数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 144-158

整数表現に関連したゼータ関数について
（ Bushnell-Reiner の仕事の紹介 ）

北大理　　竹ヶ原　裕元
（ Yugen-Takegahara ）

Solomon のゼータ関数に関してのBushnell-Reinerによる数多くの仕事のうち，ここではSolomonの予想に関するものと，有限群Gが与えられたときの$\mathbb{Z}G$のゼータ関数の計算についての仕事を紹介します。まず，Solomonのゼータ関数の諸性質を見てゆきます。

Λ: a $\mathbb{Z}$-order in a f.d. semisimpl $\mathbb{Q}$-algebra A

L: a full Λ-lattice in a f.g. left A-module V

定義（ Solomon のゼータ関数 ） sを複素変数，

$$\zeta_L(s) := \sum_N (L:N)^{-s}$$ ，NはLに含まれるfull Λ-lattice全体を動く．

この関数は$\mathrm{Re}(s) > \dim_{\mathbb{Q}} V$で確かに収束し，意味を持ちます。特に$V=A=\mathbb{Q}$，$L=\Lambda=\mathbb{Z}$とすると，Liemannのゼータ関数，$F$を$\mathbb{Q}$の有限次拡大体，$R$をその整数環として，$V=A=F$，$L=\Lambda=R$とするとき，

Dedekindのゼータ関数にそれぞれ一致します。また，
$A=\mathbb{Q}$，$\Lambda=\mathbb{Z}$，$V=\mathbb{Q}^n$，$L=\mathbb{Z}^n$，とすると，

$$\zeta_L(s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s-1)\cdots\zeta_{\mathbb{Z}}(s-n+1)$$

$\zeta_{\mathbb{Z}}(s)$ は Riemann のゼータ関数

となっています。

Local case でもゼータ関数が定義されますが，特に，simple $\mathbb{Q}_p$-algebra の maximal $\mathbb{Z}_p$-order で定義されるゼータ関数について "Hey's formula" が知られています。

"Hey's formula"

$B:=M_n(D)$，D は f.d. division $\mathbb{Q}_p$-algebra

Γ : maximal $\mathbb{Z}_p$-order in B

W : k-copies of simple left B-module

M : a full Γ-lattice in W

$e:=\sqrt{\dim_F D}$，F は D の中心，その整数環を R

$\Rightarrow$ $\zeta_M(s)=\prod_{i=0}^{k-1}\zeta_R(nes-ei)$，$\zeta_R(s)$ は Dedekind のゼータ関数

一般の場合も，maximal order 上の lattice のゼータ関数は扱い易く（maximal order は algebra の Wedderburn 分解に関して，simple algebla の

maximal order の直和として表わされる。latticeもそれに従い直和として表わされ，ゼータ関数はその直和因子のゼータ関数の積になっている。)、次に述べる "Euler product" とともに，ゼータ関数の性質を調べる上で重用な働きをします。

p の添字で p-進完備化，(p) の添字で局所化をあらわすと，Λ_p は $\mathbb{Q}_p$-algebra A_p の $\mathbb{Z}_p$-order，L_p は left A_p-module V_p の full Λ_p-lattice となり $\zeta_{L_p}(s)$ が定義され，同様に，$\zeta_{L_{(p)}}(s)$ も定義されます。このとき

$$\zeta_{V_p}(s) = \zeta_{V_{(p)}}(s)$$

が示されて，さらに

"Euler product" $\quad \zeta_V(s) = \prod_p \zeta_{V_p}(s)$ が成り立ちます。

Riemann のゼータ関数，あるいは，Dedekind のゼータ関数の Euler product は知られていますが，これはその拡張となっています。

Γ を Λ を含む maximal order，$B := \{p : 素数 \mid \Gamma_p \neq \Lambda_p\}$ $(|B| < \infty)$ とおくと，"Euler product" より

$$\zeta_L(s) = \prod_{p \in B} \zeta_{L_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p \cdot L_p}(s) \cdot \zeta_{\Gamma L}(s)$$

が得られます。($\Gamma_p L_p$, $\Gamma \cdot L$ は Γ-lattice と考える。)

§1 Solomon の予想

A, Λ, V, L は先の定義に従うものとします。いま，

$A=\prod_{i=1}^{r}A_i$ ，A_i は Wedderburn component.

$A_i=M_{n_i}(D_i)$，D_i は division $\mathbb{Q}$-algebra

$V_i=A_iV$，k_i-coppies of simple left A-module

$e=\sqrt{\dim_{F_i}D_i}$，F_i は D_i の中心，その整数環を R_i．

として，次の関数を定義します。

$$\zeta_V(s):=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{k_ie_i-1}\zeta_{R_i}(n_ie_is-j)$$ ，s は複素変数

この関数は Dedekind のゼータ関数により定義されていますから，その Euler product により "p-part" が考えられ，それを $\zeta_{V,p}(s)$ と表わすと，

$$\zeta_V(s)=\prod_p\zeta_{V,p}(s)$$

と，"Euler product" が考えられます。さらに，

定理（ Solomon [1] ）

素数から成る有限集合 B があり，

$$\zeta_L(s)=\prod_{p\in B}\zeta_{L_p}(s)/\zeta_{V,p}(s)\cdot\zeta_V(s)$$ ，特に，

$\zeta_{L_p}(s)/\zeta_{V,p}(s)$ は $\mathbb{Q}$ 上 p^{-s} の有理関数である。

"Solomon の予想"

$$\zeta_{L_p}(s)/\zeta_{V,p}(s)\in\mathbb{Z}[p^{-s}]$$

この予想は，Λ が maximal order ならば，"Hey's formula" より，$\Lambda=\mathbb{Z}G$，G は素数位数の巡回群ならば計算により，それぞれ正しいことが知られていました。その後，Bushnell-Reiner[1] は，より"強い形"で，肯定的に，この予想を証明しました。

Λ: a $\mathbb{Z}_p$-order in a f. d. semisimple $\mathbb{Q}_p$-algebra A

L: a full Λ-lattice in a f.g. left A-module V.

定理（Bushnell-Reiner[1]）

Γ を Λ を含む maximal $\mathbb{Z}_p$-order とすると，

$\zeta_L(s)/\zeta_{\Gamma\cdot L}(s)\in\mathbb{Z}[p^{-s}]$

先に述べた事と，この定理より，ただちに，Solomon の予想が解かれます。以下 Bushnell-Reiner による，この定理の証明を，簡単に説明します。

[証明の概略]

$X=\{M_1,\cdots,M_n\}$ を V の中の full Λ-lattice の同型類の代表全体の集合とします。（$|X|<\infty$）$M\in X$ に対して，次の関数を定義します。s を複素変数として，

$Z_L(M;s):=\sum(L:N)^{-s}$，N は M と同型な L に含まれる full lattice を動く。

明らかに，$\zeta_L(s)=\prod_{i=1}^{r} Z_L(M_i;s)$ を得ます。記号，

$B:=\mathrm{End}_A V$ ，$B^\times:=\mathrm{Aut}_A V$

$\{M:L\}:=\{x\in B \mid Mx\subseteq L\}$ … $\mathbb{Z}_p$-lattice in B

$\mathrm{Aut}_A M:=\{x\in B \mid Mx=M\}$ … unit group of $\mathbb{Z}_p$-order in B

を用いて，$Z_L(M;s)$ を

$$Z_L(M;s)=\sum (L:Mx)^{s}$$ ，x は $\mathrm{Aut}_A M\backslash\{M:L\}\cap B^\times$ の代表全体を動く．

と変形し，さらに V の中の任意の full $\mathbb{Z}_p$-lattice X,Y に対して，新しい index $(X:Y)=(X:X\cap Y)/(Y:X\cap Y)$ を導入し，$x\in B^\times$ の norm を，$\|x\|=(Mx:M)$（M は任意の full $\mathbb{Z}_p$-lattice してよい。）と定義すると，

$$(L:Mx)=(L:M)\cdot(M:Mx)=(L:M)\cdot\|x\|^{-1}$$ より，

$$Z_L(M;s)=(L:M)^{-s}\sum\|x\|^{s},\quad x\in \mathrm{Aut}_A M\backslash\{M:L\}\cap B^\times$$

と表わされます。

いま，B に $\mathbb{Q}_p$-space としての位相（$\mathbb{Z}_p$-lattice は 0 の compact open neighborhood）を導入すると，$B^\times$ はその subset top. で，locally compact な位相群と考えられる。そこで $B^\times$ の Haar 測度，$d^\times x$（その measure を $\mu^\times$，$\mu^\times(\mathrm{Aut}_A M)$ は 0 でない有限の値をもつ。）を用い

て，$Z_L(M;s)$ は，

$$Z_L(M;s) = \mu^\times(\mathrm{Aut}_\Lambda M)(L:M)^{-s} \int_{B^\times} \Phi_{\{M:L\}}(x) \|x\|^s d^\times x$$

と考えられます。ここで $\Phi_{\{M:L\}}$ は B の中での $\{M:L\}$ の char. function。

補題（Bushnell-Reiner[1]）

Φ を B 上の Schwartz-Bruhat function（i.e. locally constant な compact support をもつ複素数値関数）とすると，

$$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1} \int_{B^\times} \Phi(x) \|x\|^s d^\times x \in \mathbb{C}[p^s, p^{-s}]$$

証明は，まず，B が simple algebra，Φ が $\mathrm{End}_\Gamma(\Gamma L)$ の部分集合 $x + p^f \mathrm{End}_\Gamma(\Gamma L)$，${}^\exists f \geq 0$，の場合に帰着させ最終的には，"Hermite normal form" 的な行列の操作で証明を与えています。

さて，補題より，$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1} Z_L(M;s) \in \mathbb{C}[p^s, p^{-s}]$ が得られますが，一方定義から，$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1} Z_L(M;s) \in \mathbb{Z}[[p^{-s}]]$（形式的巾級数の環）となっていますから，ただちに定理の主張を得ます。

§2 有限群のゼータ関数

Gを有限群，Γを$\Lambda=\mathbb{Z}G$を含む$\mathbb{Q}G$のmaximal orderとすると，Gの位数を割らない素数pに対して，$\Lambda_p=\Gamma_p$となり，Euler productより

$$\zeta_\Lambda(s)=\prod_{p\,|\,|G|}\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(s)\cdot\zeta_\Gamma(s)$$

を得ますから，$\zeta_\Lambda(s)$の計算は$\varphi_p(s)=\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(s)$の計算に帰着します。また，先の定理の系として，"$\zeta_{\Lambda_p}(s)$は全平面で定義された有理形関数に解析接続される"ことがわかりますが，そのとき次の関数等式に関する定理が，simple $\mathbb{Q}_p$-algebra上で定義されたzeta integralの関数等式から導かれます。

定理 (Bushnell-Reiner [1])

$$\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Lambda_p}(1-s)=(\Gamma_p:\Lambda_p)^{1-2s}\cdot\zeta_{\Gamma_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(1-s)\quad — .$$

定理から，$\varphi_p(s)=(\Gamma_p:\Lambda_p)^{1-2s}\cdot\varphi_p(1-s)$が導かれ，これより，$\varphi_p(s)=\sum_{i=0}^{n}a_ip^i$，$(\Gamma_p:\Lambda_p)=p^m$とおくと，$n=2m$，$a_{2m-i}=a_i\cdot p^{m-i}$，$i=0,\cdots,m$となり，$\varphi_p(s)$に関する情報を与えています。実際に$\zeta_\Lambda(s)$が計算された例としては，$G$が位数$p$, p^2 (pは素数)の巡回群，位数$2p$ (pは奇素数)の二面体群と，広中[1]で示されたmetacyclic groupの場合があり，以下最初の2つの例を紹介します。

(I)　位数が p, p^2 (pは素数)の巡回群のゼータ関数

ここで述べる内容はReiner[1]に依ります。以下 p の添字で局所化(完備化ではなく)を示します。さて、$G=\langle\sigma\mid\sigma^{p^n}=1\rangle$, $H=\langle\tau\mid\tau^{p^{n-1}}=1\rangle$ とおくと、まず、

$\mathbb{Q}G\cong\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}(\omega_1)\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}(\omega_n)$, ω_i は 1 の原始 p^i乗根であり、maximal $\mathbb{Z}$-order は、$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}[\omega_1]\oplus\cdots\mathbb{Z}[\omega_n]$ に同型であることがわかります。また、$\mathbb{Z}_pG$ の full ideal を調べるために、次の自然な fibre product を考えます。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma=\mathbb{Z}_pG \arrow[r] \arrow[d] & S=\mathbb{Z}_p[\omega_n] \arrow[d, "g_1"] \\
\Lambda=\mathbb{Z}_pH \arrow[r, "g_2"'] & \overline{\mathbb{Z}}H
\end{tikzcd}\quad,\ \overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

これより、$\Gamma=\{(x,y)\in S\times\Lambda\mid g_1(x)=g_2(y)\}$ と表わされます。いま I を Γ の full idealとして、I に対して Λ の full ideal J を、$J=\{y\in\Lambda\mid(0,py)\in I\}$ と定義します。このとき、或る、$g_1((1-\omega_n)^r)=g_2(y)$ を満たす、$r\geq 0$, $y\in J$ があり、$I=\Gamma((1-\omega_n)^r,y)+(0,pJ)$ と表わされます。逆にこのような J, y, r に対して、Γ の full ideal $I=\Gamma((1-\omega_n)^r,y)+(0,pJ)$ が定義されます。この対応により、Γ の full ideal I は次のデータで完全に決定されます。

$$I = \Gamma((1-\omega_n)^r, y) + (0, pJ)$$

(i) J は Λ の full ideal

(ii) r は $g_1((1-\omega_n)^r) \in g_2(J)$ であるような正整数

(iii) $y \in J$ は $g_2(y) = g_1((1-\omega)^r)$ である $\bmod pJ$ の代表

特に，$\Gamma = \Gamma(1,1) + (0, p\Lambda)$ より，上の I について，

$$(\Gamma : I) = p^r \cdot (\Lambda : J)$$

となります。また、N_J を J, r が与えられたときの，y の取り方の数とすると，k_J を $g_2(J) = (1-\tau)^{k_J}\mathbb{Z}H$ で定義するとき，

$$N_J = |J \cap p\Lambda : pJ| = |J : pJ| / |J + p\Lambda : p\Lambda| = p^{p^{n-1}} / p^{p^{n-1} - k_J}$$
$$= p^{k_J}$$

これより

$$\zeta_\Gamma(s) = \sum_J p^{k_J} \sum_{r \geq k_J} \{p^r(\Lambda : J)\}^{-s}$$

さて，この"公式"により $n=1,2$ の場合で計算されています。$n=1$ のときは，$\Lambda = \mathbb{Z}_p$ で J は，$J = p^t\mathbb{Z}_p$，$t \geq 0$ と表わされ，$t=0 \Rightarrow k_J = 0$，$t \geq 1 \Rightarrow k_J = 1$ だから

$$\zeta_\Gamma(s) = \sum_{r \geq 0} p^{-rs} + p \sum_{t \geq 1} \sum_{\geq 1} p^{-(\ \ + t)s}$$
$$= (1 - p^{-s} + p^{1-2s})\, \zeta_{\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p[\omega_1]}(s)$$

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = (1 - p^{-s} + p^{1-2s}) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}[\omega_1]}(s)$$

が得られます。なお $n=1$ の場合は Solomon [1]，Bushnell-Reiner [1] でも計算されています。

$n=2$ のとき Γ の full ideal I は

$$I = \Gamma((1-\omega_2)^m, z) + (0, pJ), \quad z \in J$$

$$J = \Lambda((1-\omega_1)^r, y) + (0, p^{t+1}\mathbb{Z}_p), \quad r \geq k_{p^t\mathbb{Z}_p}$$

$$\begin{cases} t=0, r=0 \Rightarrow y=1, \quad t=0, r\geq 1 \Rightarrow y=0 \\ t \geq 1 \Rightarrow y = 0, p^t, \cdots, (p-1)p^t \end{cases}$$

として得られ，$(\Gamma : I) = p^{r+m+t}$ さらに

$$t=0 \Rightarrow k_J = \mathrm{Min}(r, p-1)$$

$t=1 \Rightarrow$ $r < p-1$ で $k_J = r$

$r \geq p-1$ で $p-1$ 個の y について

$k_J = p-1$，1 個の y について

$k_J = p$

$$t \geq 2 \Rightarrow k_J = \mathrm{Min}(r, p)$$

となっています。以下計算を示すと，

$$\begin{aligned} \zeta_\Gamma(s) = & \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{m \geq r} p^r \cdot p^{-(r+m)s} + \sum_{r=p}^{\infty} \sum_{m \geq p-1} p^{p-1} p^{-(m+r)s} \\ & + p \cdot \sum_{r=1}^{p-2} \sum_{m \geq r} p^r p^{-(m+r+1)s} + (p-1) \sum_{r \geq p-1} \sum_{m \geq p-1} p^{p-1} p^{-(m+r+1)s} \\ & + \sum_{r \geq p-1} \sum_{m \geq p} p^p \cdot p^{-(m+r+1)s} \\ & + p \sum_{r=1}^{p} \sum_{t \geq 2} \sum_{m \geq r} p^r \cdot p^{-(m+r+t)s} \\ & + p \sum_{r \geq p+1} \sum_{t \geq 2} \sum_{m \geq p} p^p \cdot p^{-(m+r+t)s} \\ = & \cdots \end{aligned}$$

となるわけですけれど，結果は非常に複雑なものとなっています。

(II) $G=\langle \sigma,\tau \mid \sigma^2=\tau^p=1,\ \sigma\tau\sigma=\tau^{-1}\rangle$, p は奇素数

のゼータ関数

ここでは，Bushnell-Reiner [2]の紹介をします。

ω: 1 の原始 p-乗根

$L:=\mathbb{Q}(\omega)$, $K:=\mathbb{Q}(\omega+\omega^{-1})$

$S:=\mathbb{Z}[\omega]$, $R:=\mathbb{Z}[\omega+\omega^{-1}]$

$H:=\langle \rho \mid \rho^2=1\rangle$ ・・・ 位数 2 の巡回群.

$S\circ H$: twisted group ring

・・・ R-order in K-algebra $L\circ H \cong M_2(K)$.

まず，$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus M_2(K)$ で，$\mathbb{Z}G$ を含む maximal order は $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus M_2(R)$ と同型です。さらに，fibre product,

$$(*)\cdots\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \longrightarrow & S\circ H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}H & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Z}}H \end{array}$$

を考えます。

—$\varphi_2(s)$ の計算—

(*)を 2 で局所化すると，$\mathbb{Z}_2G \cong \mathbb{Z}H \oplus S\circ H$ を得ます。

（これは $p\neq 2$ による。） ここで，$S_2\circ H$ が $L\circ H$ の maximal R_2-order である（Auslander-Goldman の仕事による。）ことに注意すると，(I)の結果より，

$$\varphi_2(s) = \zeta_{\mathbb{Z}_2H}(s)/\zeta_{\mathbb{Z}_2}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}_2}(s) = 1-2^{-s}+2^{1-2s}$$

を得ます。

— $\varphi_p(S)$ の計算 —

(※) を p で局所化して,

fibre product

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = \mathbb{Z}_pG & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{Z}_pH = \mathbb{Z}_pe_1 \oplus \mathbb{Z}_pe_2 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ \Lambda = S_p \circ H & \xrightarrow[g_2]{} & \bar{\mathbb{Z}}H \end{array} \qquad e_1 = \frac{1-\rho}{2},\ e_2 = \frac{1+\rho}{2}$$

を考えます。ここで, Λ は $L \circ H$ の hereditary order (Auslander-Rim の仕事による。) ですから, π を R_p の prime element (S_p, R_p は d.v.r.) とすると, $|R_p : \pi R_p| = p$ で, $\Lambda \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R_p \right\} = T \subset M_2(K)$ となります。

$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_pH \times \Lambda \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ と表わし, $\mathbb{Z}_pH$ の full ideal が, $\mathbb{Z}_pHx$, $x = p^k e_1 + p^\ell e_2$ $k, \ell \geq 0$, で全て得られることと, $\ker g_2 = (1-\omega)\Lambda$ に注意すると, (I) と同様に Γ の full ideal は $\mathbb{Z}_pH$ と Λ の情報から次のように決定されます。

$I = \Gamma(a, b) + (0, (1-\omega)J)$

(i) J は Λ の full ideal

(ii) $g_1(a) \in g_2(J)$ となる $a = p^k e_1 + p^\ell e_2$

(iii) $b \in J$ は $g_2(b) = g_1(a)$ である mod J の代表.

さらに, $(\Gamma : I) = p^{k+\ell} \cdot (\Lambda : J)$ で, 与えられた J, a, に対する b の取り方の数 N_J は,

$N_J = |J \cap (1-\omega)\Lambda : (1-\omega)J| = p^2 / |J + (1-\omega)\Lambda : (1-\omega)\Lambda|$.

これよりΛをTと同一視して考えます。与えられたTの元に対応するΛの元のg_2による像は、行列の対角成分を$\bmod \pi R_p$で考えた$\mathbb{Z}$の元を、$\mathbb{Z}H$の$\mathbb{Z}$-basis. e_1, e_2の係数として得られる$\mathbb{Z}H$の元に一致します。

さて，Tのfull idealの同型類の代表は

$$T,\ \pi M_2(R_p),\ K=\left\{\begin{pmatrix}\pi a, & \pi b\\ c, & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in R_p\right\}$$

となっていることから，Tのfull idealは次の3 typeで完全に決まります。

(i) $J=Tx$, $x\in T^{\times}\setminus T\cap GL_2(k)$

(ii) $J=M_2(R_p)x$, $x\in GL_2(R_p)\setminus\left\{\begin{pmatrix}a & \pi b\\ c & \pi d\end{pmatrix} \middle| a,b,c.d\in R_p\right\}\cap GL_2(k)$.

(iii) $J=Kx$, $x\in GL_2(R_p)\setminus M_2(R_p)\cap GL_2(k)$

さらに，各々のtypeで，下に示す表のように，代表xの取り方が決まります。同時に$g_1(a)\in g_2(J)$となるaも決まり，$(1-\omega)\Lambda=\mathrm{rad}\Lambda$ですから，与えられた$J$に対する$N_J$も決定されます。($\nu$で$R_p$の元のex. val. を表わします。) 表をもとに$\varphi_p(s)$を計算すると，

J	x			$\lvert T:J\rvert$	N_J	a
Tx	$\begin{pmatrix}0 & \pi^n\\ \pi^m & d\end{pmatrix}$	$m\geq 0$ $n\geq 1$	$d\in R_p/\pi^n$	$p^{2(m+n)}$	p if $\nu(d)=0$ p^2 if $\nu(d)>0$	$k\geq 1, \ell\geq 0$ $k,\ell\geq 1$
Tx	$\begin{pmatrix}\pi^m & \pi b\\ 0 & \pi^n\end{pmatrix}$	$m\geq 0$ $n\geq 0$	$b\in R_p/\pi^n$	$p^{2(m+n)}$	1 if $m=n=0$ p if $\begin{cases}m=0, n>0\\ n=0\ m>0\end{cases}$ p^2 if $m,n>0$	$k,\ell\geq 0$ $k\geq 0, \ell\geq 1$ $k\geq 1, \ell\geq 0$ $k,\ell\geq 1$
$M_2(R_p)x$	$\begin{pmatrix}\pi^m & \pi b\\ 0 & \pi^n\end{pmatrix}$	$m\geq 0$ $n\geq 1$	$b\in R_p/\pi^{n-1}$	$p^{2(m+n)-1}$	p if $m=0$ p^2 if $m>0$	$k\geq 0, \ell\geq 1$ $k,\ell\geq 1$
$K\cdot x$	$\begin{pmatrix}\pi^m & b\\ 0 & \pi^n\end{pmatrix}$	$m\geq 0$ $n\geq 0$	$b\in R_p/\pi^n$	$p^{2(m+n)+1}$	p if $n=0$ or $\nu(b)=0$ p^2 if $n,\nu(b)>0$	$k\geq 1, \ell\geq 0$ $k,\ell\geq 1$

定理 (Bushnell-Reiner [2])

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = \varphi_2(s)\cdot\varphi_p(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_R(2s)\cdot\zeta_R(2s-1)$$

$$\varphi_2(s) = 1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}$$

$$\varphi_p(s) = 1 + (p-1)p^{-2s} + 2\cdot p^{2-3s} + (p-1)p^{1-4s} + p^{3-6s} \quad — .$$

文　　献

Bushnell-Reiner [1] Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjecture. Math. Z. 173, 135-161 (1980)

Bushnell-Reiner [2] Zeta functions of hereditary orders and integral group ring. Vis. Scholar's Lec.-1980. no.14. (1981)

広中 [1] Zeta functions of integral group rings of metacyclic groups. TSUKUBA J. Math. Vol.5, No.2 267-283 (1981)

Reiner [1] Zeta functions of integral representations. Comm. algebra 8 (10), 911-925 (1980)

Solomon [1] Zeta functions and integral representation theory. Advance in Math 26, 306-326 (1977)