

複数個の解をもつ不動点問題の 数値解法について

富士通(株)国際情報研 鈴木千里 (Chisato Suzuki)

1. はじめに 複数個の解をもつ非線形 2 点境界値問題と等価な不動点問題を写像の近似に基づき解くことを考える: C_1 は区間 $I = [-1, 1]$ の上で定義された $y(-1) = y(1) = 0$ なる連続関数 y の空間とする. 対象とする不動点問題の写像 $T_f: C_1 \rightarrow C_1$ をつぎのように定義する: $y \in C_1$ に対し

$$(1.1) \quad (T_f y)(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) f(u, y(u)) du.$$

ただし, $f(x, y)$ は $I \times R^1$ ($R^1 = (-\infty, \infty)$) において定義された連続微分可能な関数とする. $g(x, u)$ は $d^2y/dx^2 = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$ に対するグリーン関数である. y に関して非線形であるような関数 f をもつ写像 (1.1) の不動点問題に注目する. 特に, 興味あるのは複数個の解をもつ場合である.

一般に, このような非線形問題を解く場合に, まず解が存在するであろうか? また存在するならば, 幾つの解が存在するのだろうか? という最も基本的な疑問を生ずる. しかし, このような問題に対しては, 近似解の存在が T_f の不動点の存在を保証するような近似解法のアプローチを取ることによってある程度の回避はできる. それでも, 幾つかの困難が予想される. 例えば, 大域的な領域の中に存在する全ての解を如何にして近似するかということがその一つである. 又これは, 全ての解に対して初期近似を得ることが可能であろうかということにも関係する.

ここで述べる写像近似に基づく方法は、写像 T_f の不動点を近似する写像 $T_k: C_1 \rightarrow C_1$ とそれに等価なユークリッド空間 R^k 上での写像 T^k からなる2つの写像を構成し、つぎにニュートン法によって T^k の不動点を求め、そしてそれを C_1 の中に埋めこむことにより T_f の不動点を近似する手法である。この方法に関して、つぎのことを述べる：

- 【1】写像 T_f , T_k 及び T^k の不動点の関係
- 【2】近似不動点の精度の改良
- 【3】初期近似不動点の数と T_f の不動点の数との対応関係
- 【4】具体的な問題に対する実行例

節2と3で基本的な概念を準備する。そして【1】に関しては節4で述べる。そのとき T_k と T^k の不動点問題の間の等価性を述べ、各 T^k ($k \geq 3$) が不動点をもてば、 T_f の不動点問題も解をもつことを示す。【2】に関しては、近似不動点の精度の改良手続き及びその特性について5節で述べる。この改良には、所謂オーダーコントロール技法が用いられる。特に、ここではニュートン法による T^k の不動点計算と T^{k-m} ($m \geq 1$) の不動点から導く出発値との関係を議論する。【3】と【4】に関連して、複数個の解をもつ問題の不動点に対する初期近似に関する可否を節6で議論する。ここでは初期近似が困難な例を含む幾つかの具体例を解く。そのとき、ニュートン法の実空間内での収束領域の中にコントロール集合、ジュリア集合のようなパターンの図形が出現するような興味ある具体例を示す。

2. 問題の記述と近似写像の構成

C_1 を区間 $I = [-1, 1]$ の上で連続な両端で零点となる実関数からなる関数空間とする；

$$C_1 = \{ y(x) \in C[-1, 1] : y(-1) = y(1) = 0 \}$$

$f(x, u)$ は $f: I \times R^1 \rightarrow R^1$ のように定義された連続関数とする。 u に関して2階微分可能な関数 $f(x, u)$ のクラスを F とする。そのとき、不動点問題を定義する写像のクラスがつぎのように定義される； $T \equiv \{ T_f : C_1 \rightarrow C_1 \mid f \in F \}$. ただし、 T_f は(1.1)に定義された写像で、(1.1)式における関数 $g(x, u)$ はつぎのようである；

$$(2.1) \quad g(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)(1-u), & \text{if } x \leq u, \\ \frac{1}{2}(1-x)(1+u), & \text{if } x > u. \end{cases}$$

この写像のクラス T において定まる不動点問題の近似解を与え、その近似の性質を明らかにすることがこの目的である。すなわち、 $T_f \in T$ として、

$$(2.2) \quad T_f y = y$$

を満たす $y \in C_1$ を近似する方法を展開することである。なお、不動点問題(2.2)は2階常微分方程式の境界値問題

$$(2.3) \quad y''(x) = f(x, y(x)), \quad y(-1) = y(1) = 0, \quad x \in I$$

と等価である。ここで、 $'' = d^2/dx^2$ 。

まず、不動点問題の写像(1.1)の近似を行う：各 $y \in C_1$ に対して定まる $f(x, y(x))$ に対するLagrange補間多項式は

$$(2.4) \quad f(x, y(x)) \sim \sum_{i=1}^k L_{ik}(x) f(x_{ik}, y(x_{ik})), \quad L_{ik}(x) = \prod_{p=1, p \neq i}^k \frac{x - x_{pk}}{x_{ik} - x_{pk}}$$

である。ここで、 $-1 = x_{1k} < x_{2k} < \dots < x_{kk} = 1$ は k 次のロバット数値積分公式の標本点とする。Lozinskii-Kharshiladzeの定理 [1] で知られるように、(2.4)の近似は全ての連続関数に対して一様収束しないが、しかし、弱い意味においての一様収束性は適当な条件のもとで保証することができる。すなわち、

$$(2.5) \quad T_f(z)(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) f(u, y(u)) du \sim \int_{-1}^1 g(x, u) \left[\sum_{i=1}^k L_{ik}(u) f(x_{ik}, y(x_{ik})) \right] du \\ = \sum_{i=1}^k s_{ik}(x) f(x_{ik}, y_{ik}) \equiv \phi^k(y^k)(x)$$

の近似においては一様収束することを示すことができる(命題3参照)。ここで、 $y_{ik} = y(x_{ik})$ ($i=1, 2, \dots, k$)、 $y^k = (y_{ik})$ 、そして

$$(2.6) \quad s_{ik}(x) \equiv \int_{-1}^1 g(x, u) L_{ik}(u) du.$$

この $\phi^k(y^k)(x)$ はベクトル $y^k \in R^k$ を C_1 の中に埋め込む写像

$$(2.7) \quad \phi^k: R^k \rightarrow C_1$$

と見なすことができる。従って、射影 $\pi^k: C_1 \rightarrow R^k$ 、すなわち、 $y(x) \in C_1$ を R^k の要素に

$$(2.8) \quad \pi^k y \equiv (y(x_{1k}), \dots, y(x_{kk}))$$

のように写す射影と組み合わせることにより、 T_f を近似する写像 T_k を

$$(2.9) \quad T_k(y) = \phi^k(\pi^k y)(x) \quad (\text{for } y \in C_I)$$

によって定義することができる。この T_k のことを T_f に対する (k 次)連続近似写像と呼ぶ。

逆に、 $\phi^k(\pi^k y)(x)$ を $\{x_{ik}\}$ の上で離散化すれば、即ち、

$$\pi^k(\phi^k(y^k)(x)) = (\phi^k(y^k)(x_{1k}), \dots, \phi^k(y^k)(x_{kk})) \equiv T^k y^k$$

とすれば、これは

$$(2.10) \quad T^k: R^k \rightarrow R^k$$

なる写像と考えることができる。ここでは、この T^k のことを T_f に対する (k 次)離散近似写像と呼ぶことにする。

ϕ^k は次の性質をもつ: 任意の $y^k \in R^k$ に対し、

性質 1. $\phi^k(y^k)(-1) = \phi^k(y^k)(1) = 0$,

性質 2. $\phi^k(y^k)''(x_{ik}) = f(x_{ik}, y_{ik})$,

(for $i=1, 2, 3, \dots, k$).

また、上で定義した写像、射影と空間の関係を図1に記す。

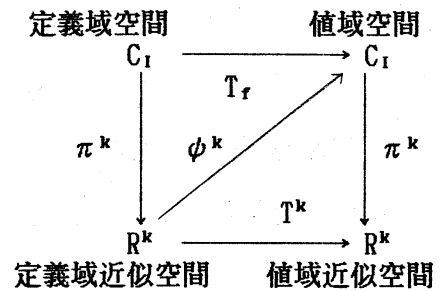


図1. 写像、射影と空間との関係 (T_f, T^k : 不動点問題の写像とその近似, π^k : 射影, ϕ^k : 埋め込み写像)

3. 埋め込み写像の性質

後の議論で必要となる埋め込み写像 ϕ^k に関連する関数族の基本的な性質を述べる。(2.6) 式で定義された $s_{ik}(x)$ ($i=1, 2, \dots, k$) を i 番目の成分にもつ k 次元ベクトル $s^k(x)$ とベクトル $f^k = (f_{1k}, \dots, f_{kk})$ との内積表示 $\langle s^k(x), f^k \rangle$ を

$$(3.1) \quad \langle s^k(x), f^k \rangle \equiv \sum_{i=1}^k s_{ik}(x) f_{ik}$$

と定義する。そのとき、 $f_{ik} = f(x_{ik}, y_{ik})$ であれば、 $\phi^k(y^k)(x) = \langle s^k(x), f^k \rangle$ である。

式(3.1)によって定義された関数の二三の性質を述べる。

命題 1. $k \geq 2$ は任意の整数とする。 $y^k \in R^k$ のノルムは $M_k < \infty$ とする。そのとき

$$\| \langle s^k, y^k \rangle \| \leq M_k L_k, \quad L_k \equiv [(k-1) / (2k-1)]^{1/2}. \quad \square$$

ここで、 $\| \cdot \|$ は $I = [-1, 1]$ での最大ノルムである。 \square

命題 2. $\{y^k \in R^k \mid k=2, 3, \dots\}$ が有界列なら、列 $\{\langle s^k(x), y^k \rangle \mid k=2, 3, \dots\}$ はノルムによる距離空間 C_I において相対コンパクトである。 \square

命題 3. $k \geq 2$. 任意の $h \in C^2 \subset C_I$ に対して, つぎが成り立つ:

$$\max_{x \in I} |h(x) - \langle s^k(x), \pi^k h'' \rangle| \leq \frac{M}{2\sqrt{k-1}} + \omega((k-1)^{-1/4})$$

ここで, C^2 は 2 階連続微分可能な関数からなる C_I の部分空間である. $\|h''\| \leq M$ なる定数 ω は h'' の連続率である.

命題 3 の証明: $h \in C^2$ とし, $r(x) \equiv h(x) - \langle s^k(x), \pi^k h'' \rangle$ とする. そのとき, $r(-1) = r(1) = 0$ であることから, 式 (2.2) の $g(x, u)$ を用いて, $r(x)$ は

$$r(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) (h''(u) - \langle s^k(u), \pi^k h'' \rangle) du$$

のように表現できる. $I = [-1, 1]$ の上での h'' に対するベルンスタイン多項式

$$B_k(u) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} h'' \left(\frac{2j-k+1}{k-1} \right) (u-1)^{k-1} (1-u)^{k-j-1}$$

はワイエルストラスの定理 [1] を満足する. 即ち

$$|h''(u) - B_k(u)| \leq \frac{1}{2\sqrt{k-1}} \|h''\| + \omega((k-1)^{-1/4})$$

(for all $u \in I$). ここで ω は h'' の連続率である. また, B_k の次数は $k-1$ 以下であることから,

$$B_k(u) = \langle s^k(u), \pi^k B_k \rangle$$

が恒等的に成立する. さて B_k のこの性質を用いて $r(x)$ はつぎのように書き直すことができる:

$$r(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) (h''(u) - B_k(u)) du - \langle s^k(x), \pi^k (B_k - h'') \rangle.$$

上式から $r(x)$ を評価する: 右辺の第 2 項に命題 1 を適用すれば, つぎの評価が得られる. 全ての $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} |r(x)| &\leq \left\{ \int_{-1}^1 |g(x, u)| du + L_k \right\} \max_{u \in I} |h''(u) - B_k(u)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + L_k \right) \left(\frac{M}{2\sqrt{k-1}} + \omega((k-1)^{-1/4}) \right) \leq \frac{M}{2\sqrt{k-1}} + \omega((k-1)^{-1/4}) \end{aligned}$$

ここで, $M = \|h''\|$, 任意の $k \geq 2$ に対し $L_k \leq \frac{1}{2}$. \square

4. 近似の特性

節2, 節3 の準備のもとで, 近似写像 T_k (2.9), T^k (2.10)の重要な特性を以下に述べる;
即ち, つぎのことを示す.

- (1) 連続近似写像 T_k と離散近似写像 T^k の不動点問題は等価である.
- (2) 各 $k > 3$ に対する T^k の不動点の存在は T_f の不動点の存在を意味する.
- (3) 逆に, T_f が不動点 y をもてば, $y^k \equiv \pi^k y$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分大きな k に対し, つぎが成立する;

$$\| T^k y^k - y^k \| \leq \varepsilon.$$

最初につぎの定理は(1)の性質を述べたものである.

定理 1. $k \geq 3$. \underline{p} が連続近似写像 T_k の不動点であれば, $\underline{y}^k \equiv \pi^k \underline{p}$ は離散近似写像 T^k の不動点である. 逆に, \underline{y}^k が T^k の不動点であれば, $\underline{p} \equiv \phi^k(\underline{y}^k)$ は T_k の不動点である.

証明 \underline{p} が T_k の不動点なら,

$$\underline{y}^k \equiv \pi^k \underline{p} = \pi^k(T_k \underline{p}) = \pi^k(\phi^k \circ \pi^k(\underline{p})) = \pi^k \circ \phi^k(\pi^k \underline{p}) = T^k(\underline{y}^k).$$

逆に, $\underline{y}^k \in R^k$ が T^k の不動点なら,

$$\underline{p} \equiv \phi^k(\underline{y}^k) = \phi^k(T^k(\underline{y}^k)) = \phi^k(\pi^k \circ \phi^k(\underline{y}^k)) = \phi^k \circ \pi^k(\phi^k \underline{y}^k) = T_k(\underline{p}).$$

定理 2. T^3, T^4, \dots を T_f の離散近似写像の列とし, $\{d_k > 0\}$ ($d = \sup_k d_k < \infty$) と $\{z^k \in \{0\} \times R^{k-2} \times \{0\}\}$ は有界列とする.

$$\underline{D} = \bigcup_{k=3}^{\infty} D_k, \quad D_k = \bigcup_{i=2}^{k-1} [z_i - d_k, z_i + d_k]$$

とし, D は \underline{D} を含む開区間とする. そのとき, $f \in F$ が条件,

- (i) 適当な定数 $L^* > 0$ に対して, $\forall y, z \in D$ に対し

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L^* |y - z|$$

- (ii) $f(x, y)$ は $I \times D$ の上で連続である,

を満たせば, つぎが有効である:

$$(1) \quad \|\phi^{k_s} z^{k_s} - z^\infty\| \rightarrow 0 \quad (\text{as } k_s \rightarrow \infty)$$

を満たす部分列 $\{z^{k_s}\} \subset \{z^k\}$ と $z^\infty \in C_I$ が存在する.

更に、そのとき

(2) 各 k_s に対し, T^{k_s} が閉球 $B[z_{k_s}: d_{k_s}]$ の中に不動点 y^∞ をもてば

$$\textcircled{1} \quad \| T_f y^\infty - \phi^{k_{s'}} y^{k_{s'}} \| \rightarrow 0 \quad (\text{as } k_{s'} \rightarrow \infty)$$

を満たす部分列 $\{y^{k_{s'}}\}$ と $y^\infty \in C_I$ が存在する.

$$\textcircled{2} \quad T_f \text{ の不動点 } y^\infty \text{ は } B[z^\infty: \lambda] \text{ に属す. } \lambda = 2^{1/2} L^* d.$$

ここで, $B[z^\infty: \lambda] = \{y \in C_I: \|y - z^\infty\| \leq \lambda\}$, $B[z_{k_s}: d_{k_s}] = \{y \in R^k: \|y - z\|_k \leq d_k\}$, そして $\|\cdot\|_k$ は R^k 空間での最大ノルムである.

証明

(1)について: 列 $\{z^k\}$ は有界. 命題2により $\|\phi^{k_s} y^{k_s} - z^\infty\| \rightarrow 0$ (as $k_s \rightarrow \infty$)

なる有界部分列 $\{z^{k_{s'}}\} \subset \{z^k\}$ と $z^\infty \in C_I$ が存在. 従って、(1)は明らか.

(2)の①について: (1)と同様に、 T^{k_s} の不動点の列 $\{y^{k_s}\}$ の中に $\|\phi^{k_{s'}} y^{k_{s'}} - y^\infty\| \rightarrow 0$ (as $k_{s'} \rightarrow \infty$) なる部分列 $\{y^{k_{s'}}\}$ と $y^\infty \in C$ が存在する. 従って、つぎを示せば十分である;

$$\| T_f y^\infty - \phi^{k_{s'}} y^{k_{s'}} \| \rightarrow 0 \quad (\text{as } k_{s'} \rightarrow \infty).$$

以下では、添字の繁雑さを避けるために、 $k_{s'}$ の代わりに k を用いる. $T_f y^\infty \equiv z_\infty$ とすれば

$z_\infty''(x) = f(x, y^\infty(x))$. この関係から $\phi^k(\pi^k y^\infty)(x) = \langle s^k(x), \pi^k z_\infty'' \rangle$ が得られ

$$T_f y^\infty - \phi^k y^k = \{z_\infty - \langle s^k(x), \pi^k z_\infty'' \rangle\} + \{\phi^k(\pi^k y^\infty) - \phi^k y^k\}$$

を得る. 従って,

$$\| T_f y^\infty - \phi^k y^k \| \leq \| z_\infty - \langle s^k, \pi^k z_\infty'' \rangle \| + \| \phi^k(\pi^k y^\infty) - \phi^k y^k \|^2$$

右辺第1項は $z_\infty \in C^2$ なので命題3により0に収束. 第2項は、 ϕ^k の線形性により

$$\| \phi^k(\pi^k y^\infty) - \phi^k y^k \| = \| \langle s^k, f^k(\pi^k y^\infty) - f^k(y^k) \rangle \| \text{ である. 従って}$$

命題1と条件(i), (ii)から,

$$\| \phi^k(\pi^k y^\infty) - \phi^k y^k \| \leq L^* \| \pi^k y^\infty - y^k \|_k L_k \rightarrow 0, \quad (\text{as } k \rightarrow \infty).$$

従って、 $y^k = T^k y^k = \pi^k(\phi^k(y^k)(x))$ であることから①の証明は終わる.

(2)の②について: ϕ^k の定義と命題1から

$$\| \phi^k y^k - \phi^k z^k \| = \| \langle s^k, df^k(y^k, z^k) \rangle \| \leq L^* \| y^k - z^k \|_k L_k$$

ここで、 $df^k(a, b) \equiv f^k(a) - f^k(b)$. $\| y^k - z^k \|_k \leq d_k \leq d$ と $L_k \leq 2^{1/2}$ ($k \geq 3$)

から, $\|\phi^k y^k - \phi^k z^k\| \leq 2^{1/2} L^* d \equiv \lambda$. 上式は任意の $k \geq 3$ で成立. 従って, 極限において, $\|y^\infty - z^\infty\| \leq \lambda$. \square

最後に, 性質(4)を述べるために, つぎの方程式を考える.

$$(4.1) \quad T^k(y^k) - y^k \equiv (0, H^{k-2}(z^{k-2}), 0) = 0$$

但し, $z^{k-2} \equiv (y_{2,k}, \dots, y_{k-1,k}) = (z_1, \dots, z_{k-2})$. そのとき, z^{k-2} が H の実零点であれば, 明らかに $y^k = (0, z^{k-2}, 0)$ は T^k の不動点である.

定理 3. $k \geq 3$. T^3, T^4, \dots を T_f の離散近似写像の列とし \underline{y} を T_f の不動点とする. y^k を $\underline{y}^k = \pi^k \underline{y} \equiv (0, z^{k-2}, 0)$ とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な $K > 0$ が存在し, K より大きな k に対し,

$$\|H^{k-2}(z^{k-2})\|_{k-2} \leq \varepsilon.$$

証明 : \underline{y} を T_f の不動点とすれば $\pi^k \underline{y}'' = f^k(\pi^k \underline{y})$. また T^k の定義から $T^k(\pi^k \underline{y}) - \pi^k \underline{y} = \pi^k \{s^k(x), \pi^k \underline{y}'' - \underline{y}\} = (0, H^{k-2}(z^{k-2}), 0)$. 従って, $\|H^{k-2}(z^{k-2})\|_{k-2} \leq \|\underline{y} - \langle s^k, \pi^k \underline{y}'' \rangle\| \quad (\equiv \varepsilon_k)$. そのとき, $\underline{y} \in C^2$ であることから, 命題 3 により

$$\varepsilon_k \leq \|\underline{y}''\| / (2(k-1)^{1/2}) + \omega((k-1)^{-1/4}).$$

ここで, ω は \underline{y}'' の連続率である. \square

5. 近似精度の改良

写像 T_f の不動点を近似するための手順を図 2 に示してある. 図には近似不動点を (近似空間の次元数の意味において) オーダーコントロールにより精度の改良を図るための方策が記されている. 即ち, 一つの近似不動点を得られたとし, この近似不動点を改良するために一度連続関数空間の中にそれを埋め込む. これは補間である. この補間された関数をより次元の高い近似空間に射影し, この空間での方程式を解くためのニュートン法の出発値として利用する. 初期近似をどの空間で行うかは与えられた問題によって異なる (節 6 参照) が, 本節では, 初期近似が適当な次元の空間で行われ, そして解かれたと仮定して, この方法による近似不動点の精度を改良することが可能となるための一つの条件を述べる. なお本節におけるノルム記号 $\|\cdot\|$ は, すべて R^{k-2} 空間におけるノルム (即ち, $\|\cdot\|_{k-2}$) の意味で用いる.

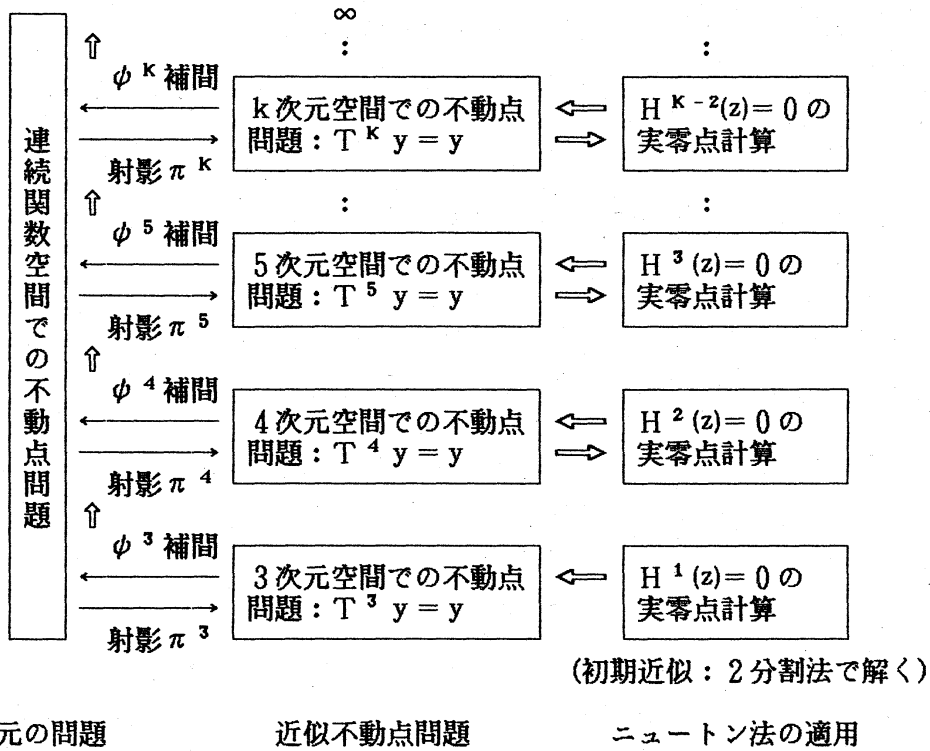


図 2. 近似精度の改良手順

(⇒: 出発値の提供, ⇐: 収束解の返還, ↑: 近似処理の空間の流れ)

(4.1) 式から, つぎを定義する.

$$(5.1) \quad F(w) = w - H^{k-2}(w) \equiv w - H(w) = 0, \quad w \in R^{k-2}.$$

このFを変形する. $y_0 = (0, w_0, 0)$ を射影によって得られた R^k 空間での近似不動点とする. この w_0 の点で F のヤコビアン $J(w_0; F) = [\partial F(w_0) / \partial w_0]$ は正則であるとする. 即ち J^{-1} の存在を仮定する. そのとき $J(w_0; F) x + F(w) = J(w_0; F) x$ から次の変形は有効である.

$$(5.2) \quad w = w - J(w_0; F)^{-1} F(w) = w - \begin{bmatrix} I & -\frac{\partial H(w_0)}{\partial w_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w - H(w) \end{bmatrix} \equiv G(w; w_0).$$

そのとき, この $G(w; w_0)$ を各 $w_0 \in R^{k-2}$ に対して, $G: R^{k-2} \rightarrow R^{k-2}$ なる写像と考える. まず, この写像 G の性質を以下に述べる. そのために次の条件を仮定する:

仮定 I. ある半径 $r > 0$ をもつ閉球 $B[w_0; r]$ において $\|H''\|_{k-2} \leq d$ を満たすような定数 $d > 0$ が存在する. すなわち, これはつぎの①, ②の二つの条件に等価である;

① $f(x, w) : w$ に関し 2 階偏微分可能

② 閉球上で $\|\partial f^k(w)/\partial w\| \leq d/L_k$, (f^k, L_k : 節3 を参照).

仮定 II. H のヤコビアンは w_0 の点で正則とする.

補題 1. $\alpha > 0$ は任意の実数とする. そのとき,

$$(5.3) \quad r \geq \alpha / (d \|J(w_0; F)^{-1}\|)^{-1} \quad (\text{say, } r_0)$$

であれば, $w \in B[w_0; r_0]$ において $\|\partial G(w; w_0)/\partial w\| \leq \alpha$. \square

証明: G の導関数を w_0 の点でのヤコビアンを用いて表現すると

$$\partial G(w; w_0)/\partial w_0 = (J(w_0; H))^{-1} \pi^k \langle s^k(x), D(w - w_0) \rangle$$

を得る. ここで, $D = \text{diag}(d_{ii})$, d_{ii} は

$$d_{ii} = \int_0^1 \left. \frac{\partial^2 f(x_{ik}, u)}{\partial u^2} \right|_{u=w_{ik}^* + \theta(w_{ik} - w_{ik}^*)} d\theta.$$

従って, 命題 1 と関数 $f(x, w)$ の仮定された条件を用いて, 上式のノルムをとれば,

$$\begin{aligned} \|\partial G(w; w_0)/\partial w_0\| &\leq \| (J(w_0; H))^{-1} \| L_k (d \|w - w_0\| / L_k) \\ &\leq \| (J(w_0; H))^{-1} \| d \|w - w_0\| \end{aligned}$$

を得る. また仮定により, $\|w - w_0\| \leq r_0$ であることから,

$$\|\partial G(w; w_0)/\partial w_0\| \leq d \| (J(w_0; H))^{-1} \| r_0 = \alpha. \quad \square$$

補題 2. α を $1 > \alpha > 0$ に取れば, 写像 $G : B[w_0; r_0] \rightarrow R^{k-2}$ は縮小因子 α を持つ縮小写像である. \square

従って, G に対し縮小写像原理が適用できる:

定理 4. G を $B[w_0; r_0]$ の上での縮小因子 $\alpha < 1$ をもつ縮小写像とする. w_0 に対し

$$(5.4) \quad r_0 \geq \|w_0 - G(w_0; w_0)\| / (1 - \alpha), \quad (\text{say, } r^*_0)$$

が有効であれば, そのとき次が成立する.

- (1) G は $B[w_0; r^*_0]$ の中に不動点 x^* もつ.
- (2) w^* は $B[w_0; r_0]$ において唯一である.
- (3) $\|w_m - w^*\| \leq \alpha^m r^*_0$, ここで, $w_{m+1} = G(w_m; w_0)$. \square

つぎの補題は 縮小写像 G とニュートン法の間 の関係 を述べたものである.

命題 4. $w_{n+1} = G(w_n; w_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$ は方程式 $F(w) = 0$ に対する

ニュートン法である。

以上の準備のもとで、カントロビッチのニュートン法に関する定理 (Rall, 定理22.5) を適用し、興味ある結果を得る:

定理 5. 与えられた w_0 に対し適当な $r > 0$ が存在し、 $G(w; w_0)$ が仮定 I, II を満たし、さらに

$$(5.5) \quad r \geq r_0 \geq r^*, \quad (\text{式(5.3), (5.4) 参照})$$

が成立しているとする。そのとき、 $G(w; w_0)$ が $B[w_0; r_0]$ の上の縮小因子 $\alpha < 1$ の縮小写像であれば、逐次式 $w_{n+1} = G(w_n; w_0)$, ($n=0, 1, 2, \dots$) による手続きは

(1) 方程式 $F(w) = w - H(w) = 0$ に対するニュートン法に関するカントロビッチの定理 (Rall, 定理22.5) の仮定を満足する。

更に、生成される列 $\{w_n\}$ に対して、

(2) w_n と w^* との差のノルムは:

$$(5.6) \quad \|w^* - w_n\| \leq (1 - \alpha) 2^{-(2^n + n - 2)} r^*$$

(3) $\{w_n\}$ の極限 w^* は閉球 $B[w_0; r_0]$ 上の縮小写像 $G(w; w_0)$ の不動点と一致する。

証明: カントロビッチの定理の仮定が満たされることをチェックするために次の(a)~(c)の評価を行う。

$$(a) \quad \| [F'(w_0)]^{-1} \| = \| [I - T'(w_0)]^{-1} \| = \alpha L_K / (d r_0) \equiv B_0$$

$$(b) \quad \| w_0 - w_1 \| = \| w_0 - G(w_0; w_0) \| = (1 - \alpha) r^* \equiv \eta_0$$

$$(c) \quad B[w_0; r] \text{ において, } \|F''(w)\| = \| -T''(w) \| \leq d/L_K \equiv K$$

とすれば、仮定の $r \geq r_0 \geq r^*$ と式(5.3), (5.4) から

$$\textcircled{1} \quad h_0 = \alpha(1 - \alpha)(r^*/r_0) \leq \alpha(1 - \alpha) \leq 1/4.$$

$$\textcircled{2} \quad r_0 \geq r^* \equiv \{1 - (1 - 2h_0)^{1/2}\} / h_0 = \chi r_0$$

が成立する。ここで、 $\chi = \alpha^{-1} [1 - \{(1 - 2\alpha(1 - \alpha)(r^*/r_0))^{1/2}\}^{-1}]$ 。そのとき、 $0 \leq \alpha \leq 1$ である。従って

(1)について: 補題3と上の(a)~(c), 及び①, ②のチェックにより明らか。

(2)について: $h_0 \leq 1/4$ であること的事实を利用すれば、(5.6)式は導かれる。

(3)について: (5.5)により定理4と(1)の主張により明らか. \square

この定理から, ある近似解から連続関数空間を経由する射影によって与えられる出発値 w_0 とその近傍である閉球 $B[w_0; r]$ 上で(5.3)満たされ, かつ $B[w_0; r_0]$ 上で(5.4)式が満たれるならば w_0 を出発値とするニュートン法により目標とする近似解の精度を向上させることができることが分かる. すなわち y^{k_s} を R^{k_s} 空間における T_f の不動点の一つの近似とするとき $(0, w_0, 0) = \phi^{k_s}(y^{k_s})$ からの w_0 が適当な r に対し式(5.5)を満たすようならば, y^{k_s} は w_0 を出発値とするニュートン法で R^k 空間で精度が改良される(但し, $k_s < k$). このことは初期近似に関連して重要である.

6. 初期近似と具体例

次元の低い空間にて初期値近似をおこない, そしてオーダーコントロールによって近似精度の向上を図る際に, つぎのような問題が起きる. すなわち T_f と T^k の不動点の数が対応しないことがある. 一般に, 次の3つの場合が起こり得る:

$$(1) \quad |T_f| < |T^k|, \quad (2) \quad |T_f| = |T^k|, \quad (3) \quad |T_f| > |T^k|$$

ここで, $|\cdot|$ は写像の不動点の数を表す. (1)は幻影的な近似不動点が現れていることになるがこの場合は, 通常, 近似次元の増加に伴って幻影的な近似不動点は消滅する. (2)は問題のない場合である. (3)はさらに2つに分類される. すなわち, 十分大きな k において(2)の状態に移る場合とそうでない場合とが起きる. この後者においては近似の実施は難しい. これらの各ケースについて, 具体例を示しながら議論する.

Case 1. $f \in F$ が $f(x, y) = y^3 + 39(x^2 - 1)y/10 + 5/12$ によって定まる写像 T_f の不動点問題 ($|T_f| = 1$) を考える. $k=3$ を初期近似の空間の次元として, この問題を解く. 即ち, (5.1)式に対応する方程式

$$H^1(z) = -5(z^3 - 39z/10 + 1/2)/12 - z = 0$$

を2分割法によって解く. この $H^1(z)$ の実零点は3つある:

$$z = -1.366, \quad 0.366, \quad 1.000$$

従ってこの場合, 幻影的な近似不動点が2つある. しかし $k \geq 4$ の場合は, $|T^k| = 1$ となる.

Case 2. $f \in F$ が $f(x, y) = -\lambda \exp(y)$ によって定まる問題について, 特に

$\lambda = -1/4$, $\lambda = 1/4$ の場合について考える. $\lambda = -1/4$ のとき $|T_f| = 1$, $\lambda = 1/4$ のとき $|T_f| = 2$ である. $k=3$ を初期近似を行う空間の次元としてこの問題を解く. 即ち

$$H^1(z) = \lambda(5e^z + 1)/12 - z = 0$$

を2分割法によって解く. $\lambda = 1/4$ の場合, $H^1(z)$ の実零点は2つあり, $\lambda = -1/4$ の場合は1つだけである. 実際, 2分割法の適用結果は次の通りである:

$$\lambda = -1/4 \quad (|T_3| = 1); \quad z = -0.1138,$$

$$\lambda = +1/4 \quad (|T_3| = 2); \quad z = 0.1407, \quad 3.5120.$$

Case 3. $f \in F$ が $f(x, y) = 3y^2/8 - 3(3x-5)y/8 + 3(3x-5)^2/32$ によって定まる写像 T_f の不動点問題 ($|T_f| = 1$) について考える. この問題に対し, $k=3$ で初期近似を行う. 即ち

$$H^1(z) = -5(z^2 + 5z + 159/20)/32 - z = 0$$

を2分割法で解く. この $H^1(z)$ は2つの実零点をもつ:

$$z = -0.746, \quad -10.653.$$

Case 4. $f \in F$ が $f(x, y) = (y^2 - x^2(x^2 - 1)^2)/20 - 12(y - x(x^2 - 1))/5 + 6x$ によって定

表 1. 実行結果

—	要求精度	達成次元 k	$\pi^3 \phi^k y^k \in \mathbb{R}^3$	絶対最大誤差	δ^{**}
ケース 1	5×10^{-6}	解① 11	(0, -1.3280157, 0)	7.7×10^{-7}	5×10^{-9}
ケース 2 $\lambda = -1/4$	5×10^{-6}	解① 9	(0, -0.1137036, 0)	3.8×10^{-7}	5×10^{-10}
$\lambda = 1/4$	5×10^{-4}	解① 15 解② 4	(0, 4.09115, 0) (0, 0.1404, 0)	9.0×10^{-5} 1.0×10^{-4}	1×10^{-6}
ケース 3	1×10^{-6}	解① 9 解② 16	(0, -0.7222220, 0) (0, -13.036222, 0)	2.0×10^{-7} 1.0×10^{-6}	1×10^{-9}
ケース 4	1×10^{-5}	解① 3 解② 9	(0, 0.000000, 0) (0, -1.586620, 0)	— *** 3.3×10^{-6}	1×10^{-9}

** : ニュートン法の収束判定パラメータ (補正分のノルムが δ 以下のとき収束とした)

*** : この解に対しては $k=3$ の連続近似不動点は厳密な不動点と一致する.

注 : 誤差評価は, 厳密解が既知なるものはそれを用い, 未知なる解は初期値問題に変換して数値的に解くことにより行った.

まる問題について考える。この問題は $|T_f| = 2$ である。しかし、 $k=3$ の空間で初期近似を行って問題を解くとき、 $|T_3| = 1$ である。実際、

$$H^1(z) = -z^2, \quad \partial H^1(z) / \partial z = -2z$$

であることから、 $z=0$ (重根) が唯一つ見出されるだけである。従って、 $k=3$ での初期近似では不完全である。このように重根の実零点の場合、その根が分離するまで初期近似を行う空間の次元を上げる必要がある。実際、 $k=4$ とすれば、対応する方程式 $H^2(z)$ の実零点として

$$z = (0.358, -0.358), \quad (-0.874, -1.573) \in \mathbb{R}^2$$

の2つを見つけ出すことができる。

以上のケースでは、分類に従って、ケース 1 と(1)、ケース 2, 3 と(2)、ケース 4 と(3)のような対応が成り立つ。そして、この何れのケースも5節で述べたオーダーコントロールの方法で近似の精度の向上を図ることで、要求した有効桁数をもつ不動点近似を成し遂げることができる。その結果を表1に記しておく。

つぎのケースは、分類(3)に属し、オーダーコントロールによって精度の向上を図ることの難しい問題である。

Case 5. $f \in F$ が $f(x, y) = -\lambda(y^3 + y)$ によって定まる写像 T_f の不動点問題について考える。この問題は、スケーリング因子 $\lambda > 0$ を適当にとることにより最大振幅が1以下となるような可算無限個の周期解をもつ。即ち、 $|T_f| = \infty$ である。一方、この離散近似写像 T^k の不動点の数は $|T^k| = 1 + 2(k-2)$, ($k \geq 3$), である。従って、すべての解を網羅する有限の次元での初期近似は不可能である。しかし、実際にはこのような問題に対して、すべての解を知ることが要求されることは少ない。本近似法によるこの問題に対する近似特性を述べると、まず、 $k=3$ のとき、自明な解 (ゼロ解) と2つの一周期解を近似する。次に、 $k=4$ のとき、それらの解の他にさらに2つの二周期解が近似される。さらに、 k の値の増加に対しても同様に近似されていく。従って、 k の値が大きくなるに従って、各不動点に対するニュートン法の収束領域は狭くなり、かつ複雑となり得る (図3以降の図を参照)。この結果は数値的不安定性を招き、一つの不動点に的を絞って近似を実行するにしても5節で述べた条件が満たされないことからオーダーコントロールによる近似精度の向上は不可能となる。

<ケース5の実行結果の検討> ケース5のような問題は、ニュートン法の適用に際してその収

束領域が非常に複雑な形状を露呈し、一般に安定に解くことの難しい一つの例である。実ユークリッド空間におけるこの収束領域において、ジュリア集合やカントール集合の図形パターンの出現がみられる。これについて少し詳しく数値結果を述べる。

(a) $\lambda = 2$ とし、 $k = 4$ の場合のニュートン法の大域的収束領域が図3に示されている。この図には $H^2(z)$ の実零点から得られる写像 T^4 の5個の不動点 ($X_i, i=1\sim 5$) の内、最初の4個の不動点に対する第2成分(横軸)と第3成分(縦軸)の座標が記されている。なお X_5 は X_4 の X_1 に対する点対称の位置にある。図のパターンはそれぞれの解 (T^4 の不動点) へのアクセス可能な領域(格子点のメッシュサイズ: 0.05×0.05) が「\$, 0, -, *, +」の5つの記号で表されている。図が細かいために判別しにくいが一見して収束領域の複雑性を理解することができる。図4は X_1 の近傍を抽出したものである。「0」はゼロ解、「1」と「9」は1周期解(互いに符号反転対称)、「2」と「8」は2周期解(互いに符号反転対称)に収束する点を表している。図5は図4の中の A_1 と記された領域を更にメッシュを10倍細かくして収束領域を調べたものである。図4と図5のパターンの類似性に興味をもつ。同様の繰り返しとして、図6は図5の A_2 の部分の10倍拡大(メッシュサイズ: 0.0005×0.0005) である。また、図7は図6の A_3 の部分の50倍拡大である。何れの図もパターンは類似している。 X_1 への収束領域の境界にジュリア集合が見られ、またその領域に右下向から接近する双曲状の(「2」と「8」の)帯が互いに入り組んでいる。これはカントール集合のパターンである。

また、図3の中での B_1 と C_1 の部分の拡大をそれぞれ図8、図9に示す。

(b) つぎに、 $\lambda = 2$ とし $k = 5$ の場合の大域的収束領域を図10に示す。但し、この図は T^5 の不動点を計算するために用いられる $H^3(z_1, z_2, z_3) = 0$ に対するニュートン法の収束領域を $z_1 = 0$ でスライスしたものである。 $k = 4$ のパターン図形(図4)に似ていることに気づく。なお図中の「3」と「7」は3周期解(互いに符号反転対称)への収束領域を表している。

(c) さらに、 $k = 5, 6, \dots$ においても類似のパターン図形が出現する。

(d) k が大きいとき、多くの不動点が原点付近に密集するために、僅かな振れが異なる解への収束を引き起こす。従って、大きな k では例え出発値の精度が良くても近似の改良をもくろんだ不動点と異なる不動点を近似する解に収束してしまう(数値的不安定)。

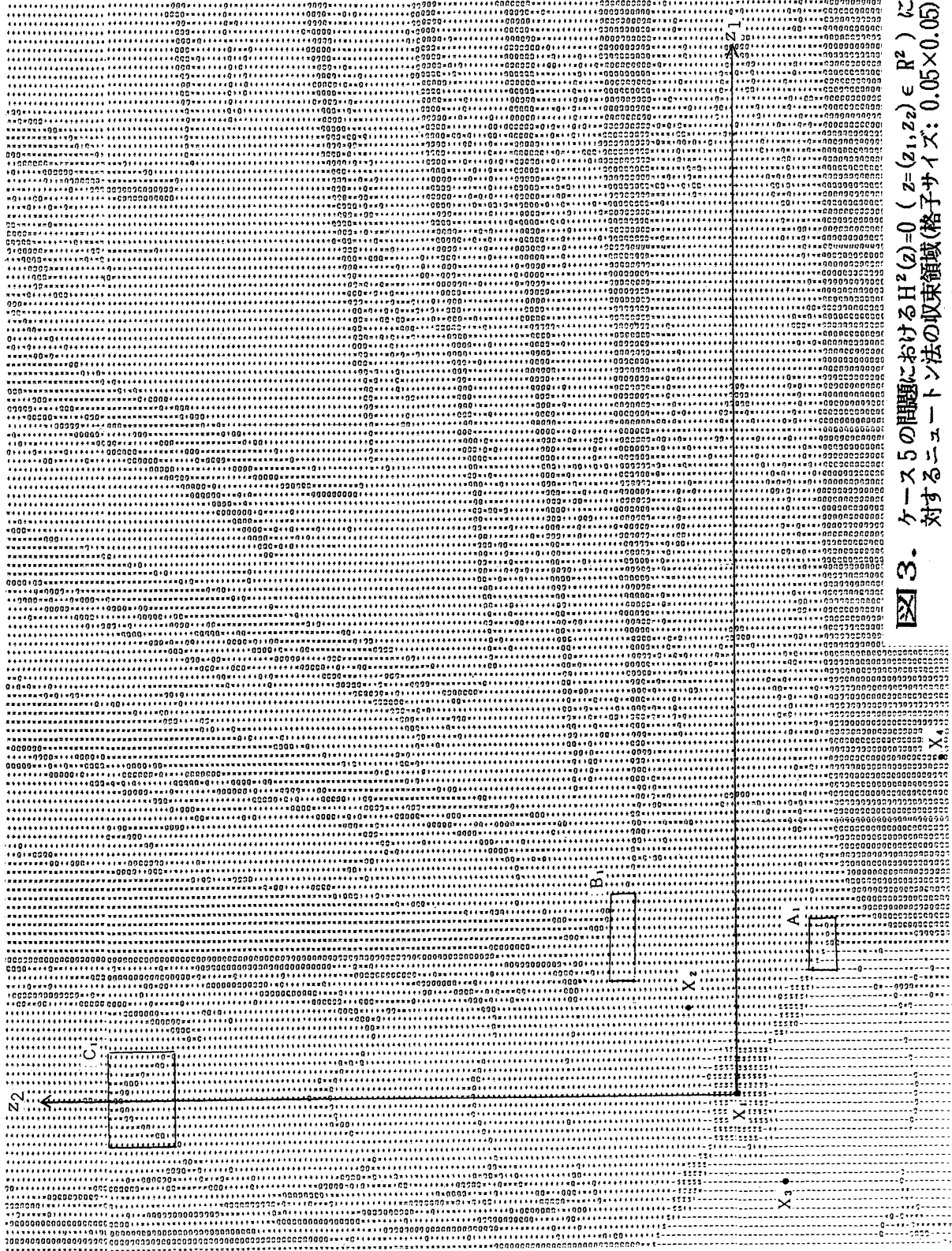


図3. ケース5の問題における $H^2(\Omega) = 0$ ($\nu = (z_1, z_2) \in R^2$) に
 対するニュートン法の収束領域(格子サイズ: 0.05×0.05)

1.15

0.95

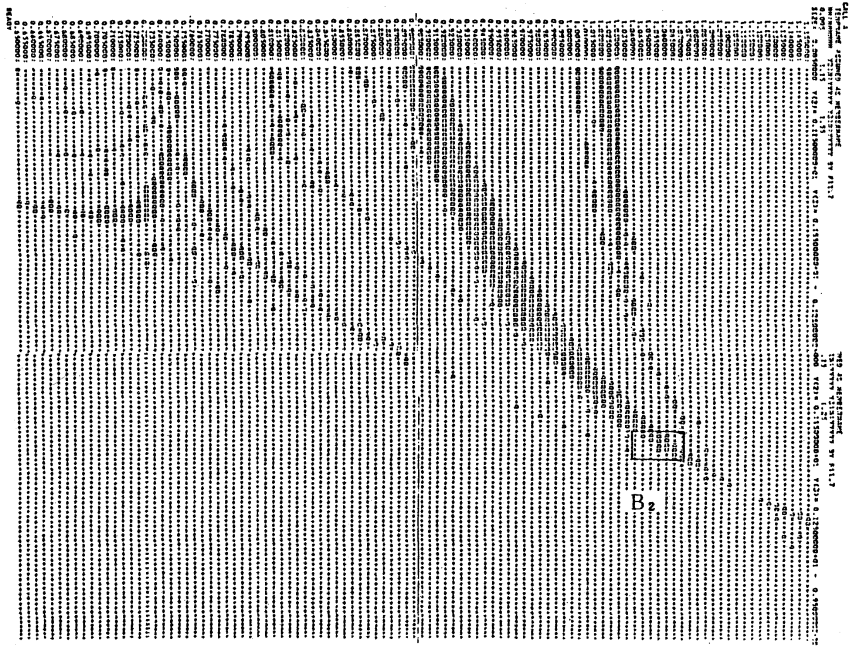


図 8. B₁ の領域の10倍拡大図(格子サイズ: 0.005×0.005)

6.1

5.4

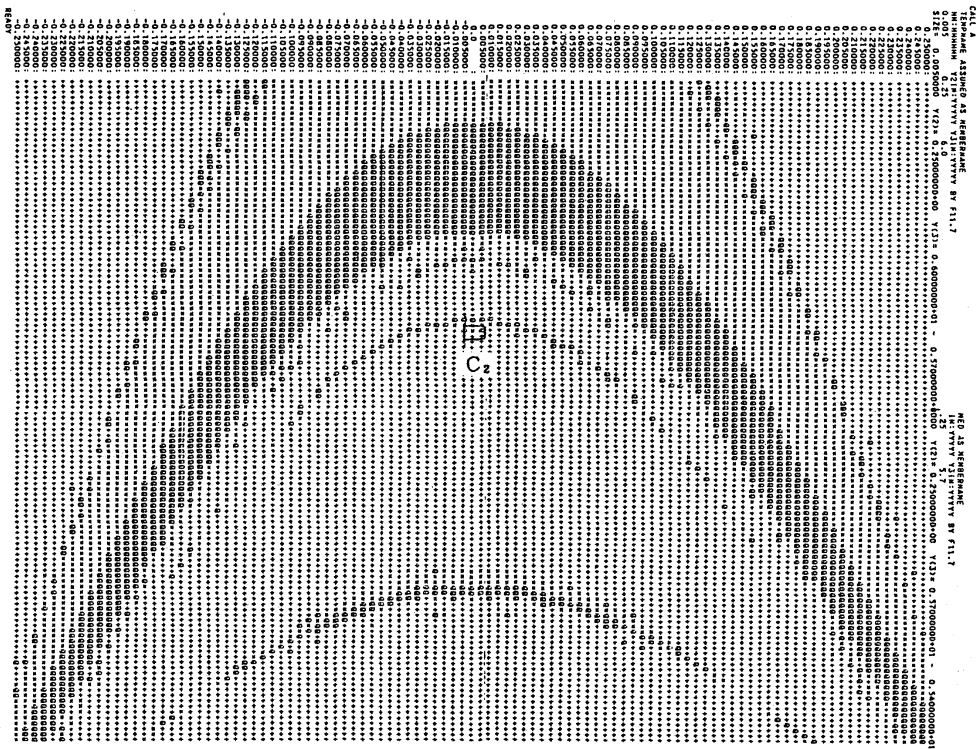


図 9. C₁ の領域の10倍拡大図(格子サイズ: 0.005×0.005)

方法だけの問題ではない。実際、この問題に対して通常の差分法を適用しても<ケース5の実行結果の検討>で述べたようなことは起きる。

第2の立場から、つぎのことを要約する；

(1) 与えられた不動点問題の解の個数をカウントするための一つの手段を本方法は提供している。しかし、全ての解をカウントすることはできない。なお、実際上からは、必要とする解の存在領域を限定することは可能である。

(2) 数学的観点から、解の個数を数値的結果に基づき評価できる条件を明らかにすることは興味ある。

最後に、本テーマで取り上げたような複数個の解を求めることを必要とする実際的な問題について一つの例を述べておく。例えば、地球から海王星（月でもよい）までの慣性航行による宇宙旅行を考えると、その経路は複数個存在する。これは近未来の実際的な問題となろう。

謝辞： 本研究の機会を与えて下さった当研究所北川敏男会長に深謝する。

参考文献

- [1] C. W. Cyer: Numerical Functional Analysis, Oxford University Press, 1982.
- [2] G. W. Reddien: Projection Methods for Two-Point Boundary Value Problems, SIAM J Review, Vol.22, No.2, April, 156-171, 1980.
- [3] T. R. Lucas and W. G Reddien: Some Collocation Method for Boundary Value Problems, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol.19, No.2, 341-356, 1972.
- [4] R. D. Russell & L. F. Shampine: A Collocation Method for Boundary Value Problems, Numer. Math., 19, p.1-28, 1972.
- [5] E. Houstis: A Collocation Method for Systems of Nonlinear Ordinary Equations, J. Math. Anal. Appl., Vo.15, No.1, 24-37, 1978.
- [6] H. Keller: Approximation Method for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problema, Math. Comp., Vol.29, No.130, 464-474, 1975.
- [7] C. Suzuki: Some Poised Lacunary Interplation Polynomials, JIP, Vol.5, No.1, 38-44, 1982.
- [8] L. B. Rall: Computational Solution of NonlinerOperator Equations, John Wiley & Sons, 1969.
- [9] J. H. Ahlberg and T. Ito: A Collocation Method for Two-Point Boundary Value Problems, Math. Comp., Vol.29, No.131, 761-776, 1975.
- [10] F. B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1956.