数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 105-123

有限カテゴリー

北大理学部　丹原大介
(Daisuke Tambara)

圏 C が finite category であるとは，C の objects と morphisms が finite set をなすことをいう．このような C の線型表現について述べる．

§1 Simple modules, injective modules, etc.

A. Simple modules

C は finite category，$E = C^\wedge$ は C から Sets（集合の圏）への反変関手全体のなす圏，$A \in E$ は E の ring object，A-mod は (left) A-module 全体のなす圏とする．A-mod はアーベル圏であり，その simple object を記述したい．

Def　圏 C が Karoubien とは，次が成立つことをいう．

$$x \in C,\ e^2 = e \in \mathrm{End}\, x$$

$$\Rightarrow \exists\, p : x \to y,\ \exists\, i : y \to x \quad \text{s.t.}$$

$$e = ip,\ 1_y = pi.$$

一般に圏 C に対し，圏の射 $C \to \mathrm{Kar}\, C$ で，$\mathrm{Kar}\, C$ は Karoubien，$(\mathrm{Kar}\, C)^\wedge \to C^\wedge$ は equivalence となるものが存在する．このような $\mathrm{Kar}\, C$ を C の Karoubi enveloppe という．一つの構成法は次のとおり．

・$\mathrm{Kar}\, C$ の object　　pair (x, e)　$x \in C$，$e^2 = e \in \mathrm{End}\, x$.

$\mathrm{Hom}((x, e), (y, f)) = \{ g \in \mathrm{Hom}(x, y) \mid f g e = g \}$

composition　　C のそれの制限．

さて始めの setting に戻ると，ring object，A-modules は $E = C^\wedge$ の図式によって定義されるものだから，C を $C^\wedge \simeq C'^\wedge$ (equivalence) であるような C' でとりかえてもよい．上の構成による $\mathrm{Kar}\, C$ は finite だから，C が Karoubien の場合に限ってよいことが分る．

<u>Remark</u>　次の事が知られている（［1］Exposé IV）

C，C'：小圏．

$C^\wedge \simeq C'^\wedge \Rightarrow \mathrm{Kar}\, C \simeq \mathrm{Kar}\, C'$.

$x \in C$ に対し，$\{x\}$ は object が x のみである C の full subcategory を表わす．$j : \{x\} \to C$ は inclusion とする．$j^* : C^\wedge \to \{x\}^\wedge$ は j によるひきもどしとすると，j^*A は $\{x\}^\wedge$ の ring object であり，次の図式ができる．

$$A(x)[\mathrm{End}\,x^{op}]\text{-mod} \cong j^*A\text{-mod} \begin{array}{c} \xrightarrow{j_!} \\ \xleftarrow{j^*} \\ \xrightarrow[j_*]{} \end{array} A\text{-mod}$$

$A(x)[\mathrm{End}\,x^{op}]$ は $\underbrace{\text{monoid algebra}}$ (twisted)

$j_!$ は j^* の, j^* は j_* の left adjoint.

j は fully faithful だから j_* も fully faithful, よって射

$j^*j_* \longrightarrow \mathrm{id}$ は iso. その inverse $\mathrm{id} \longrightarrow j^*j_*$ は adjoint

により射 $j_! \longrightarrow j_*$ を定める. これを λ_x とかく.

$A(x)[\mathrm{Aut}\,x^{op}]$ を twisted group algebra とし, $V \in A(x)[\mathrm{Aut}\,x^{op}]\text{-mod}$ と

する. $\mathrm{End}\,x$ の non-unit を V 上 0 で作用させることにより,

V を $A(x)[\mathrm{End}\,x^{op}]$-module と見る. そこで

$$S_x(V) = \mathrm{Im}\,(\lambda_x(V) : j_!(V) \longrightarrow j_*(V))$$

とおく. C の iso. classes の完全代表系 $\mathcal{C}$ をとる. 各 $x \in \mathcal{C}$

に対し, simple $A(x)[\mathrm{Aut}\,x^{op}]$-module の iso. classes の完全代表系

$\mathcal{S}_x$ をとる.

<u>Prop</u> 1 C は Karoubien とする. $\{S_x(V) \mid x \in \mathcal{C},\ V \in \mathcal{S}_x\}$

は simple A-module の iso. class の完全代表系である.

k は体とし, $A = k_C$ は constant ring (i.e. $C \ni x \longmapsto k$)

とする. $G_0(k_C)$ は f.g. k_C-module のなすアーベル圏の K_0 群

を表わす.

<u>Cor 2</u>　C は Karoubien とする．evaluation functor により，ring isomorphism

$$G_0(k_C) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in \mathcal{C}} G_0(k[\mathrm{Aut}\, x^{op}])$$

を得る．

Simple A-module $S_x(V)$ のもう少し具体的な表示を述べる．$A = k_C$（k は体）の場合に限ることにする．$x, y \in C$ に対し，$\mathrm{Hom}(x, y) = C(x, y)$ の subset $SE(x, y)$，$SM(x, y)$ を各々 section をもつ射全体，retract をもつ射全体として定義し，$T_x : C^{op} \longrightarrow k\text{-mod}$ 及び $T'_x : C \longrightarrow k\text{-mod}$ を

$$T_x(y) = k[SE(y, x)]$$

$$T'_x(y) = k[SM(x, y)]$$

によって定義する．$\mathrm{Aut}\, x$ が T_x には左から，T'_x には右から作用するので，$k[\mathrm{Aut}\, x^{op}]$-module V に対し，k_C-module $V \otimes_{k[\mathrm{Aut}\, x]} T_x$，$\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}\, x]^{op}}(T'_x, V)$ ができる．射 $\mu_x(V)$ を

$$\mu_x(V) : V \otimes_{k[\mathrm{Aut}\, x]} T_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}\, x]^{op}}(T'_x, V)$$

$$v \otimes f \longmapsto \left(g \longmapsto \begin{cases} v \cdot fg & (fg \in \mathrm{Aut}\, x) \\ 0 & (fg \notin \mathrm{Aut}\, x) \end{cases}\right)$$

$$f \in SE(y, x), \quad g \in SM(x, y)$$

によって定義する． すると simple $k[\mathrm{Aut}\, x]^{op}$-module V に対して $S_x(V) = \mathrm{Im}\, \lambda_x(V) \cong \mathrm{Im}\, \mu_x(V)$ が分る．

<u>Example</u> $n \geqslant 0$ に対し $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$ とおき，Δ_n は $[m]$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ 達を object とし，non-decreasing maps を morphism とする圏を表わす． X を Δ_n から Finite Sets への反変関手とし $C = \Delta_n / X$ とおく． この C については，$\mathrm{Aut}\, x = \{1\}$ $(\forall x \in C)$ で，$\mu_x(V)$ は mono である． 従って T_x 自身が simple k_C-module である．

<u>Problem</u> 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の $n \times n$ 行列が積に関し作る monoid を S とする． S の Karoubi enveloppe として次の C がとれる．

$\mathrm{ob}\, C = \{\mathbb{F}_q^m \mid 0 \leqslant m \leqslant n\}$， $\mathrm{mor}\, C = \{$linear maps$\}$．

$x \in C$， trivial $k[\mathrm{Aut}\, x]^{op}$-module k に対し，k_C-mod の射 $\mu_x(k)$ は $(\mathrm{char}\, k, q) = 1$ のとき mono か？ 言いかえると，$\ell \leqslant m$ に対し，$G(m, \ell) = \{\mathbb{F}_q^m$ の ℓ 次元 subspaces$\}$ とおくとき，pairing

$$k[G(m, \ell)] \times k[G(m, m-\ell)] \longrightarrow k$$

$$(U, V) \longmapsto \begin{cases} 1 & U \oplus V = \mathbb{F}_q^m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$U \in G(m, \ell), \quad V \in G(m, m-\ell)$$

は非退化か？ 同様の問題が元数 $\leqslant n$ の finite set のなす圏

についても考えられる。

B. Indecomposable injectives

$\mathcal{C}$ は finite Karoubien, $A \in \mathcal{C}^\wedge$ は ring で各 $x \in \mathcal{C}$ に対し $A(x)$ は commutative noetherian とする。アーベル圏 A-mod は locally noetherian なのでその injective object は indecomposable injective の直和に一意的に分解する。$x \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A(x)$ に対し $G_{x,\mathfrak{p}} = \{\sigma \in \operatorname{Aut} x \mid \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\}$ とおく。$G_{x,\mathfrak{p}}$ は剰余体 $k(\mathfrak{p})$ に作用し twisted group algebra $k(\mathfrak{p})[G_{x,\mathfrak{p}}{}^{op}]$ ができる。

<u>Prop</u> 3 Indecomposable injective A-module の iso. class の集合と triple $(x, \mathfrak{p}, V)$ ($x \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A(x)$, V : simple $k(\mathfrak{p})[G_{x,\mathfrak{p}}{}^{op}]$-module) の自然な意味での iso. class の集合との間に bijection がある。

C. Indecomposable projectives

特別な場合に indecomposable projective A-module の具体的な表示があることを示す。$A = k_{\mathcal{C}}$ (k は体) とする。各 $x \in \mathcal{C}$ に対し $P_x \in k_{\mathcal{C}}$-mod を次のように定義する。

$$P_x = \mathrm{Ker}\left(k[h_x] \longrightarrow \bigoplus_{\substack{f: x \to y \\ \text{split epi. not iso.}}} k[h_y]\right)$$

$h_x = C(-, x)$: Hom - functor

( ) の中の射の才 f 成分 $= k[h_f]$.

と，$\mathcal{S}_x$ は §1. A. のとおりとする．$V \in \mathcal{S}_x$ に対し $k[\mathrm{Aut}\,x^{op}]$ -module としての projective cover $\tilde{V}$ をとる．P_x には $\mathrm{Aut}\,x$ が作用するので，k_C - module $\tilde{V} \otimes_{k[\mathrm{Aut}\,x]} P_x$ ができる．

<u>Prop</u> 4　任意の $x \in C$，任意の $V \in \mathcal{S}_x$ に対し §1 A の射 $\mu_x(V)$ が mono であると仮定する．このとき $\tilde{V} \otimes_{k[\mathrm{Aut}\,x]} P_x$ は $S_x(V)$ の projective cover である．

<u>Example</u>　§1 A の Example の Δ_n / X に Prop 4 が適用できる．

§2. Homological dimensions, K_0 - groups, etc.

A. End = Aut の場合

有限圏 C が $\mathrm{End}\,x = \mathrm{Aut}\,x$ $(x \in C)$ をみたすとき，ob C 上の pre-order $\leq$ を $x \leq y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(x, y) \neq \emptyset$ によって定義できる．$(x \leq y$ and $y \leq x \Rightarrow x \cong y)$．C の combinatorial dimension (comb. dim C とかく) を次で定義する．

$$\sup\{n \mid \exists \text{列}\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n \ (x_i \in C)\}.$$

以下 k は固定された体を表わす．$C^\wedge$ の constant ring k_C の

finitistic dimension （$\mathrm{f.dim}\ k_C$ とかく）は次で定義される．

$$\sup\{\mathrm{pd}\, X \mid X : \text{f.g. } k_C\text{-module},\ \mathrm{pd}\, X < \infty\}.$$

<u>Prop</u> 5　　C が $\mathrm{End}\, x = \mathrm{Aut}\, x$ （$\forall x \in C$）をみたすとき

$$\mathrm{f.dim}\ k_C \leqslant \mathrm{comb.dim}\ C.$$

等号が成立つ例は多い．　正反対の場合は次の Prop. で与えられる．

<u>Prop</u> 6　　C は次をみたすとする

(i)　$\mathrm{End}\, x = \mathrm{Aut}\, x$ は p-group （$\forall x \in C$）（$p = \mathrm{char}\, k > 0$）

(ii)　$f : x \to y$ not iso. $\Rightarrow \exists g (\neq 1) \in \mathrm{Aut}\, x$ s.t. $fg = f$.

このとき　$\mathrm{f.dim}\ k_C = 0$ ．

<u>Example</u>　　$p = \mathrm{char}\, k > 0$， G : p-group とする．　transitive G-set のなす category を $C = \mathrm{Con}(G\text{-sets})$ で表わす．このCは Prop 6 の条件をみたす．

<u>Prop</u> 7　　$p = \mathrm{char}\, k \geqslant 0$，　C は次の条件をみたすとする．

(i)　$\mathrm{End}\, x = \mathrm{Aut}\, x$ （$\forall x \in C$）

(ii)　$\forall Q \leq \mathrm{Aut}\, x$ （p-subgroup）に対し quotient x/Q が存在．

すなわち　$C \ni y \longmapsto \mathrm{Hom}(x, y)^Q$ は x/Q で representable．

このとき　$\mathrm{pd}\, k < \infty$．（pd はアーベル圏 k_C-mod における

projective dimension を表わす)

B. Admissible epi-mono 分解をもつ場合

圏 C が admissible epi-mono 分解をもつとは, admissible epi 及び admissible mono と呼ばれる C の射の2つの class が与えられていて, 以下の条件をみたすことをいう.

(i) admissible epi は epi. admissible mono は mono.

(ii) {admissible epi} 及び {admissible mono} はともに {isom} を含み, 合成に関し閉じている.

(iii) C の任意の射 f は $f = gh$, g : admissible mono, h : admissible epi と分解する. この分解は次の意味で一意的. $f = g'h'$ が他のそのような分解ならば, $\exists u$: isom s.t. $g' = gu$, $h' = u^{-1}h$.

k は体, C は有限圏とする. f.g. projective k_C-module の category の K_0 群を $K_0(k_C)$ とかく.

$$c : K_0(k_C) \longrightarrow G_0(k_C)$$

$$c_x : K_0(k[\mathrm{Aut}\,x]^{op}) \longrightarrow G_0(k[\mathrm{Aut}\,x]^{op}) \quad (x \in C)$$

は Cartan map を表わす.

<u>Prop</u> 8 　C が admissible epi-mono 分解をみたすとき, c は単射で

$$|\mathrm{Cok}\, c.| = \prod_{x \in \mathcal{C}} |\mathrm{Cok}\, c_x| .$$

但し $\mathcal{C}$ は C の iso. class の完全代表系.

C が admissible epi-mono 分解をもつとき, C の部分圏 AM, AE を次のように定義する.

$$\mathrm{ob}\, AM = \mathrm{ob}\, AE = \mathrm{ob}\, C$$

$$\mathrm{mor}\, AM = \{\text{admissible mono}\}$$

$$\mathrm{mor}\, AE = \{\text{admissible epi}\} .$$

また $j : AE \to C$, $j' : AM \to C$ を inclusion とする.

<u>Lemma</u> 9 f.g. k_C - module F に対し

$$\mathrm{pd}\, j^* F \leqslant \mathrm{pd}\, F \leqslant \mathrm{pd}\, j^* F + \mathrm{comb.\,dim}\, AM$$

<u>Cor</u> 10 $\mathrm{f.dim}\, k_C \leqslant \mathrm{comb.\,dim}\, AE + \mathrm{comb.\,dim}\, AM$

proof Lem 9 と Prop 5 による.

<u>Cor</u> 11 C が admissible epi-mono 分解をもつとき

$\mathrm{gl.dim}\, k_C < \infty \Leftrightarrow |\mathrm{Aut}\, x|$ は char k と素 ($\forall x \in C$)

proof $\Leftarrow$: このとき $\mathrm{gl.dim}\, k_{AE} < \infty$ は容易に分るから Lem 9 により OK. $\Rightarrow$: Prop 8 により $\forall x \in C$ について $|\mathrm{Cok}\, c_x| = 1$. これは Aut x が char k と素なことを意味する.

<u>Problem</u>　admissible epi-mono 分解を仮定せずに Cor 11 の ⇒ は成立つか？

<u>Cor</u> 12　C が次の条件をみたすとする．（$p = \mathrm{char}\, k$）

(i) admissible epi-mono 分解をもつ．

(ii) $x \in C$，p-部分群 $Q \leq \mathrm{Aut}\, x$ に対し quotiet object x/Q が存在し canonical morphism $x \longrightarrow x/Q$ は admissible epi．

このとき $\mathrm{pd}\, k < \infty$

proof　Lem 9 と Prop 7 による．

C．Topos の有限部分圏の場合

この報告の主な結果はこれから述べる Cor. 14 である．以下体 k は固定する．E を topos，C を E の finite full subcategory とする（§1 のはじめの E とは別）．C が E の中で quotient に関し実質的に閉じているとは，次が成立つことをいう．

$$x \longrightarrow y \text{ は E の epi},\ x \in C$$
$$\Rightarrow \exists\, y' \in C \quad y \cong y'.$$

<u>Prop</u> 13　C は E の中で quotient に関し実質的に閉じているとする．

(i) $x \in E$．$\forall y \in C$ に対し $\mathrm{Hom}(y, x)$ は有限とする．

$h_x = \mathrm{Hom}(-, x) \in E^\wedge$ の C への制限を $h_x|C$ とかくとき，

アーベル圏 k_C-mod において

$$\mathrm{pd}\ k[h_x|C] < \infty .$$

(ii) F, G が f.g. k_C-module で $\mathrm{pd}\,F$, $\mathrm{pd}\,G < \infty$ ならば

$$\mathrm{pd}\ (F \otimes_k G) < \infty .$$

proof　C の射 f が admissible epi (resp. admissible mono) とは E の射として epi (resp. mono) であることと定義すれば，明らかに C は §2 B の意味で admissible epi-mono 分解をもつ．また Cor 12 の条件 (ii) もみたす．よって Cor 12 により

$\mathrm{pd}_{k_C}\,k < \infty$　(*)．さて (i) の条件をみたす $x \in E$ に対し $F = h_x|C \in C^\wedge$ とおくと，C/F は有限圏で E/x の full subcategory であり E/x の中で quotient に関し実質的に閉じている．C/F に上の (*) を適用して $\mathrm{pd}_{k_{C/F}}\,k < \infty$．

$j_! : k_{C/F}\text{-mod} \longrightarrow k_C\text{-mod}$ は exact で projective を保ち，$j_!(k) = k[F]$ であるから $\mathrm{pd}_{k_C}\,k[F] < \infty$．次に (ii) を示そう．$P_\bullet \to F$, $Q_\bullet \to G$ を k_C-mod における finite projective resolution とする．$P_\bullet \otimes_k Q_\bullet \longrightarrow F \otimes_k G$ も finite resolution．各 $P_p \otimes Q_q$ が $\mathrm{pd} < \infty$ であることを言えばよい．P_p, Q_q は $k[h_x]$ $(x \in C)$ 達の直和の直和因子であるから x, $y \in C$ に対し $\mathrm{pd}\,(k[h_x] \otimes k[h_y]) < \infty$ を示せばよい．$z = x \times y$ を E における product とすると，z は (i) の条件をみたし，$k[h_x] \otimes k[h_y] \cong k[h_x \times h_y] = k[h_z|C]$．故に

(i) により，左辺の pd < ∞ .

<u>Cor</u> 14　C，E は上のとおりとする．このとき自然な射

$$c : K_0(k_C) \longrightarrow G_0(k_C)$$

は単射で image は $G_0(k_C)$ の subring．（これにより $K_0(k_C)$ に c が ring homo となるような ring structure が定まる）

proof.　c の単射性は Prop 8 による．F，G が f.g. projective k_C-module なら Prop 13 (ii) により $\mathrm{pd}\, F\otimes G < \infty$．よって $[F]\cdot[G] = [F\otimes G] \in \mathrm{Im}\, c$．また $\mathrm{pd}\, k < \infty$ であるから $[k] \in \mathrm{Im}\, c$．故に Im c は $G_0(k_C)$ の（単位元を共有する）部分環．

上の結果は次に述べる吉田氏の結果のアーベル圏における類似として得られた．また epi-mono 分解，p-部分群による quotient の存在という条件に着目したのも吉田氏である．さて，E は topos，C は E の finite full subcategory で quotient に関し実質的に閉じているとしよう．$\mathcal{C}$ を ob C の iso. class の完全代表系とする．$\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は $\mathcal{C}$ 上の自由アーベル群，$\mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ 上の $\mathbb{Z}$-valued 関数のなす環を表わす．アーベル群の射 φ を次のように定義する．

$$\varphi : \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$$
$$x \longmapsto (y \longmapsto \# \mathrm{Hom}(y, x))$$
$$x, y \in \mathcal{C}$$

このとき次のことが成立つ（吉田）.

(i) φ は単射で $|\mathrm{Cok}\,\varphi| = \prod_{x \in \mathcal{C}} |\mathrm{Aut}\, x|$.

(ii) $\mathrm{Im}\,\varphi$ は $\mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$ の subring .

これにより $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は ring structure をもつ. この構成は Burnside 環の埋込み定理を逆手にとったもので, $E = G$-sets, $C = \mathrm{Con}(E) = \{$transitive G-sets$\}$ のときの $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ が G の Burnside 環 $\Omega(G)$ である. より一般的な例として次のものがある. I を有限圏, $E = I^{\wedge}$ とする. $X \in E$ が $X(i)$: finite ($\forall i \in I$) をみたすとき, X を finite とよぶ. $X \in E$ が finite, non empty で, $X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow X = X_1$ or $X = X_2$ が成立つとき, X を irreducible とよぶ. C が E の finite full subcategory で, $X \in E$ irreducible $\Leftrightarrow$ $X \cong {}^{\exists}X' \in C$ が成立つとする. 明らかに C は E の中で quotient に関し実質的に閉じている. この場合の環 $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は, topos $I^{\wedge}$ の finite object 達から Grothendieck construction によってえられる環とも同一視され, I の一種の Burnside 環であると言える ([3]).

$K_0(k_C)$, $G_0(k_C)$ の functorial property を述べる.

<u>Prop</u> 15　$f : E_1 \longrightarrow E_2$ を topos の射，$C_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$ を finite full subcategory で quotient に関し実質的に閉じているとし，$f^*(C_2) \subset C_1$ と仮定する．　$g : C_2 \longrightarrow C_1$ を f^* の制限とする．

(i)　F : f.g. k_{C_1}-mod，$\mathrm{pd}_{k_{C_1}} F < \infty \Rightarrow \mathrm{pd}_{k_{C_2}} g^* F < \infty$

(ii)　$g_* : k_{C_2}\text{-mod} \longrightarrow k_{C_1}\text{-mod}$ は finite coh. dim.

(i) により

$$\begin{tikzcd} K_0(k_{C_1}) \arrow[r, dashed, "\exists 1\, g^*"'] \arrow[d, "c"] & K_0(k_{C_2}) \arrow[d, "c"] \\ G_0(k_{C_1}) \arrow[r, "g^*"] & G_0(k_{C_2}) \end{tikzcd}$$

を可換にする点矢 g^* が唯一つ定まる．　(ii) からは準同型 g_*

$$G_0(k_{C_2}) \longrightarrow G_0(k_{C_1})$$
$$[F] \longmapsto \sum_i (-1)^i [R^i g_* F]$$

が定まる．

さて　$\mathcal{E}xt^p_{k_C}(\ ,\ ) : k_C\text{-mod}^{op} \times k_C\text{-mod} \longrightarrow k_C\text{-mod}$ を local Ext functor とする．([1] Exposé V)

$$\mathcal{E}xt^p_{k_C}(F, G)(x) = \mathrm{Ext}^p_{k_{C/x}}(j_x^* F, j_x^* G)$$

$x \in C$

$j_x : C/x \longrightarrow C$　canonical morphism.

$C \subset E$ は Cor 14 と同様とするとき，pairing

$$\langle\ ,\ \rangle_C : K_0(k_C) \times G_0(k_C) \longrightarrow G_0(k_C)$$
$$([F], [G]) \mapsto \sum_p (-1)^p [\mathcal{E}xt^p_{k_C}(F, G)]$$

は well defined になる．

$f: E_1 \longrightarrow E_2$， $C_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$ を Prop 15 のとおりとするとき，以上の記号のもとで次の等式が成立つ．

$$g_* \langle g^*(a), b \rangle_{C_2} = \langle a, g_*(b) \rangle_{C_1}$$
$$a \in K_0(k_{C_1}), \quad b \in G_0(k_{C_2}) .$$

<u>Example</u>　G は有限群，k の標数は $p > 0$ とする． $E =$ G-sets， $C \subset E$ は full subcategory で $\mathrm{ob}\, C = \{G/H \mid H \leq G\}$ とする． この場合の環 $K_0(k_C)$ を計算する． VPer(G) は permutation $k[G]$-module の直和因子全体のなす $k[G]$-mod の full subcategory を表わす． VPer(G) は $\oplus$, $\underset{k}{\otimes}$ に関し $k[G]$-mod の中で閉じているから，その Gro. ring $K_0(\mathrm{VPer}(G))$ ができる． $\mathcal{R}$ を G の p-perfect subgroups の G-共役類の完全代表系とすると，次の ring isom がある

$$K_0(k_C) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{R}} K_0(\mathrm{VPer}(N_G(H)/H))$$

D. cohomologically trivial modules

G を有限群とする． G-module F が cohomologically

trivialであるとは，任意の部分群Kについて，$H^i(K, F) = 0$ $(i > 0)$が成立つことをいう． このようなFは昔Rim，中山によって研究された[2] topos $E = G$-sets のcohomologyの記号では，$H^i(K, F) = H^i(G/K, F)$ と書ける． 一般のtopos Eとそのアーベル群 $F \in E_{ab}$ について，Fがcohomologically trivial（flasque）であるとは

$$H^i(X, F) = 0 \quad \forall X \in E, \quad \forall i > 0$$

が成立つこととして定義される（[1] Exposé V）．例えば，$A \in E$ がringでFがinjective A-moduleならFはcoh. trivial．

<u>Problem</u> kは体，Cは有限圏，$E = C^\wedge$ とする． k_C-module Fでcoh. trivialなものを特徴付けよ．

<u>Prop</u> 16 有限圏Cが $\mathrm{End}\, x = \mathrm{Aut}\, x$ $(x \in C)$ をみたすとすると，coh. trivialなk_C-moduleはinjective k_C-moduleである．

この結論が成立つことは，freeなk_C-module $k[X]$達のk_C-mod全体において占める割合が大きいことを意味する．

<u>Prop</u> 17 Cは有限圏とする． k_C-module Fがcoh. trivialならば $\mathrm{inj.dim}_{k_C} F < \infty$ である．

E. additive category における類似.

Cor 12 の additive category における類似として次の結果がある.

<u>Prop</u> 18　R は離散付値環, Λ は R-algebra とする. C は Λ-mod の full subcategory で次の条件をみたすとする

(i) ob C は finite set

(ii) C は Λ-mod の中で image に関し実質的に閉じている.

i.e. $f : X \to Y$ が C の射なら C は $\mathrm{Im} f$ と同型な Λ-module を含む.

(iii) $X, Y \in C$ に対し $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ は torsion cyclic R-module.

このとき C^{op} から Ab (Abel 群の圏) への additive functor 全体のなすアーベル圏の gl. dim $< \infty$.

<u>Example</u>　R は離散付値環, π は素元, K は R の商体とする. Λ は $M_n(K)$ の中の tiled R-order (i.e. Λ は行列単位 e_{ii} ($i = 1, \cdots, n$) を含む) とする. $P_i = \Lambda e_{ii}$ とおく. full subcategory $C \subset \Lambda$-mod を

$$\mathrm{ob}\ C = \{ \mathrm{Im} f \mid f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i/\pi P_i, P_j/\pi P_j), {}^\exists i, {}^\exists j \}$$

によって定義する. C は Prop 18 の条件をみたす.

REFERENCES

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, Springer L.N. 269, 270.

[2] K. Brown, "Cohomology of Groups", Springer, 1982.

[3] T. Yoshida, The Möbius algebra as a Burnside ring, Hokkaido Math. J. 13 (1984)