3] A. Fröhlich, The Picard group of non-commutative rings, in particular of orders, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), 1—45.

[4] A. Fröhlich, I. Reiner and S. Ullom, Class groups and Picard groups of orders, Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974), 405—434.

[5] I. S. Luthar and A. K. Bhandari, Torsion units of integral group rings of metacyclic groups, J. Number Theory 17 (1983), 270—283.

[6] T. Mitsuda and K. Sekiguchi, On the units of integral group rings of metacyclic groups, Preprint.

[7] G. Peterson, Automorphisms of the integral group ring of S_n, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 14—18.

[8] ________, On the automorphism group of an integral group ring, II, Illinois J. Math. 21 (1977), 831–844.

[9] C.H. Sah, Automorphisms of finite groups, J. Algebra 10 (1968), 47–68; Addendum, ibid. 44 (1977), 573–575.

[10] S.K. Sehgal, On the isomorphism of integral group rings I, Canad. J. Math. 21 (1969), 410–413.

[11] C.P. Milies and S.K. Sehgal, Torsion units in integral group rings of metacyclic groups, J. Number Theory 19 (1984) 103–114.

[12] K. Sekiguchi, On the automorphism group of the p-adic group ring of a metacyclic p-group, J. Algebra 82 (1983), 488–507 : II, to appear.

[13] H. Zassenhaus, On the torsion units of finite group rings, in "Studies in Mathematics" 119–126 (in honor

of A. Almeida Costa), Institute de Alta Cultura, Lisbon 1974.