

整数表現のゼータ関数について

東京理大理工 高橋秀一 (Shuichi Takahashi)

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

は色々な方向に拡張されている。第 1 節では, Solomon により定義された有限群の整数表現に対するゼータ関数を紹介する。有限群の整数表現は色々な意味で有限次代数体の整数論の拡張と考えられている。特に一つの整数表現はイデアルに対応すると考えるのが自然で, Solomon のゼータ関数は, その様に定義されている。有限次代数体の場合, ゼータ関数は古くは Dirichlet により類数の計算に用いられ, ゼータ関数の変形である L -関数は, ある性質をもつ素イデアルが, 無限に存在するという証明に使われた。これが後に類体論の最初の証明に援用されたのである。1930年代の多元環の研究は, 類体論の深い解釈が目的だったのでらうが, Hey-Zorn による多元環のゼータ関数は, 予想外の応用と

して, Hasse の加法定理が証明され, これが関数体の場合の類体論の構成を可能にしたのであった。

Solomon のセータ関数は, Dirichlet 式の類数計算を目的に導入された様で, 2~3 簡単な群については実行出来る事が示されている。本格的に行うには, 岩沢-Tate によるアデール環を使い, その上のフーリエ解析をするのが, 代数体及び多元環の場合の常とう手段となっている。これを近時 Bushnell-Reiner が精力的に実行している。これらについては, 次の竹ヶ原氏の講演を参照されたい。

第2節は Delante が ワーリング問題に使った概周期関数の方法を紹介する。Weil が既に注意している様に, Delante の方法は, 代数体上の σ の附値の関係を表わしており, アデール環を使う理論をまろと庶民的に実行出来るのでは無いかと思う。実際, Solomon のセータ関数に活用出来たわけでは無いのだが, あまり知られて無い方法だと思ふので, ここに挿入させていたのだ。

補記には, 文献の紹介をかねて思いついた事を色々書かしていただいた。この方面を研究されようとする方には多小とも参考にすれば幸である。最後に, この方面の研究をされている信州大の石中氏, 北大の竹ヶ原氏には色々教えていただいた。ここに心から感謝する次第です。

§1. Solomon のゼータ関数.

G を有限群, $\mathbb{Q}G$, $\mathbb{Z}G$ を G の有理数体 \mathbb{Q} 及び整数環 \mathbb{Z} 上の群環とし, G の有理表現, 整数表現は $\mathbb{Q}G$ -module V 及び $\mathbb{Z}G$ -module L のことと考える. 勿論有限階の module のみを考える. 更にこの両者の間には

$$L \subset V \quad \text{且} \quad L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$$

なる関係があるとする. 数体との類似では, V が数体で, L はその整数環と考えるのである. Solomon のゼータ関数は

$$\zeta_L(s) = \sum_{\substack{A \text{ } \mathbb{Z}G\text{-module} \\ A \subset L \text{ 且} A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V}} \frac{1}{[L:A]^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s \text{ 充分大}$$

と定義される. 実際上記の類似で, この標本 A は整イデアルに対応するし, $[L:A] = A$ の L 内での指数は $1/\mu_A$ に対応するものである.

\mathbb{Z} の指数有限な部分加群 A は, A に含まれる最小の $n > 0$ で

$$A = \mathbb{Z}n$$

と表わされるから, $\mathbb{Z} \in G = \{1\}$ -module と考えれば

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は Riemann のゼータ関数となる。一般に $L \simeq \mathbb{Z}^m$ の場合、一つの \mathbb{Z} -basis x_1, \dots, x_m を固定するとき、 L の指数有限な submodule A は次の様に表示されることが知られてゐる (Hermite の normal form):

$$A = \mathbb{Z}y_1 + \dots + \mathbb{Z}y_m$$

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$a_{ii} > 0$$

$$0 \leq a_{ji} < a_{ii} \quad (j > i)$$

$$a_{11} a_{22} \dots a_{mm} = n = [L : A].$$

例へば、 $m=2$ とすると、 $G = \mathbb{Z}$ -module \mathbb{Z}^2 のゼータ関数は

$$\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

$$a_n = \#\{A \mid A \subseteq \mathbb{Z}^2, [\mathbb{Z}^2 : A] = n\},$$

所が上記より

$$a_n = \#\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \mid a > 0, b > 0, ab = n, 0 \leq c < a \right\}$$

$$= \sum_{\substack{d > 0 \\ d|n}} d = \sigma(n) = \prod_{i=1}^r (1 + p_i + \dots + p_i^{e_i})$$

$$\Rightarrow n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$$

よって

$$\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1+p}{p^s} + \frac{1+p+p^2}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots \right) \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^{2s}} + \dots \right)$$

$$= \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{2s}}} \right) = \zeta(s) \zeta(2s)$$

と存る。

$G = \{1, \sigma\}$ を 2 次の群とする。その群環 $\mathbb{Z}G$ は加群として \mathbb{Z}^2 と同形だから、その部分加群 $A \subseteq \mathbb{Z}G$ は、上記の標本基底で表示され、 $\mathbb{Z}G$ -部分加群は $\sigma A \subseteq A$ で特徴づけられる。 $L = \mathbb{Z}G$ はその基底を $1, \sigma$ とすると $\sigma(1, \sigma) = (\sigma, 1)$ と変換される。即ち、 $L = \mathbb{Z}^2$ の対角線での折り返し σ の作用と存る。指数 n の部分加群 A で $\sigma A \subseteq A$ なる n 数 a_n を計算することにより

$$\zeta_L(s) = (1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}) \zeta(s)^2$$

が得られる。一方 $M = \mathbb{Z}^2$ に基底を $1, \sigma$ とし、その作用を $\sigma(1, \sigma) = (1, -\sigma)$ で定義する。即ち、 \mathbb{Z}^2 の x 軸での折り返し σ の作用と存ると、 M は $\mathbb{Z}G$ -加群と存り、指数 n の部分加群 A で $\sigma A \subseteq A$ なる n 数 a_n を計算することにより

$$\zeta_M(s) = (1 + 2^s) \zeta(s)^2$$

が得られる。実際、 $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}G$ は有理表現としては同値だが、 L と M は $\mathbb{Z}G$ -加群として同値ではない。これをゼータ関数は区別してくれるのである。

Solomon は一般に素数次の巡回群 C_p に対して,
 $L = \mathbb{Z}C_p$ としたとき

$$\zeta_L(s) = (1 - p^{-s} + p^{1-2s}) \zeta(s) \zeta_{\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})}(s)$$

と示すことも示している, $\zeta_{\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})}(s)$ は円体 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$
 の Dedekind のゼータ関数である。

その他の具体例として, Reiner が $L = \mathbb{Z}C_{p^2}$ を,
 佐野さんが, ある種の metacyclic 群 G の $L = \mathbb{Z}G$ のゼータ
 関数を計算している。

Solomon はこれらの例から, 整数表現のゼータ関数
 $\zeta_L(s)$ は有理表現 $V = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のゼータ関数 $\zeta_V(s)$
 から

$$\zeta_L(s) = \prod_{p \mid |G|} \delta(p^{-s}) \zeta_V(s)$$

と得られることを証明した。ここで $\delta(p^{-s})$ は p^{-s} の有理式
 で, 有理表現 V のゼータ関数 $\zeta_V(s)$ は次の様に定義され
 る:

$\mathbb{Q}G$ は semi-simple algebra だから Wedderburn 分解
 される:

$$\mathbb{Q}G \simeq A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$$

ここで各 A_i ($1 \leq i \leq r$) は simple algebra である。

F_i はその center, D_i は division algebra

$$A_k \simeq (D_k)_{M_k} \quad (M_k \text{ 次 of 全行列環})$$

$$[D_k : F_k] = \lambda_k, \quad n_k = \lambda_k M_k$$

と置く. 各 A_k の simple A_k -module W_k を取り
これに $\text{proj}_k: \mathbb{Q}G \rightarrow A_k$ を $\mathbb{Q}G$ -module と考えれば,
任意の $\mathbb{Q}G$ -module V は

$$V \simeq V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

$$V_k \simeq m_k W_k, \quad 1 \leq k \leq r, \quad m_k \geq 0$$

と表示される. $\zeta = \tau$

$$\zeta_V(s) = \prod_{k=1}^r \prod_{j=0}^{m_k \lambda_k - 1} \zeta_{F_k}(n_k s - j),$$

ここで $\zeta_{F_k}(s)$ は代数体 F_k の Dedekind の ζ -関数である.

例として $G = \{1\}$ とすると $\mathbb{Q}G \simeq \mathbb{Q}$ だから $r=1$,
 $M_1 = \lambda_1 = n_1 = 1$, $W_1 = \mathbb{Q}$. $\zeta = \tau$

$$V = \mathbb{Q}^2 = V_1 \simeq 2 \cdot \mathbb{Q}$$

とすると

$$\zeta_{\mathbb{Q}^2}(s) = \zeta(s) \zeta(s-1).$$

この場合は $\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \zeta_{\mathbb{Q}^2}(s)$ と当然ながらなっている.

Solomon は更に $p \mid |G|$ に対する因子 $\delta_p(p^{-s})$ が p^{-s}
の多項式となることを予想した (Solomon's Conjecture) が
これは Bushnell-Rerner により肯定的に解決された.

§2. DelSarto の方法.

一般の Dirichlet 級数

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

に對して, もし

$$(M) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{N} = c$$

が存在するならば, $Z(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ で収束し

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)Z(s) = c$$

となる. これより円体の類数が有限の形で計算されるわけ

である. 今 \mathbb{Z} 上の関数 $f \in$

$$f(n) = \begin{cases} a_n & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ a_{-n} & n < 0 \end{cases}$$

と定義すると (M) の假定のもとで

$$M(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N f(n+k)}{N} = c$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ で成立する. 即ち, f は discrete 加法群 \mathbb{Z} 上で平均値を持つ. 一般に群 G 上の核週期関数は平均値を持つが, 上記の持は (M) を満たす“整数的”点列 $\{a_n\}$ は \mathbb{Z} 上の核週期関数に属するのでないかと考えるのが

Delsarte のアイデアである。これは大前提存のものが、これをみとめるとすべてがうまくゆくのである。

Von Neumann 及び Weil によれば、群 \mathbb{Z} 上の概周期関数は \mathbb{Z} をある compact 群 G に dense に埋めこみ、 \mathbb{Z} 上の関数 f で、 G 上の連続関数 \tilde{f} にのびるものとして定義され、 f の平均値は G 上の \tilde{f} の正規化された G 上の Haar 測度による積分値として与えられる。
 \mathbb{Z} を discrete な加群と見ると、その universal な compact 化は \mathbb{Z} の dual group \mathbb{T} を discrete と考えて、その dual \mathbb{T}_d^\wedge で与えられる (Bohr compactification)。我々の場合 \mathbb{Z} を可換環と見ての universal compactification:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p & \\ \nearrow \iota & \exists! \tilde{f} & \\ \mathbb{Z} & \searrow \downarrow & \\ \downarrow \forall \varphi & & \mathbb{R} \text{ (任意の compact な可換環)} \end{array}$$

が適してゐるのである、 \mathbb{Z}_p は (compact な) p 進環である。即ち、 \mathbb{Z} 上の関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ が概周期的:

$$f \in AP(\mathbb{Z}) \iff \exists \tilde{f} \in C(\tilde{\mathbb{Z}}), \tilde{f}|_{\mathbb{Z}} = f$$

と定義されるのである。すると

基本原理 : $f \in AP(\mathbb{Z})$ なる

$$M(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) = \underbrace{\int_{\tilde{\mathbb{Z}}} \tilde{f}(\tilde{z}) d\tilde{\mu}}_{\text{アルキメデス部}} = \prod_p \underbrace{\int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{f}_p(\tilde{z}_p) d\tilde{\mu}_p}_{\text{非アルキメデス部}}$$

即ち一つの量がアルキメデス附値により表わされ(左辺)と同時に無限々の非アルキメデス附値での積分として表わされる。

これがアデール環に代って使えらるであらうと思われる点である。

$AP(\mathbb{Z})$ 上で、フーリエ解析を実行しよう。 $AP(\mathbb{Z})$ 上で次の内積を考える:

$$\langle f, g \rangle = M(f\bar{g}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n)\overline{g(n)}, \quad f, g \in AP(\mathbb{Z}).$$

($AP(\mathbb{Z})$ は空備ではないが、これを空備化すると $BAP(\mathbb{Z})$: Besicovitch の意味の核空間関数が得られる。)

$AP(\mathbb{Z})$ の元の例として、compact 群 $\tilde{\mathbb{Z}}$ の character 群 $\tilde{\mathbb{Z}}^\wedge$ を考えよう:

$$\tilde{\mathbb{Z}}^\wedge = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Z}/(n)\mathbb{Z} \simeq \prod_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathcal{W} \left(\begin{array}{l} \text{1の巾根の} \\ \text{全体} \end{array} \right)$$

この同形対応は

$$\mathcal{W} \ni p \longmapsto \chi_p(n) = p^n \in \tilde{\mathbb{Z}}^\wedge$$

で与えられる。 $\chi, \psi \in \tilde{\mathbb{Z}}^\wedge$ に対し、次の直交関係:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 1 & \chi = \psi \\ 0 & \chi \neq \psi \end{cases}$$

が次の様に証明される:

$$\chi = \psi \text{ ならば } \chi(n) \overline{\chi(n)} = 1 \quad \text{よって}$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n) \overline{\chi(n)} = 1$$

$$\chi = \chi_\rho, \quad \psi = \chi_\sigma, \quad \rho, \sigma \in \mathcal{W}, \quad \rho \neq \sigma \quad \text{とす。}$$

$$m > 0 \text{ と } \rho^m = \sigma^m = 1 \quad \text{と取す。}$$

$$\chi_\rho(n) \overline{\chi_\sigma(n)} = (\rho\sigma^{-1})^n \quad \rho\sigma^{-1} \neq 1$$

よって

$$\sum_{n=0}^{m-1} (\rho\sigma^{-1})^n = \frac{1 - (\rho\sigma^{-1})^m}{1 - \rho\sigma^{-1}} = 0$$

$$\text{よって } \left| \sum_{n=1}^N \chi_\rho(n) \overline{\chi_\sigma(n)} \right| \leq m \quad (\text{有界}) \text{ が出る。}$$

従って

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_\rho(n) \overline{\chi_\sigma(n)} = 0 \quad \text{証明了。}$$

任意の $f \in AP(\mathbb{Z})$ は次の様に Fourier 級数で表示される:

$$f(n) \sim \sum_{\chi \in \tilde{\mathbb{Z}}^\wedge} \langle f, \chi \rangle \chi(n)$$

よって

$$\langle f, \chi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)}$$

この Fourier 級数を Dirichlet の Waring の問題に於いて計算しているのて、これを紹介する。

m -変数, 長巾の Waring の問題:

$$x_1^k + \dots + x_m^k = n$$

に關する Dirichlet 関数は

$$S_{\text{Waring}}(s) = \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{(x_1^k + \dots + x_m^k)^{s + \frac{m}{k} - 1}}$$

を定義するのによつて,

$$I(n) = \# \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m \mid x_1^k + \dots + x_m^k = n \right\}$$

と置けば

$$S_{\text{Waring}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^{s + \frac{m}{k} - 1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

すると

$$f(n) = a_n = I(n) n^{1 - \frac{m}{k}} \in AP(\mathbb{Z})$$

が Delange の大前提である。この $\chi \in \mathcal{C}$ とめよう。

$\chi = \chi_p$, $p \in \mathcal{W}$ の order $\in g > 0$ とし

$$\langle f, \chi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)}$$

を計算する:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^m \\ 0 \leq x_1^k + \dots + x_m^k \leq N}} (x_1^k + \dots + x_m^k)^{1 - \frac{m}{k}} \overline{\chi(x_1^k + \dots + x_m^k)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^m} \overline{\chi(a_1^k + \dots + a_m^k)} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^m \\ 0 \leq x_1^k + \dots + x_m^k \leq N \\ x \equiv a \pmod{g}}} (x_1^k + \dots + x_m^k)^{1 - \frac{m}{k}}$$

証明

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^m \\ 0 \leq x_1^k + \dots + x_m^k \leq N \\ x \equiv a \pmod{g}}} (x_1^k + \dots + x_m^k)^{1 - \frac{m}{k}} \sim \frac{1}{g^m} \int_{0 \leq z_1^k + \dots + z_m^k \leq N} (z_1^k + \dots + z_m^k)^{1 - \frac{m}{k}} dz_1 \dots dz_m$$

$$= \frac{N}{g^m} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^m z_i^k \leq 1} (z_1^k + \dots + z_m^k)^{1 - \frac{m}{k}} dz_1 \dots dz_m$$

$$= \frac{N}{g^m} \frac{m}{k} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^m z_i^k \leq 1} dz_1 \dots dz_m = \frac{N}{g^m} \frac{m}{k} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})^m}{\Gamma(1 + \frac{m}{k})}$$

よって

$$\langle f, X \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{X(n)} = \frac{1}{g^m} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^m} \overline{X(a_1^k + \dots + a_m^k)} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})^m}{\Gamma(1 + \frac{m}{k})}$$

よって

$$S_X = \frac{1}{g^m} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^m} \overline{X(a_1^k + \dots + a_m^k)}$$

よって

$$f(n) \sim \sum_X \langle f, X \rangle X(n) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})^m}{\Gamma(1 + \frac{m}{k})} \sum_{X \in \mathbb{Z}^1} S_X \cdot X(n)$$

実際、 $G(n) = \sum_X S_X \cdot X(n)$ は Hardy-Littlewood の singular series である。

$$I(n) \sim n^{\frac{m}{k} - 1} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})^m}{\Gamma(1 + \frac{m}{k})} G(n) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が Hardy-Littlewood の公式である。更に $k=2$ の場合、 $5 \leq m \leq 8$ なる等式、 $m=9$ はどうである。

右辺を解釈しよう。まず

$$\begin{aligned} n^{\frac{m}{k}-1} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(\frac{m}{k})} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{n-\varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \xi_i^k \leq n+\varepsilon} d\xi_1 \cdots d\xi_m}{2\varepsilon} \\ &= \alpha_\infty(n) \end{aligned}$$

次に

$$\zeta(n) = \prod_p \alpha_p(n)$$

但し

$$\alpha_p(n) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{I_{p,l}(n)}{p^{l(m-1)}}$$

$$I_{p,l}(n) = \# \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^m \mid x_1^k + \dots + x_m^k \equiv n \pmod{p^l} \right\}$$

更に

$$\alpha_p(n) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^m} \int_{\mathbb{Z}_p^m} \chi(x_1^k + \dots + x_m^k - n) d\tilde{\mu}_p$$

Debsante の基本原理から導くことが出来る。この
の記号を使うと Hardy-Littlewood の公式は

$$I(n) \sim \alpha_\infty(n) \prod_p \alpha_p(n) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

という Siegel 形の公式になる。

以上の様に Debsante の方法は兎事に Hardy-Littlewood の
公式を与えるのだが、色々といふべきをしている。そこで、
彼は Möbius の反転公式を使った Fourier 解析の手法も考え

ているので、参考文献に紹介しておく。これもある仮定のもとでのみ正当化される。

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (\mathbb{N} 上の \mathbb{C} -値関数全体), $\chi(n) = \rho^n$, $\rho \in \mathbb{W}$
 $\in 1$ の原始 g 乗根とする。このとき

$$\langle f, \chi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)}$$

が存在するとする。例えば $f \in AP(\mathbb{Z})$ 。このとき適当な仮定のもとに、逆に

$$f(n) = \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}} \langle f, \chi \rangle \chi(n)$$

が成り立つ $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことを証明しようとするのである。

$f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ に対する Möbius の反転公式は

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \text{なす} \quad f(n) = \sum_{d|n} F(d)$$

であった。これを使うと

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)} &= \sum_{n=1}^N f(n) \rho^{-n} = \sum_{n=1}^N \sum_{d|n} F(d) \rho^{-n} \\ &= \sum_{d=1}^N F(d) (\rho^{-d} + \rho^{-2d} + \dots + \rho^{-[\frac{N}{d}]d}) \end{aligned}$$

こゝに

$$\rho^{-d} + \rho^{-2d} + \dots + \rho^{-[\frac{N}{d}]d} = \begin{cases} [\frac{N}{d}] & \text{もし } g|d \text{ (すなわち } \rho^d = 1) \\ \sum_{j=1}^k \rho^{-jd} & , 0 \leq k < g \text{ かつ } g \nmid d \end{cases}$$

従って

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \overline{\chi(n)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{d=1}^N F(d) \left[\frac{N}{d} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{g} \right]} F(g^r) \left[\frac{N}{g^r} \right] \end{aligned}$$

$F(n)$ がある条件を満たす

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{g} \right]} \frac{F(g^r)}{g^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F(g^r)}{g^r}$$

即ち

$$\langle f, \chi \rangle = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F(g^r)}{g^r}$$

が得られた。

ここで注意すべきことは、右辺は character χ の order

g のみの式となったことである。 (これより)

$$\sum_{\chi} \langle f, \chi \rangle \chi(n) = \sum_{g=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F(g^r)}{g^r} \sum_{\substack{\text{ord } \chi = g \\ \chi \in \mathbb{Z}^{\wedge}}} \chi(n)$$

よって、Ramanujan の和

$$D_g(n) = \sum_{\substack{\text{ord } \chi = g \\ \chi \in \mathbb{Z}^{\wedge}}} \chi(n) = \sum_{p \in \mathcal{W}} p^n$$

p : 原始 g 乗根

を使うと

$$\sum_{\chi} \langle f, \chi \rangle \chi(n) = \sum_{g=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F(g^r)}{g^r} D_g(n)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{F(\gamma\delta)}{\gamma\delta} D_{\delta}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m} \sum_{\delta|m} D_{\delta}(n)$$

∴ τ Ramanujan の和の関係

$$\sum_{\delta|m} D_{\delta}(n) = \begin{cases} m & \text{if } m|n \\ 0 & \text{if } m \nmid n \end{cases}$$

を使うと

$$\sum_{\chi} \langle f, \chi \rangle \chi(n) = \sum_{m|n} F(m) = f(n)$$

が得られるというの τ がある。

補記

Solomon の τ -関数は

[1] L. Solomon: Zeta Functions and Integral Representation Theory, Adv. in Math. 26(1977), 306-326

τ 導入された。 C_{p^2} の場合は

[2] I. Reiner: Zeta Functions of Integral Representations. Comm. in Algebra 8(1980), 911-925

Metacyclic の場合は

[3] Y. Hironaka: Zeta Functions of Integral Group Rings of Metacyclic Groups. Tsukuba J. of Math. 5(1981), 267-283.

にある。Solomon の予想は

[4] C. J. Bushnell - I. Reiner : Zeta Functions of Arithmetic Orders and Solomon's Conjectures. Math. Z. 173 (1980), 135-161

を肯定的に解決された。以下が彼等の論文である：

[5] 同上 : Zeta Functions of Hereditary Orders and Integral Group Ring. Visiting Scholars Lectures no. 14 (1981)

[6] 同上 : L-Functions of Arithmetic Orders and Asymptotic Distributions of Ideals. J. rein angew. Math. 327 (1981) 156-183

[7] 同上 : Functional Equations for L-Functions of Arithmetic Orders. J. rein angew. Math. 329 (1981), 88-124

[8] 同上 : Analytic Continuation of Partial Zeta-Functions of Arithmetic Orders. J. rein angew. Math. 349 (1984), 160-178.

Delsarte の方法は

[9] M. J. Delsarte : La Méthode Volumétrique. Delsarte 全集 2巻, 851-861.

これは未発表で、全集にのみのものである。その解説が

[10] A. Weil : L'Oeuvre Mathématique de Delsarte

Weil 全集 3巻, 448-449 のあたり, これは Delsarte 全集の序文である。

最後の部分で n いた Möbius の反転公式 を使った方法は

- [11] M. J. Delsarte : Essai sur l'Application de la Théorie des Fonctions Presques Périodiques à l'Arithmétique. Ann. Ec. Norm. Sup. t. LXII (1945), 185-205 = 全集 2 巻, 603-624.

にある.

$\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ が可換環 \mathbb{Z} として universal な compactification であることは, A. Robinson が nonstandard analysis を証明したのが始めてではないかと思う:

- [12] A. Robinson : Compactification of Groups and Rings and Nonstandard Analysis. J. Symbolic Logic 34 (1969), 576-588.

実際 Robinson は, \mathbb{Z} の適当な nonstandard model ${}^*\mathbb{Z}$ 上の付随の意味での無限小 $\mu \in {}^*\mathbb{Z}$ が定義されて

$$\tilde{\mathbb{Z}} = {}^*\mathbb{Z}/\mu$$

と存在することによって, この構成によって $\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ が universal であることが証明されている. 更に $\tilde{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ と存在することから アデール理論を nonstandard で展開している. これらに因っては

- [13] A. Robinson : Nonstandard Arithmetic, Bull. A.M.S. 73 (1967), 818-843.

- [14] 同上 : Nonstandard Theory of Dedekind Rings.

Indag. Math. 29(1967), 444-452

等を参照されたい。

概周期関数の理論も nonstandard analysis で扱われている:

- [15] L. D. Kyjzer: Nonstandard Analysis of Almost Periodic Functions. Proc. Int. Symp. on Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Luxemburg Ed. 1969, 150-166
- [16] A. E. Hurd: Near Periods and Bohr Compactifications. Victoria Symp. on Nonstandard Analysis. Springer Lecture Note #369 (1974), 106-112.

これらを結合して, Delorme の理論を nonstandard analysis で扱うことも可能であろう。最後に nonstandard analysis を使ってみようと思われる方の為には, 最近の応用に関する文献を => あげて終りとす。

- [17] Nonstandard Analysis - Recent Developments. A. E. Hurd. Ed. Springer Lecture Note #983 (1983)
- [18] H. J. Keisler: An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis. Mem. A.M.S. Vol 48, No. 297 (1984).