

$y''(x) = f(x)$, $y(-1) = y(1) = 0$ の最適な数値積分公式について。

名古屋大学工学部 杉浦 洋 (Hiroshi Sugiura)

0. はじめに

$[-1, 1]$ における微分方程式

$$y''(x) = f(x) \quad , \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad \text{—————(0-1)}$$

の多項式補間に基づく解法について述べる。

上の解は Green 関数を使って表現すると

$$y(x) = Gf(x) := \int_{-1}^1 g(x, t) f(t) dt \quad \text{—————(0-2)}$$

$$g(x, t) := \frac{1}{2} \begin{cases} (x+1)(t-1) & t \geq x \\ (x-1)(t+1) & t < x \end{cases} \quad \text{—————(0-3)}$$

さて, 標本点 $-1 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n \leq 1$ をとり,

$$\begin{cases} \varphi_n(x) := \prod_{i=1}^n (x - \xi_i) & \text{—————(0-4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_i(x) := \varphi_n(x) / \{\varphi_n'(\xi_i)(x - \xi_i)\} & \text{—————(0-5)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_i(x) := G l_i(x) & \text{—————(0-6)} \end{cases}$$

により G の近似作用素 G_m を次式で定義する。

$$G_m f(x) := G \left(\sum_{i=1}^m f(\xi_i) l_i \right) (x) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) S_i(x) \quad \text{—————(0-7)}$$

明らかに

$$(G_n f)''(\xi_i) = f(\xi_i) = (Gf)''(\xi_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{—————(0-8)}$$

$$G_n f(-1) = 0 = Gf(-1), \quad G_n f(1) = 0 = Gf(1) \quad \text{—————(0-9)}$$

であるから $G_n f$ は Gf に対する一種の *lacunary* 補間である。¹⁾

又、この問題は二点境界値問題

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad \text{—————(0-10)}$$

の選点法による数値解法の一部を成すものである。

そこで我々の興味は、その精度特に標本点上における精度と数値的な安定性である。

まず、特定の標本点配置について標本点上における精度が高い事を示す。表題の最適公式とは、その様な標本点に基づく近似作用素 G_n のことである。

次に Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$, ($1 < \alpha < 3$) の 0 点を標本点とした近似作用素 G_n の数値的な安定性を示す。即ち、上の条件で α を固定した時できる近似作用素列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ において $\|G_n\|_{\infty}$ が一様有界である事を具体的に上界を与える事により証明する。この事は *Lagrange* 補間の不安定性とは対照的である。これは、 G が比較的安定な作用素であることにもよるが、適切な標本点配置をとることも重要である。この事を示す為に、最後に等間隔標本点を採用すれば $\|G_n\|_{\infty}$ が急激に増大する事を示す。

1. 標本点上における近似次数

[定義 1-1]

任意の m 次多項式 f について

$$G_m f(\xi_i) = G f(\xi_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{--- (1-1)}$$

が成立する時, G_m を標本点上で m 次の近似作用素と呼ぶ。(0-7) で定義した G_m は一般には標本点上で $(n-1)$ 次であるが,[定理 1-1] (標本点上 n 次の近似作用素の存在)

$$G_m(x) = \begin{cases} A_1 P_n^{(1,1)}(x) & \text{--- (1-2)} \\ \text{or } A_2 P_n^{(1,1)}\left(\frac{1+\xi_m}{2}x - \frac{1-\xi_m}{2}\right) & \text{--- (1-3)} \\ \text{or } A_3 P_n^{(1,1)}\left(\frac{1+\xi_m}{2}x + \frac{1-\xi_m}{2}\right) & \text{--- (1-4)} \\ \text{or } A_4 P_n^{(1,1)}(\xi_m x) & (n \geq 2 \text{ の時のみ}) \text{--- (1-5)} \end{cases}$$

ならば, 又その時に限り G_m は標本点上 n 次である。ここで $P_n^{(1,1)}(x)$ は Jacobi 多項式, ξ_m はその最大の 0 点である。又, A_i は右辺の最高次係数を 1 とする様な定数である。

《証明》

① 上の標本点配置が必要である事

$$\Phi_m(x) = G \varphi_m(x) \quad \text{--- (1-6)}$$

とすると $\varphi_m(x)$ は n 次多項式だから G_m が n 次なら

$$\Phi_m(\xi_i) = G_m \varphi_m(\xi_i) = \sum_{j=0}^n \varphi_m(\xi_j) S_j(\xi_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{--- (1-7)}$$

故に $\Phi_m(x)$ は $\varphi_m(x)$ で割り切れる。又, $\Phi_m(x)$ は $n+2$ 次だから

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (x-\eta_0)(x-\eta_1) \varphi_m(x) \quad \text{--- (1-8)}$$

ここで η_0, η_1 は複素数である。

(i) $\eta_0 \neq \eta_1$ のとき

$\alpha = (\eta_1 - \eta_0)/2$, $\beta = (\eta_1 + \eta_0)/2$ として

$$\Phi_m(\alpha\omega + \beta) = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \alpha^2 (\omega^2 - 1) \varphi_m(\alpha\omega + \beta) \quad \text{---(1-9)}$$

両辺を2回微分して

$$\alpha^2 \Phi_m''(\alpha\omega + \beta) = \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\frac{\alpha^2}{(m+1)(m+2)} (\omega^2 - 1) \varphi_m(\alpha\omega + \beta) \right] \quad \text{---(1-10)}$$

$\Phi_m'' = \varphi_m$ を代入して整理すれば

$$(\omega^2 - 1) \alpha^2 \varphi_m''(\alpha\omega + \beta) + 4\omega\alpha \varphi_m'(\alpha\omega + \beta) - n(n+3) \varphi_m(\alpha\omega + \beta) = 0 \quad \text{---(1-11)}$$

これと $P_n^{(1,1)}(x)$ を定義する微分方程式

$$(x^2 - 1) f''(x) + 4x f'(x) - n(n+3) f(x) = 0 \quad \text{---(1-12)}$$

とを比較することにより

$$A \varphi_m(\alpha\omega + \beta) = P_m^{(1,1)}(\omega) \quad \text{---(1-13)}$$

(ii) $\eta_0 = \eta_1$ のとき

$\alpha = 1$, $\beta = \eta_0$ として (i) と同様に

$$A \varphi_m(\omega + \eta_0) = \omega^n \quad \text{---(1-14)}$$

しかるに, $\varphi_m(x)$ は重根を持たないから (i) のみを考えればよい。

(1-8) に (1-12) を代入し, $B = A^{-1}/(m+1)(m+2)$ とすれば

$$\Phi_m(\alpha\omega + \beta) = B(\omega^2 - 1) P_m^{(1,1)}(\omega) \quad \text{---(1-15)}$$

故に $\Phi_m(x)$ の根の配置は $(x^2 - 1) P_m^{(1,1)}(x)$ のそれと幾何的に相似である。 $\Phi_m(-1) = \Phi_m(1) = 0$ と $\varphi_m(x)$ の根 ξ_i がすべて $[-1, 1]$ 区間にある事から, $-1, 1$ と $\{\xi_i\}_{i=1}^m$, η_0, η_1 の配置は図1-1の4通りとなる。

これらはそれぞれ (1-2), (1-3), (1-4), (1-5) 式に対応する。又, $n=1$ の時は, $\xi_1 = \xi_n$ だから ④ が無くなって 3通りである。

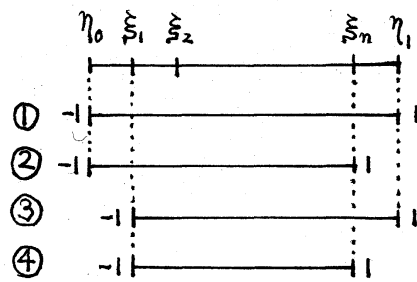


図1-1 最適標本点配置

⟨2⟩ $g_n(x)$ が定理の条件を満たせば十分である事。

任意の n 次多項式 $f(x)$ は,

$$f(x) = a_n g_n(x) + \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l_i(x) \quad (1-16)$$

と書ける。ここで a_n は f の n 次係数。故に

$$Gf(x) = Gg_n(x) + \sum_{j=1}^n f(\xi_j) S_j(x) \quad (1-17)$$

であるが, g_n は, (1-6), (1-7) 式を満たすから,

$$\begin{aligned} Gf(\xi_i) &= \Phi_n(\xi_i) + \sum_{j=1}^n f(\xi_j) S_j(\xi_i) \\ &= 0 + \sum_{j=1}^n f(\xi_j) S_j(\xi_i) = G_n f(\xi_i) \end{aligned} \quad (1-18)$$

《証明終》

定義1-1 の次数の概念は形式的である。それが精度にどの様に反映するかについては3章に述べる。

(1-2) は最良近似作用素の中に Jacobi 多項式の0点を標本点とするものが含まれている事を示している。

2. 近似作用素のノルムの有界性

まず, 一般的な下限に関する定理を述べる。

[定理 2-1]

$$\left[\begin{array}{l} (0-7) \text{ で定義された } G_n \text{ について} \\ \|G_n\|_\infty \geq 1/2 \end{array} \right] \quad \text{————— (2-1)}$$

《証明》

G_n は $n-1$ 次であるから

$$(G_n 1)(x) = (G_1)(x) = (x^2 - 1)/2 \quad \text{————— (2-2)}$$

故に

$$\|G_n\|_\infty \geq \|G_n 1\|_\infty = 1/2 \quad \text{————— (2-3)}$$

《証明終》

最良近似作用素を含む一連の Jacobi 多項式の 0 点を標本点とする近似作用素については,

[定理 2-2]

$$\left[\begin{array}{l} \{\xi_i\}_{i=1}^n \text{ が Jacobi 多項式 } P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \text{ } (-1 < \alpha < 2) \text{ の 0 点なら} \\ \|G_n\|_\infty \leq \Lambda(\alpha) := \sqrt{\frac{1}{4(1-\alpha)} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(\frac{5}{2}-\alpha)} - 2 \right\} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\alpha)}} \end{array} \right] \quad \text{————— (2-4)}$$

代表的な α について $\Lambda(\alpha)$ の値を計算したものを表 2-1 に示す。標本点は上から順に第一種 Chebyshev 多項式, Legendre 多項式, 第二種 Chebyshev 多項式の 0 点及び最良近似作用素 (1-2) の標本点に対応する。図 2-1 に $\Lambda(\alpha)$ のグラフ

表 2-1 代表的な α に対する $\Lambda(\alpha)$.

α	$\Lambda(\alpha)$
-0.5	0.7035...
0.0	0.5773...
0.5	0.5289...
1.0	0.5074...

を示す。

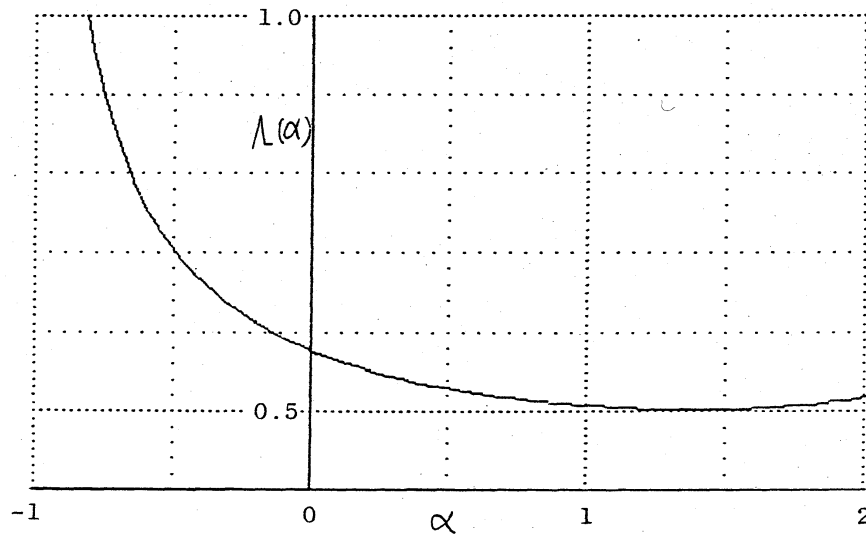


図2 $\|G_n\|_\infty$ の上界 $\Lambda(\alpha)$

(2-1) より $\|G_n\|_\infty \geq 0.5$ であるから、特に $-0.5 < \alpha < 2$ においては、 $\Lambda(\alpha)$ は $\|G_n\|_\infty$ に近い上界を与えている。

《定理 2-2 の証明》

$$\begin{aligned} \|G_n\|_\infty &= \max_{|x| \leq 1} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{-1}^1 g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l_i(t) \right\} dt \right| \\ &= \max_{|x| \leq 1} \max_{|e_i| \leq 1} \left| \int_{-1}^1 g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^n e_i l_i(t) \right\} dt \right| \quad \text{---(2-5)} \end{aligned}$$

Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^n e_i l_i(t) \right\} dt \right|^2 \\ & \leq \int_{-1}^1 \frac{g^2(x,t)}{(1-t^2)^\alpha} dt \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha \sum_{i,j=1}^n e_i e_j l_i(t) l_j(t) dt \quad \text{---(2-6)} \end{aligned}$$

重 $(1-t^2)^\alpha$ の n 点 Gauss-Jacobi 積分則の分点は $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ とし、至するからそれに対応する重 $\{w_i\}_{i=1}^n$ とすると、 $l_i(t) l_j(t)$ は $2n-2$ 次の多項式故、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha l_i(t) l_j(t) dt &= \sum_{k=1}^m w_k l_i(\xi_k) l_j(\xi_k) \\ &= \sum_{k=1}^m w_k \delta_{ik} \delta_{jk} = w_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2-7)$$

故に (2-6) の第二因子

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha \sum_{i,j=1}^m e_i e_j l_i(t) l_j(t) dt &= \sum_{i,j=1}^m e_i e_j w_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^m e_i^2 w_i \\ &\leq \sum_{i=1}^m w_i = \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha dt \end{aligned} \quad (2-8)$$

第一因子を評価する為に

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \int_{-1}^1 g^2(x, t) (1-t^2)^{-\alpha} dt \\ &= (1-x)^2 \int_{-1}^x (1+t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt + (1+x)^2 \int_x^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \end{aligned} \quad (2-9)$$

と置くとき、

$$f'(x) = -2(1-x) \int_{-1}^x (1+t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt + 2(1+x) \int_x^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \quad (2-10)$$

$$f''(x) = -4(1-x^2)^{-\alpha+1} + 2 \int_{-1}^x (1+t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt + 2 \int_x^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \quad (2-11)$$

$$f^{(3)}(x) = 8(2-\alpha)x(1-x^2)^{-\alpha} \quad (2-12)$$

$\alpha < 2$ で、 $(1-x^2)^{-\alpha} \geq 0$ であるから、 $f^{(3)}(x)$ は $x < 0$ で

0 以下、 $x \geq 0$ で 0 以上。故に $f'(x)$ は $x < 0$ で

上に凸、 $x \geq 0$ で下に凸である。さらに、 f' は奇関数故

$$\begin{aligned} -f'(-1) &= f(1) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \int_{-1}^x (1+t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \int_{-1}^x (1+t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \right\} / (x-1)^{-1} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 1} (1+x)^2 (1-x^2)^{-\alpha} / (x-1)^{-2} \end{aligned}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 1} (1+x)^{2-\alpha} (1-x)^{2-\alpha} = 0 \quad \text{—————(2-13)}$$

故に $f'(x)$ は $x < 0$ で 0 以上, $x \geq 0$ で 0 以下。即ち

$$\max_{|x| \leq 1} f(x) = f(0) \quad \text{—————(2-14)}$$

以上より (2-6) の第一因子

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g^2(\alpha, t) (1-t^2)^{-\alpha} dt &\leq \frac{1}{4} f(0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \quad \text{—————(2-15)} \end{aligned}$$

(2-6), (2-8), (2-15) より

$$\left| \int_{-1}^1 g(\alpha, t) \left\{ \sum_{i=1}^n e_i l_i(t) \right\} dt \right|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \int_0^1 (1-t^2)^\alpha dt \quad \text{—————(2-16)}$$

(2-16) の右辺は n によらないのでこれを $\Lambda^2(\alpha)$ と書くと, (2-5)

より,

$$\|G_m\|_\infty \leq \Lambda(\alpha) \quad \text{—————(2-17)}$$

となる。バ-タ関数の定義より

$$\Lambda^2(\alpha) = \frac{1}{4} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha\right) - 2B(1, 1-\alpha) + B\left(\frac{3}{2}, 1-\alpha\right) \right\} B\left(\frac{1}{2}, 1+\alpha\right) \quad \text{—————(2-18)}$$

となり, これを Γ 関数を使って書き更えて整理すれば (2-4) 式も得る。
《証明終》

3. 収束性と精度

定理 2-2 の条件で α を固定した近似作用素の列 $\{G_m\}_{m=0}^\infty$ について考察する。

[定理 3-1] (収束性)

[任意の $f \in C[-1, 1]$ に対して $G_m f$ は $G f$ に一様収束する。]

《証明》

定理 2-2 より $\|G_n\|_\infty$ は一様有界, しかも f が多項式なら,
 $n > \dim f$ で $G_n f = G f$. 故に Banach-Steinhaus の定理より,
 定理 3-1 は明らか。 《証明終》

関数 f の滑らかさを仮定すれば収束の速度と $G_n f$ の精度に
 ついてもう少し詳しい事が言える。 まず最良多項式近似に
 関する Jackson の定理を引用しておく。

[定理 3-2] (D. Jackson²⁾)

$$\left[\begin{array}{l} f \in C^k[-1, 1], f^{(k)}(x) \in \text{Lip}_M^\beta, \tilde{f}_n \text{ を } [-1, 1] \text{ における } f \text{ の} \\ n \text{ 次の最良近似多項式とすると,} \\ \|f - \tilde{f}_n\|_\infty \leq d C^{k+1} M n^{-k-\beta} \quad n > k \geq 1 \quad \text{---(3-1)} \\ \text{ただし } C = 1 + \pi^{3/2}, d \text{ は次式を満たす任意の実数である。} \\ d \geq \frac{n^{k+\alpha}}{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)^\alpha} \quad \text{---(3-2)} \end{array} \right.$$

[定理 3-3]

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ が定理 3-2 の条件を満たすなら } \alpha \neq 1 \text{ の時, } n > k+1 \text{ で} \\ \|G_n f - G f\|_\infty \leq (\Lambda(\alpha) + \frac{1}{2}) d C^{k+1} M (n-1)^{-k-\beta} \quad \text{---(3-3)} \\ \text{又 } \alpha = 1 \text{ の時は, } n > k \text{ で} \\ \|G_n f - G f\|_\infty \leq (\Lambda(\alpha) + \frac{1}{2}) d C^{k+1} M n^{-k-\beta} \quad \text{---(3-4)} \\ d, C \text{ は定理 3-2 の記号である。 いずれにしても} \\ \|G_n f - G f\|_\infty = O(n^{-k-\beta}) \quad \text{---(3-5)} \end{array} \right.$$

《証明》

$\alpha \neq 1$ のとき, G_n は標本点上 $n-1$ 次である。 f の $n-1$ 次最良近似多項式を \tilde{f}_{n-1} とすれば, $G_n \tilde{f}_{n-1} = G \tilde{f}_{n-1}$ 故,

$$\begin{aligned} \|G_n f - G f\|_\infty &\leq \|G_n f - G_n \tilde{f}_{n-1}\|_\infty + \|G_n \tilde{f}_{n-1} - G f\|_\infty \\ &= \|G_n (f - \tilde{f}_{n-1})\|_\infty + \|G (\tilde{f}_{n-1} - f)\|_\infty \\ &\leq \|G_n\|_\infty \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty + \|G\|_\infty \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \\ &= (\|G_n\|_\infty + \|G\|_\infty) \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \quad \text{————— (3-6)} \end{aligned}$$

さて,

$$\begin{aligned} \|G\|_\infty &= \sup_{\|f\|_\infty=1} \max_{|x| \leq 1} \left| \int_{-1}^1 g(x, t) f(t) dt \right| \\ &\leq \max_{|x| \leq 1} \int_{-1}^1 |g(x, t)| dt = \max_{|x| \leq 1} \frac{1-x^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{————— (3-7)} \end{aligned}$$

これと (2-2) より

$$\|G\|_\infty = \frac{1}{2} \quad \text{————— (3-8)}$$

以上と定理 2-2, 定理 3-2 より (3-3) が成立する。 $\alpha=1$ の場合も同様に証明できる。 《証明終》

4. 等間隔標本点による近似作用素の不安定性

この章では等間隔標本点 $\{\xi_i = \frac{2i-n-1}{n-1}\}_{i=1}^n$ に対して (0-7) で定義される近似作用素 G_n を扱う。

$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を選点とする選点法では, G_n は

$$\tilde{G}_n: R^n \rightarrow R^n, \quad \tilde{G}_n = (\nu_j(\xi_i))_{i,j=1}^n \quad \text{————— (4-1)}$$

と行列表現されるが、

[定理 4-1]

$\|G_m\|_\infty, \|\tilde{G}_m\|_\infty$ は共に $O(2^m \cdot n^{-\frac{q}{2}})$ より速く発散する。

この定理により $G_m f$ はもはや $G f$ の収束を保証されない。
又、選点法における \tilde{G}_m の作用は、 m が大きい時には数値的に非常に不安定となる。

定理 4-1 を証明するには、次の命題を示せば十分である。

[命題 4-1]

$m = [\frac{m}{2}] + 1$ とすると、

$$S_m(\xi_{m-1}) = \int_{-1}^1 g(\xi_{m-1}, t) l_m(t) dt \quad (4-2)$$
 は $O(2^m \cdot n^{-\frac{q}{2}})$ 以上の速さで発散する。

《証明》

(1) 標本点数が $2n+1$ のとき

$n \geq 4$ とする。 $m = n+1$ で

$$\begin{aligned} S_m(\xi_{2m}) &= S_{m+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \int_{-1}^1 g\left(\frac{n-1}{n}, t\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n+1}}^{2m+1} \left(t - \frac{i-n-1}{n}\right) / \left(0 - \frac{i-n-1}{n}\right) dt \\ &= \int_{-1}^1 g\left(\frac{n-1}{n}, t\right) \prod_{i=1}^n \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 - t^2\right) / \left(\frac{i}{n}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{n(n!)^2} \int_{-n}^n g\left(\frac{n-1}{n}, \frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^n (i^2 - x^2) dx \quad (4-3) \end{aligned}$$

$$g\left(\frac{n-1}{n}, t\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}(t+1) & t \leq \frac{n-1}{n} \\ \frac{2m-1}{2n}(t-1) & t > \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

であるから、

$$\int_{|\alpha| \leq n-1} g\left(\frac{n-1}{n}, \frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) = -\frac{1}{n} \int_0^{n-1} \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) d\lambda \quad (4-4)$$

$$\int_{n-1 \leq \lambda \leq n} g\left(\frac{n-1}{n}, \frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) = -\frac{1}{n} \int_{n-1}^n (n-x) \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) d\lambda \quad (4-5)$$

従, 7

$$I^{(n)} = \int_0^{n-3} \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) d\lambda \quad (4-6)$$

$$I_k^{(n)} = \int_k^{k+1} \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) d\lambda \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad (4-7)$$

$$I_{n-1}^{(n)} = \int_{n-1}^n (n-x) \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) d\lambda \quad (4-8)$$

と置けば

$$S_m(\xi_{2m}) = -\frac{1}{n^2 (n!)^2} \left\{ I^{(n)} + I_{n-3}^{(n)} + I_{n-2}^{(n)} + I_{n-1}^{(n)} \right\} \quad (4-9)$$

まず

$$|I_{n-1}^{(n)}| = \int_{n-1}^n (n-x)^2 (x-n+1) \prod_{i=1}^n (x+i) \prod_{i=1}^{n-2} (x-i) d\lambda \quad (4-10)$$

乗積の部分は $[n-1, n]$ で単調増加であるから

$$|I_{n-1}^{(n)}| \geq \prod_{i=1}^n (n-1+i) \prod_{i=1}^{n-2} (n-1-i) \int_{n-1}^n (n-x)^2 (x-n+1) d\lambda = \frac{(2n-1)!}{12(n-1)} \quad (4-11)$$

次に

$$\begin{aligned} |I_{n-1}^{(n)}| &= \int_{n-1}^n |(n-x) \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2)| d\lambda \\ &= \int_n^{n+1} \frac{x}{(x-1)x(x+n)(x+n+1)} |(n+1-x) \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda^2 - x^2)| d\lambda \quad (4-12) \end{aligned}$$

で $x/(x-1)$, $1/(x+n)(x+n+1)$ は単調減少だから

$$\begin{aligned} |I_{n-1}^{(n)}| &\leq \frac{n}{(n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)} \int_n^{n+1} |(n+1-x) \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda^2 - x^2)| d\lambda \\ &= \frac{1}{2(n-1) \cdot 2n+1} |I_n^{(n+1)}| \quad (4-13) \end{aligned}$$

同様にして

$$|I_{n-2}^{(m)}| = \int_{n-1}^m \frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n+1)} \left| \prod_{\lambda=1}^{n+1} (\lambda^2 - x^2) \right| dx \geq \frac{|I_{n-1}^{(n+1)}|}{2(n-1)(2n+1)} \quad (4-14)$$

(4-13), (4-14) より

$$|I_{n-2}^{(n)}| / |I_{n-1}^{(n)}| \geq |I_{n-1}^{(n+1)}| / |I_n^{(n+1)}| \quad (4-15)$$

さらに実際定積分も行えば

$$|I_2^{(4)}| / |I_3^{(4)}| = r = \frac{263456}{417793} < 1 \quad (4-16)$$

故に $n \geq 4$ で

$$|I_{n-2}^{(n)}| \leq r |I_{n-1}^{(n)}| \quad (4-17)$$

さて

$$|I_{n-3}^{(n)}| = \int_{n-3}^{n-2} \left| \prod_{\lambda=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| dx = \int_{n-2}^{n-1} \frac{(n+1-x)x}{(x-1)(n+x)} \left| \prod_{\lambda=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| dx \quad (4-18)$$

$x/x-1, (n+1-x)/(n+x)$ は単調減少だから

$$\begin{aligned} |I_{n-3}^{(n)}| &\leq \frac{3(n-2)}{(n-3)(2n-2)} \int_{n-2}^{n-1} \left| \prod_{\lambda=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| dx = \frac{3(n-2)}{3(n-1)(n-3)} |I_{n-2}^{(n)}| \\ &\leq \frac{3(n-2)}{2(n-1)(n-3)} r |I_{n-1}^{(n)}| = o(|I_{n-1}^{(n)}|) \end{aligned} \quad (4-19)$$

さらに補題 4-1 より

$$\max_{0 \leq x \leq n-3} \left| \prod_{\lambda=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| \leq \frac{(2n-7)(2n-4)! 4!}{n-3} \quad (4-20)$$

故に

$$\begin{aligned} |I^{(n)}| &\leq \int_0^{n-3} \left| \prod_{\lambda=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| dx \leq \frac{4! (2n-7)(2n-4)!}{n-3} \\ &= \frac{4! (2n-7) 12(n-1)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \frac{(2n-1)!}{12(n-1)} \end{aligned} \quad (4-21)$$

これより (4-11) より

$$|I^{(n)}| = o(|I_{n-1}^{(n)}|) \quad (4-22)$$

以上 (4-9), (4-17), (4-19), (4-22) より

$$|S_m(\xi_{2m})| = O\left(\frac{1}{n^2 (n!)^2} |I_{n-1}^{(m)}|\right) \quad (4-23)$$

(4-11) と Stirling の公式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 (n!)^2} |I_{n-1}^{(m)}| &\geq \frac{(2m-1)!}{12 n^2 (n-1)(n!)^2} = O\left(\frac{1}{n^3} 2^{2m+1} n^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= O\left(2^{2m+1} n^{-\frac{9}{2}}\right) \quad (4-24) \end{aligned}$$

これと (4-23) より求める結果を得る。

<2> 標本点数が $2m$ のとき

$n \geq 4$ を仮定しておく。 $m = n+1$ であり

$$S_m(\xi_{2m-1}) = \int_{-1}^1 g(\xi_{2m-1}, t) \prod_{\lambda=1}^n \frac{t + \frac{2n-2\lambda+1}{2m-1}}{\frac{1}{2m-1} + \frac{2n-2\lambda+1}{2m-1}} \prod_{\lambda=1}^{n-1} \frac{t - \frac{2m-2\lambda+1}{2m-1}}{\frac{1}{2m-1} - \frac{2m-2\lambda+1}{2m-1}} dt \quad (4-25)$$

(4-3) と同様の変数変換により

$$\begin{aligned} S_m(\xi_{2m-1}) &= \frac{-4}{(2m-1)^3 n! (n-1)!} \left\{ \int_{-n}^{n-2} (n+x)^2 \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i^2 - x^2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{n-2}^{n-1} (2m-2)(n-1-x)(n+x) \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i^2 - x^2) dx \right\} \quad (4-26) \end{aligned}$$

ここで

$$I_{-n}^{(m)} = \int_{-n+1}^{n-4} (n+x)^2 \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i^2 - x^2) dx \quad (4-27)$$

$$I_k^{(m)} = \int_k^{k+1} (n+x)^2 \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i^2 - x^2) dx \quad -n \leq k \leq n-3 \quad (4-28)$$

$$I_{n-2}^{(m)} = \int_{n-2}^{n-1} (2m-2)(n-1-x)(n+x) \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i^2 - x^2) dx \quad (4-29)$$

とあけば

$$S_m(\xi_{2m-1}) = \frac{-4}{(2m-1)^3 n! (n-1)!} \left\{ I_{-n}^{(m)} + I_{-n+1}^{(m)} + I_{-n+2}^{(m)} + I_{-n+3}^{(m)} + I_{-n+4}^{(m)} + I_{-n+3}^{(m)} + I_{-n+2}^{(m)} \right\} \quad (4-30)$$

まず

$$|I_{n-2}^{(m)}| = \int_{n-2}^{n-1} (2m-2)(n-1-x)^2 (x-n+2) \left\{ (n+x) \prod_{\lambda=1}^{n-1} (i+x) \prod_{\lambda=1}^{n-3} (x-i) \right\} dx \quad (4-31)$$

{ }内の因子は単調増加だから

$$\begin{aligned} |I_{n-2}^{(m)}| &\geq \frac{(2m-2)(2m-2)!}{(m-2)} \int_{n-2}^{n-1} (n-1-x)^2 (x-n+2) dx \\ &= \frac{2(n-1)(2m-2)!}{(m-2)} \cdot \frac{1}{12} \geq \frac{(2m-2)!}{6} \end{aligned} \quad (4-32)$$

次に

$$\begin{aligned} |I_{n-2}^{(m)}| &= \int_{n-2}^{n-1} |(2m-2)(n-1-x)(n+x) \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)| dx \\ &= \int_{n-1}^n \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{(m+x+1)(n+x)} |2n(m-x)(n+1+x) \prod_{i=1}^n (i^2-x^2)| dx \end{aligned} \quad (4-33)$$

$x/x-1, 1/(m+x+1)(n+x)$ の単調増加より

$$|I_{n-2}^{(m)}| \leq \frac{(n-1)^2}{2n^2(m-2)(2n-1)} |I_{n-1}^{(m+1)}| \quad (4-34)$$

さらに $|I_{n-3}^{(m)}|$ の上界として

$$M_{n-3}^{(m)} = \int_{n-2}^{n-1} |(2n-2)(n+x) \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)| dx \quad (4-35)$$

とすると (4-34) と同様にして

$$M_{n-3}^{(n)} \geq \frac{(n-1)^2}{2n^2(n-2)(2n-1)} M_{n-2}^{(n+1)} \quad (4-36)$$

(4-34), (4-36) より

$$M_{n-3}^{(m)} / |I_{n-2}^{(m)}| \geq M_{n-2}^{(m+1)} / |I_{n-1}^{(m+1)}| \quad (4-37)$$

よおるに

$$M_1^{(4)} / |I_2^{(4)}| = r = \frac{13}{15} \frac{43}{75} \frac{91}{13} < 1 \quad (4-38)$$

よなるので $n \geq 4$ で

$$|I_{n-3}^{(m)}| \leq M_{n-3}^{(m)} \leq r |I_{n-2}^{(m)}| \quad (4-39)$$

さて

$$\begin{aligned}
 |I_{n-4}^{(m)}| &= \int_{n-4}^{n-3} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2)| dx = \int_{n-3}^{n-2} |(n-1+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - (x-1)^2)| dx \\
 &= \int_{n-3}^{n-2} \frac{(n+x-1)(n-x)}{(n+x)^2} \cdot \frac{x}{x-1} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2)| dx \quad \text{--- (4-40)}
 \end{aligned}$$

$(n+x-1)/(n+x) < 1$ かつ $(n-x)/(n+x)$, $x/(x-1)$ は単調減少だから (4-39) より

$$|I_{n-4}^{(m)}| \leq \frac{3(n-3)}{(2m-3)(n-4)} |I_{n-3}^{(m)}| \leq \frac{3(n-3)}{(2m-3)(n-4)} r |I_{n-2}^{(m)}| = o(|I_{n-2}^{(m)}|) \quad \text{--- (4-41)}$$

又、補題 4-2 と (4-32) より

$$\begin{aligned}
 |I^{(m)}| &= \int_{-m+3}^{n-4} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2)| dx \leq \frac{(2m-7)(2m-9)}{n-4} (2m-4)^2 (2m-6)! / 4! \\
 &= \frac{(2m-7)(2m-9)(2m-4)^2 4! 6}{(2m-5)(2m-4)(2m-3)(2m-2)(2m-1)} \cdot \frac{(2m-2)!}{6} \\
 &= o(|I_{n-2}^{(m)}|) \quad \text{--- (4-42)}
 \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}
 |I_{-k-1}^{(m)}| &= \int_{-k-1}^{-k} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2)| dx = \int_{k-1}^k |(n+(-1-y)) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - (-1-y)^2)| dy \\
 &= \int_{k-1}^k \frac{y(n-y-1)}{(y+1)(n+y)} |(n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2)| dy \quad \text{--- (4-43)}
 \end{aligned}$$

$y/(y+1) < 1$ かつ $(n-y-1)/(n+y)$ は単調減少だから、

$$|I_{-k-1}^{(m)}| \leq \frac{n-k}{n+k-1} |I_{-k-1}^{(m)}| \quad \text{--- (4-44)}$$

故に

$$|I_{-m+1}^{(m)}| \leq \frac{2}{2m-3} |I_{n-3}^{(m)}| = o(|I_{n-3}^{(m)}|) = o(|I_{n-2}^{(m)}|) \quad \text{--- (4-45)}$$

$$|I_{-n+2}^{(m)}| \leq \frac{3}{2m-4} |I_{n-4}^{(m)}| = o(|I_{n-4}^{(m)}|) = o(|I_{n-2}^{(m)}|) \quad \text{--- (4-46)}$$

最後に

$$\begin{aligned}
 |I_{-n}^{(m)}| &= \int_{-n}^{-m+1} (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) dx \\
 &= \int_{n-2}^{n-1} \frac{y}{(y+1)(2n-2)} |(2n-2)(n-1-y)(n+y) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2)| dy \\
 &\leq \frac{1}{2n-2} |I_{n-2}^{(m)}| = o(|I_{n-2}^{(m)}|) \quad \text{————— (4-47)}
 \end{aligned}$$

以上 (4-30), (4-39), (4-41), (4-42), (4-45), (4-46), (4-47) より

$$S_m(\tilde{S}_{2n-1}) = O\left(\frac{|I_{n-2}^{(m)}|}{(2n-1)^3 n! (n-1)!}\right) \quad \text{————— (4-48)}$$

(4-32) と Stirling の公式より

$$\begin{aligned}
 \frac{|I_{n-2}^{(m)}|}{(2n-1)^3 n! (n-1)!} &\geq \frac{(2n-2)!}{6(2n-1)^3 m! (n-1)!} \\
 &= O\left(2^{2m} \cdot n^{-\frac{9}{2}}\right) \quad \text{————— (4-49)}
 \end{aligned}$$

これと (4-48) より求める結果を得る。

《証明終》

[補題 4-1]

$$\left[\max_{0 \leq \lambda \leq k} \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - \lambda^2) \leq \frac{2k-1}{k} (n+k-1)! (n-k+1)! \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{————— (4-50)} \right.$$

《証明》

$$M_k = \max_{k-1 \leq \lambda \leq k} \prod_{i=1}^m (\lambda^2 - \lambda^2) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{————— (4-51)}$$

とすると, $[k-1, k]$ で

$$\left| \prod_{i=1}^m (\lambda^2 - \lambda^2) \right| = \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda^2 - i^2) \prod_{i=k}^m (\lambda^2 - \lambda^2) \quad \text{————— (4-52)}$$

で右辺第一因子は単調増加, 第二因子は単調減少故

$$M_k \leq \prod_{i=1}^{k-1} (k^2 - i^2) \prod_{i=k}^m (\lambda^2 - (k-1)^2) = \frac{2k-1}{k} (n+k-1)! (n-k+1)! \quad \text{————— (4-53)}$$

右辺を M_k とおくと,

$$\bar{M}_{k+1}/\bar{M}_k = \frac{k(2k+1)(n+k)}{(k+1)(2k-1)(n-k+1)} \geq \frac{k(2k+1)}{(k+1)(2k-1)} = \frac{2k^2+k}{2k^2+k-1} \geq 1 \quad \text{---(4-54)}$$

故に

$$\max_{0 \leq x \leq k} \left| \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - x^2) \right| \leq \bar{M}_k = \frac{2k-1}{k} (n+k-1)! (n-k+1)! \quad \text{---(4-55)}$$

《証明終》

[補題 4-2]

$$\left[\max_{-k+1 \leq x \leq k} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) \right| \leq \frac{2k-1}{k} (n+k)^2 (n+k-2)! (n-k)! \quad \text{---(4-56)} \right. \\ \left. 1 \leq k \leq n-1 \right]$$

《証明》

補題 4-1 より)

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq k} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) \right| &= \max_{0 \leq x \leq k} (n+x)^2 \max_{0 \leq x \leq k} \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) \\ &\leq \frac{2k-1}{k} (n+k)^2 (n+k-2)! (n-k)! \quad \text{---(4-57)} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \max_{-k+1 \leq x \leq -1} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) \right| &= \max_{0 \leq y \leq k} \left| (n+(-y-1))^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - (-y-1)^2) \right| \\ &= \max_{0 \leq y \leq k} \frac{y}{y+1} \cdot \frac{n+y}{n-1-y} \cdot \frac{(n-y-1)^2}{(n+y)^2} \cdot \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2) \right| \\ &\leq \max_{0 \leq y \leq k} \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2) \right| \quad \text{---(4-58)} \end{aligned}$$

又、

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 0} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - x^2) \right| &= \max_{0 \leq y \leq 1} \left| (n-y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2) \right| \\ &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda^2 - y^2) \right| \quad \text{---(4-59)} \end{aligned}$$

以上 (4-57), (4-58), (4-59) より (4-54) を得る。

《証明終》

< 文献表 >

- 1) Suzuki, C. : Some Poised Lacunary Interpolation Polynomials.
Journal of Information Processing, Vol. 5, No. 1, PP. 38~44
(1982)
- 2) Jackson, D. : The Theory of Approximation.
New York (1930)