

ランク落ちのある正規方程式の諸解法結果の比較法

図書館情報大学 村田 健郎

1 はじめに： $n \times m$ の行列 $A = (a_1, \dots, a_m)$ に関する正規方程式

$$A^T(Ax - b) = 0 \quad (n \geq m) \quad (1)$$

の、 $\text{rank}(A) = r < m$ 、あるいは a_j 、 $j=1, \dots, m$ の中に '殆んど一次従属な' ベクトルがあるとき、通常は列選択付きのハウスホルダ変換による方法が推奨されている。¹⁾しかし現実には '実際に $A^T A$ を作って' ガウスの消去法の系統の算法によるという古典的方法が各方面でまだ多用されている。

$A^T A$ ガウスによって一次従属と判定されたベクトルをとり除いた r_g 次元の問題：

$$A_g^T A_g x_g = A_g^T b$$

の解 x_g と、列選択付きハウスホルダによる QR 分解からの

$$R_h x_h = Q_h^T b$$

の解 x_h とを、 $\|x_g - x_h\|_2$ で見たのでは甚だしい相異を示すことが多い。しかし x_g とて最小二乗解という立場からすればそれなりに真理を語っている筈だから、両者の合理的な比較法について考えたい。それがこの報告の主部である。

ところで、列選択付きハウスホルダによる方法は、ページワップの負担が大きいため、単なる上階段化ハウスホルダで、実用的に代用できないかについても調べたい。

2 DHOUSE (基準として使う列選択ハウスホルダ)

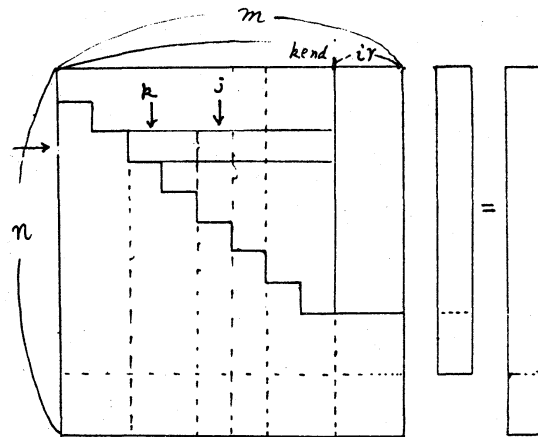
```
subroutine DHOUSE ( iter, n, m, eps, a, b, JP, JQ, diag, kend, iy)
```

```
dimension a(n,m), b(n), JP(m), JQ(m), diag(m)
```

```

iy = 0
do k = 1, m
  JP(k) = k, jQ(k) = k, diag(k) = 0.0
do k = 1, m
  smax = 0.0
  do j = k, m
    S =  $\sum_{i=k}^n a(i,j)**2$ 
    if S > smax then
      smax = S ; jpk = j
  JP(k) = JP ; sigma = sqrt(smax)
  if jpk ≠ k then
    JQ(k) = JQ(jpk)
    do i = k, n
      a(i,k) = a(i,jpk)
  if sigma > eps then
    h = sigma * (sigma + abs(a(k,k)))
    alfa = 1.0/h
    if a(k,k) < 0.0 sigma = -sigma
    a(k,k) = a(k,k) + sigma
    diag(k) = -sigma
    do j = k+1, m
      S =  $\sum_{i=k}^n a(i,k) * a(k,j)$ 
      as = alfa * S
      do i = k, n
        a(i,j) = a(i,j) - as * a(i,k)
      S =  $\sum_{i=k}^n a(i,k) * b(i)$ 
      as = alfa * S
      do i = k, n
        b(i) = b(i) - as * a(i,k)
      a(k,k) = diag(k) { 臨時. 出力プリントを見易くするため }
  else
    iy = m - k + 1 ; go to 1000
1000 kend = m - iy { kend は Rank(A) をあらわす }
do k = kend+1, m { ここから後退代入 }
  b(k) = 0.0
do k = kend, 1, -1 { j を m まで, という点が大切 }
  do j = k+1, m
    b(k) = b(k) - a(k,j) * b(j)
  b(k) = b(k) / diag(k)
  if JP(k) ≠ k then
    b(k) = b(JP(k))
return ; end

```



3 ガウス GAUSSO : ここで使うガウスとしては、 対角上軸選択の対称ガウス

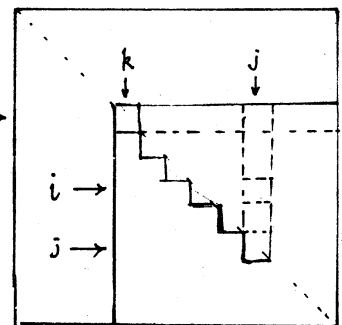
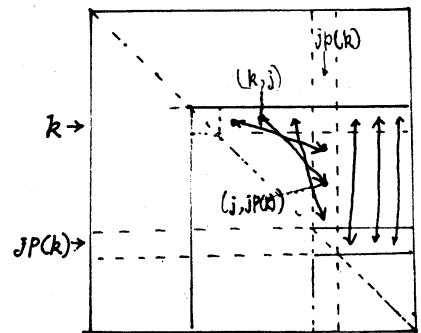
がよい。軸選択なしの対称ガウスは、ランク判定能力、精度
どちらも甚だ劣る。

SUBROUTINE GAUSSO(iter, m, eps, a, b, JP, JQ, piv, kend, ir)
dimension a(m,m), b(m), JP(m), JQ(m), piv(m),
implicit real*8 (a-h, o-z)

```

ir = 0
do k = 1, m
  JP(k) = k, JQ(k) = k, piv(k) = a(k,k)
do k = 1, m
  amax = piv(k)
  do i = k+1, m
    if piv(i) > amax then
      JP(k) = i ; amax = piv(i)
  if (amax > eps) then
    if JP(k) ≠ k then
      piv(k) = piv(JP(k))
      do j = JP(k)+1, m
        a(k,j) = a(JP(k), j)
      do j = k+1, JP(k)-1
        a(k,j) = a(j, JP(k))
      b(JP(k)) = b(k) ; JQ(k) = JQ(JP(k))
    do j = k+1, m
      t = -a(k,j) / piv(k)
      do i = k+1, j-1
        a(i,j) = a(i,j) + t * a(k,i)
      piv(j) = piv(j) + t * a(k,j)
      t = -b(k) / piv(k)
      do i = k+1, m
        b(i) = b(i) + t * a(k,i)
    else
      ir = m - k + 1 ; goto 1000
1000 kend = m - ir
  do k = kend+1, m
    b(k) = 0.0
  do k = kend, 1, -1
    do j = k+1, m
      b(k) = b(k) - a(k,j) * b(j)
    b(k) = b(k) / piv(k)
    if JP(k) ≠ k then
      b(k) = b(JP(k))
  return ; end

```



4 DHOUSE と GAUSSO について.

後の議論のため必要となる事項を(周知のことも含めて)列挙しておく. 言葉の節約のため $\text{rank}(A) = r = m$ とし, また $JP(k) = k$ のまゝ仕事が終るよう a_1, \dots, a_m がならべてあるとする. まず $A = QR$, $R = Q^T A$ から R の (i, j) 要素 r_{ij} は,

$$\bullet \quad r_{ij} = q_i^T a_j \quad (\text{即ち } a_j \text{ を } q_i \text{ に正射影したもの}) \quad (4)$$

である. また k 段実行直前の各 a_j の k 行以下のベクトルの長さが $\sigma_k = |r_{kk}|$ 以下, 従って直交変換の k 段を実行後のこの部分ベクトルの長さも然りということになって,

$$\bullet \quad |r_{kj}|, j > k \text{ はすべて } \sigma_k \text{ 以下, また } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \quad (5)$$

である. 次に $A^T A$ を作ってのち $A^T A$ に GAUSSO を行うときも

$$\bullet \quad \text{piv}(k) > |(A^T A)_{kj}^{(k)}|, j > k \quad (6)$$

である. (対称正定値行列 $B (= A^T A)$ の対角項 $b_{ii} = a_i^T a_i$ はすべて正, $b_{ij} = a_i^T a_j$ の絶対値の最大は対角上にある, 各 k 段で $b_{kk} (> 0)$ を軸とするガウスによる消去後の行列が再び対称正定値であるという周知の事実から容易に証明できる.)

• 次に DHOUSE の列交換 $JP(k)$ と GAUSSO の $JP(k)$ とは理論的には同じになることが示される: $JP(1)$ が両者一致することは明らかである. $JP(2)$ については, 何れの場合も, a_2, \dots, a_m から直交化によって a_1 成分をぬきとったベクトル $a_j - \bar{a}_1 p_j$ (但し $p_1 = \|a_1\|_2$, $\bar{a}_1 = a_1/p_1$, $p_j = \bar{a}_1^T a_j$) への a_j の正射影のうち最大なものを第 2 列とすることから確める:

(証) DHOUSE については明らか, GAUSSO については,

$$b_{i,j}^{(1)} = b_{i,j} - b_{i,1}b_{1,j}/b_{1,1} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j - (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_j)/\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1$$

と書いてみると、 $b_{j,j}^{(1)}$, $j \geq 2$ のうち最大なものを $b_{2,2}^{(1)}$ にとって来ると
いうことは、もとの A について言えば $\forall j \geq 2$ について

$$\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2)/\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \geq \mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j - (\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_j)/\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1,$$

このことは、 $\bar{\mathbf{a}}_1 := \mathbf{a}_1/\rho_1$, $\rho_j := \bar{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{a}_j$ とおいたとき、

$$\mathbf{a}_2^T (\mathbf{a}_2 - \bar{\mathbf{a}}_1 \rho_2) \geq \mathbf{a}_j^T (\mathbf{a}_j - \bar{\mathbf{a}}_1 \rho_j)$$

を示している。■

計算機の丸め誤差の違いによって実際には若干の喰い違いは
みられる。(後で示すデータシート参照)

- また理論的には DHOUSE による $\text{diag}(k)$ と GAUSSO による $\text{piv}(k)$ の間には

$$(\text{diag}(k))^2 = \text{piv}(k) \quad (7)$$

が成り立つ。($\because A = QR$, $A^T A = R^T R$, $A^T A = LU$ から当然)

このことから例えば $\text{diag}(k) = 10^{-9}$ のとき $\text{piv}(k) = 10^{-18}$ と
なって GAUSSO においてはランク落ちと判定される。

— ガウスがわるいのでなく $A^T A$ を作るのがわるいのだが—

- $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ の中で $\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_r}$ が一次独立のとき、

$$A^T A = (b_1, \dots, b_m), \text{ 但し } b_k = (\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_m^T \mathbf{a}_k)^T$$

を作ると、 b_{p_1}, \dots, b_{p_r} が一次独立となり、逆も成り立つ。こ
のことから

「 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が一次独立で \mathbf{a}_{k+1} がそれらの一次結合」

\Rightarrow 「 b_1, \dots, b_k が一次独立で b_{k+1} がそれらの一次結合」

が示される。

さて、 $r = m$ 次元の問題：

$$A^T(Ax - b) = 0, \text{ 即ち } Rx = Q^T b \text{ の解 } x \in R^m \quad (7)$$

と、粗い eps2 による $r_2 (< r)$ 次元の問題：

$$\tilde{A}^T(\tilde{A}\tilde{x} - b) = 0, \text{ 即ち } \tilde{R}\tilde{x} = \tilde{Q}^T b \text{ の解 } \tilde{x} \in R^{r_2} \quad (8)$$

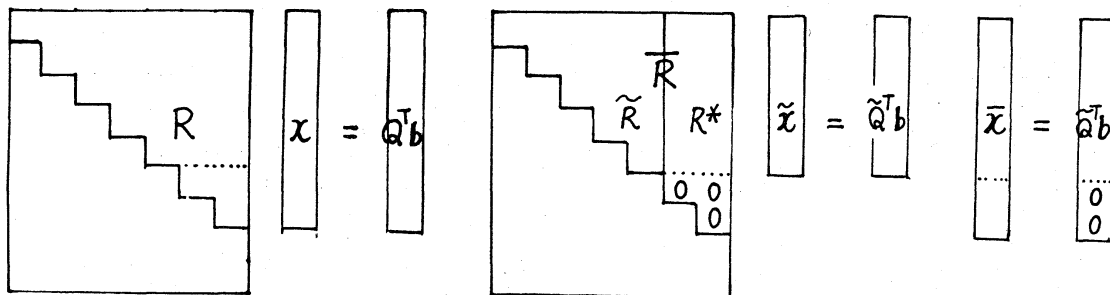
とを合理的に比較するため、仲介役として中間的な問題：

$$\bar{R}\bar{x} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^T b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow r_2 \\ * \\ \downarrow m-r_2 \end{matrix}, \text{ 但し } \bar{R} \text{ については下図参照 } \quad (7.5)$$

を考える。これは m 次元空間の中の階数 $r_2 < m$ の問題である。

このとき次のように言うことができる：

\tilde{x} に、ゼロを $m - r_2$ 個追加した m 次元ベクトル $\bar{x}^{(0)} = (\tilde{x}, 0)^T$ は m 次元の問題 (7.5) の一般解 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r_2}, \bar{x}_{r_2+1}, \dots, \bar{x}_m)^T$ のなかの、 $\bar{x}_{r_2+1}, \dots, \bar{x}_m$ をゼロと指定した特解である。



さて $A^T A$ - ガウスによってそのランク r_g を判定し、一次従属と判定されたベクトルをとり、のぞいた問題 $A_g^T A_g x_g = A_g^T b$ を解いたとする。その後、 A_g を改めて DHOUSE によって QR 分解して $R_g x_h = Q_g^T b$ を解く。DHOUSE による (7) の解 x_{ho} とし、

$$\|b - Ax_{ho}\|_2, \|b - A_{r_g} x_g\|_2, \|b - A_{r_g} x_h\|_2, \|x_g - x_h\|_2$$

などを比較すればよい。 $\|x_g - x_{ho}\|_2$ を見るのは通常無意味である。(6章のデータ例えは11頁, および20頁項番1)を参照されたい。

5 テストプログラムの概要. (すべて REAL*8 (2倍精度))

テスト行列 $A(N, M)$ と $b(N)$ を作成

(今回は $N=20, M=20$ のものについて行なう)

$\|A\|_2$ を概算 (今回は ATA に対するべき乗法 3 反復にて概算)

$$eps = 0.222 \times 10^{-15} \times \|A\|_2 ; A_1 = A ; b_1 = b$$

call DHOUSE (0, N, M, eps, A₁, b₁, JP, JQ, DIAG, KEND, IR)

(計算機 eps 一杯の精度にて問題をとく. 解 x_{ho} が b_1 に.)

$\|A^{-1}\|_2$ を概算 (QR分解結果 R を使い逆反復法にて $\|(R^T R)^{-1}\|_2$ を概算)

$$Cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 ; \|b - Ax_{ho}\|_2 \text{ を計算 (プリント)}$$

$$eps = 0.5 * DIAG(KEND) \quad (\text{問題に合わせて } eps \text{ を設定})$$

{これから異なるプログラムによる結果の比較}

do iter = 1, 4 (iter が進むにつれ eps を粗くし、多くのランク
落ちを起させる)

$$A_1 = A ; b_1 = b$$

ここに供試プログラムを置く. 例えば GAUSSO をテストする
ときは、 $B = ATA_1, b_2 = ATb_1$ を作って

call GAUSSO (iter, M, eps, B, b₂, JP, JQ, PIV, KEND, IR) {*

得られた解 x_g (b_2 に変つ) につき $\|b - A_g x_g\|_2$ を計算.

$$b_3 = b$$

{上の結果ランク落ちとされた $a_{p_1}, \dots, a_{p_{ir}}$ をゼロ化した A_2
を作り、 A_2 に対し再び DHOUSE を行なう: }

call DHOUSE (iter, N, M, eps, A₂, b₃, JP, JQ, DIAG, KEND, IR)

得られた解 x_h (b_3 に変つ) につき $\|b - A_g x_h\|_2$ を計算

$\|x_g - x_h\|_2, \|x_g - x\|_2, \|x_h - x\|_2$ を計算 (但し x は真の解)

$eps = eps * 100$ { GAUSSO をテストするとき, 100 を使う}

{*} 後(ほぼ)上階段化ハウスホルダ HOUSEO をテストするときはこちらにおく.

テストに供したAとb

A: ニ通りの行列についてだけ示す: GAUSSO のテストには、下記の行列の () のないものを使用, OHOUSE (後述) のテストには () っきのものを使用した。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	-1				(10)														
2	-1	2	-1			(-10)														
3		-1	2	-1																
4			-1	2	-1															
5				-1	1+ε1	-ε1														
6	(-10)			-ε1	1+ε1	-1														
7	(20)(-10)					-1	2	-1												
8	(-10)(20)						-1	2	-1											
9		(-10)						-1	2	-1										
10								-1	1+ε2	-ε2										
11									-ε2	1+ε2	-1					10(1+ε2)				
12										-1	2	-1				-10				
13											-1	2	-1							
14												-1	2	-1						
15													-1	1+ε3	-ε3					
16														-ε3	1+ε3	-1				
17																-1	2	-1		
18																	-1	2	-1	
19																		-1	2	-1
20																			-1	1+ε4

b: ICASE = 1, 3, 8 の三通り. それぞれ下記の正解を先に与えて $b := Ax$.

ICASE = 1

1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
---	----	---	----	---	---	----	---	----	---	---	----	---	----	---	---	----	---	----	---

ICASE = 3

0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

ICASE = 8

0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0
---	---	---	----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	---

IPUTUB (右辺 b に与える擾動) : $\varepsilon = 10^{-6}$ とし (プリンタ出力 EPSY)

IPUTUB = 1 の場合 : + 方向ばかりの擾動ゆえ、大きな δx をひきおこす。

0	0	+ ε	0	0	0	0	+ ε	0	0	0	0	+ ε	0	0	0	0	+ ε	0	0
---	---	-----------------	---	---	---	---	-----------------	---	---	---	---	-----------------	---	---	---	---	-----------------	---	---

IPUTUB = 3 の場合 : +, - 交互の擾動ゆえ、 δx は比較的小さい筈。

0	+ ε	0	- ε	0	0	+ ε	0	- ε	0	0	+ ε	0	- ε	0	0	+ ε	0	- ε	0
---	-----------------	---	-----------------	---	---	-----------------	---	-----------------	---	---	-----------------	---	-----------------	---	---	-----------------	---	-----------------	---

行列 A の特徴

ICASE = 1, 3 用 : 5本一組の列ベクトル毎に $i = 1, 2, 3, 4$ の順に ε_i を与え、DHOUSE によるとき約 $0.4 \times \varepsilon_i$ のオーダーのランク落ち判定用 eps によってランク落ちが起るよう作ってある。(GAUSSO によるときは約 $0.16 \times (\varepsilon_i)^2$)

例えば $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-3}$, $\varepsilon_3 = 10^{-2}$, $\varepsilon_4 = 10^{-1}$ のとき、 $\text{eps} = \text{約 } 0.16 \times 10^{-8}$ にて GAUSSO では a_1 が落ちる。この行列のノルム、条件数は、

$$\|A\|_2 \doteq 3.6, \|A^{-1}\|_2 \doteq 0.56 \times 10^5, \text{cond}(A) \doteq 2 \times 10^5$$

ICASE = 8 用 : 非対称行列である。 $\varepsilon_1 = 10^{-11}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$, $\varepsilon_3 = 10^{-9}$, $\varepsilon_4 = 10^{-8}$ のとき、 $\|A\|_2 \doteq 32.0$, $\|A^{-1}\|_2 \doteq 0.35 \times 10^{14}$, $\text{cond}(A) \doteq 1.1 \times 10^{15}$

右辺 b の特徴

ICASE = 1 用 : A の最高次の固有ベクトルに近い。従って、右辺の擾動に対応する解の擾動が特に大きい。(丸め誤差に対しても強制的擾動に対しても)

ICASE = 3 用 : 上記ほどではないが、やはり A の高次の固有ベクトル成分を濃厚に含む。また解ベクトル x の \underline{x}_1, x_5 ; \underline{x}_6, x_{10} ; ... がゼロになっていることと、これらに対応する $a_1; a_6$; ... が順にランク落ちを起すよう仕組んである。そのため、ランク落ちを起した場合の $A_g^T A_g \bar{x}_g = A_g^T b$ の特解を、正解や、DHOUSE による準正解と比較し易い。

ICASE = 8 用 : やはり A の高次の固有ベクトル成分を濃厚に含む。(また解ベクトル x の x_8, x_{18} 成分がゼロになっていて、DHOUSE によるランク落ちの順 a_8, a_{18} に適合させてある。)

6 GAUSSO のテスト例

$$EPS1, 2, 3, 4 = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$$

$$\|A\|_2 = 3.62, \|A^{-1}\|_2 = 0.562 \times 10^6, \text{Cond}A = 2.03 \times 10^6$$

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0

, ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

```

***** GAUSS *****
      JP(K)      JQ(K)      PIV(K)      SOLUTION
1         2         2      0.6000000000000000D+01      0.99999989358180152D+00
2         7         7      0.6000000000000000D+01      -0.10000001064164061D+01
3        12        12      0.6000000000000000D+01      0.99999989358717838D+00
4        17        17      0.6000000000000000D+01      -0.10000001064074446D+01
5         9         9      0.5833333333333333D+01      0.99999989359972465D+00
6        14        14      0.5833333333333333D+01      0.99999998321323516D+00
7        17         4      0.5833333333333333D+01      -0.10000000167766281D+01
8        19        19      0.5833333333333333D+01      0.99999998323468402D+00
9        12         3      0.14285714285714288D+01      -0.10000000167528282D+01
10       13        13      0.14285714285714288D+01      0.99999998326083413D+00
11       18        18      0.14285714285714288D+01      0.99999999809772833D+00
12       19         8      0.14285714285714288D+01      -0.10000000018871744D+01
13       20        20      0.1460000000000000D+00      0.99999999812818187D+00
14       15        15      0.10408684931506861D+00      -0.10000000018562034D+01
15       20        10      0.10040080798121710D+00      0.99999999815966736D+00
16       19         5      0.10004000800799605D+00      0.99999999977223128D+00
17       19        16      0.17903910006686519D-02      -0.10000000002116050D+01
18       18        11      0.18567245818392145D-04      0.9999999980459450D+00
19       20         6      0.19709905158712137D-06      -0.10000000001791727D+01
20       20         1      0.15998547585863385D-08      0.99999999983709036D+00
    
```

***** HOUSEHOLDER *****

```

      JP(K)      JQ(K)      PIV(K) ... DIAG(K)のこと.      SOLUTION
1         2         2      0.24494897427831779D+01      0.100000000000048845D+01
2         7         7      -0.24494897427831779D+01      -0.99999999999511535D+00
3        12        12      -0.24494897427831779D+01      0.100000000000048848D+01
4        17        17      -0.24494897427831779D+01      -0.99999999999511391D+00
5         9         9      -0.24152294576982396D+01      0.100000000000048863D+01
6        14        14      -0.24152294576982396D+01      0.10000000000007661D+01
7        19        19      -0.24152294576982396D+01      -0.99999999999923464D+00
8        17         4      0.24152294576982392D+01      0.10000000000007645D+01
9        13        13      0.11952286093343936D+01      -0.99999999999923610D+00
10       18        18      0.11952286093343936D+01      0.10000000000007632D+01
11       17         8      0.11952286093343931D+01      0.10000000000001155D+01
12       12         3      0.11952286093343931D+01      -0.99999999999988551D+00
13       20        20      -0.38209946349085580D+00      0.10000000000001132D+01
14       15        15      -0.32262493597840251D+00      -0.99999999999988709D+00
15       18        10      0.31686086533558674D+00      0.10000000000001119D+01
16       20         5      0.31629101790597239D+00      0.1000000000000182D+01
17       20        16      -0.42313012190907083D-01      -0.9999999999998232D+00
18       20        11      -0.43089727102294077D-02      0.1000000000000158D+01
19       20         6      0.44395838852121053D-03      -0.9999999999998510D+00
20       20         1      0.39998178684218635D-04      0.1000000000000133D+01
    
```

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

```

||Ax_ho||_2 = ||x_ho|| HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :      0.33820826609804603D-14
||y_g|| GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :      0.48273131373782683D-11
||x_h|| HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :      0.33820826609804603D-14
||x_h - x_g||_2 HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :      0.24092479717969869D-06
||y_g - x||_2 = ||delta x_g|| GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :      0.24091373761466364D-06
||x_h - x||_2 = ||delta x_h|| HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :      0.11059755467616533D-10
    
```

♪ ひとこと: (1) GAUSS による JP(K), JQ(K) と HOUSEHOLDER による JP(K), JQ(K) とは、PIV(K), DIAG(K) の内容を見ると、実質的に同じである。

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0

, ITER : 2 , EPS : 0.159985D-07

```

***** GAUSS *****
      JP(K)      JQ(K)      PIV(K)      SOLUTION
1         2         2      0.6000000000000000D+01      *** 0.0
2         7         7      0.6000000000000000D+01      -0.19999822000211718D+01
3        12        12      0.6000000000000000D+01      0.53398336629916253D-04
4        17        17      0.6000000000000000D+01      -0.19998932065264488D+01
5         9         9      0.5833333333333333D+01      0.17798378973735293D-03
6        14        14      0.5833333333333333D+01      0.89001693976651335D+00
7        17         4      0.5833333333333333D+01      -0.11098922813004748D+01
8        19        19      0.5833333333333333D+01      0.89020029107009685D+00
9        12         3      0.14285714285714288D+01      -0.11097053447216254D+01
10       13        13      0.14285714285714288D+01      0.89039080972450334D+00
11       18        18      0.14285714285714288D+01      0.98833389385013797D+00
12       19         8      0.14285714285714288D+01      -0.10115679742826997D+01
13       20        20      0.146000000000000012D+00      0.98853034476764390D+00
14       15        15      0.10408684931506861D+00      -0.10113711505986862D+01
15       20        10      0.10040080798121710D+00      0.98872753801845405D+00
16       19         5      0.1000400800799605D+00      0.99861463809397222D+00
17       19        16      0.17903910006686519D-02      -0.10012864685072780D+01
18       18        11      0.18567245818392145D-04      0.99881244568960992D+00
19       20         6      0.19709905158712137D-06      -0.10010886209152203D+01
20       20         1      0.15998547585863385D-08      0.99901033007837398D+00

```

***** HOUSEHOLDER *****

```

      JP(K)      JQ(K)      PIV(K)      SOLUTION
1         2         2      0.24494897427831779D+01      *** 0.0
2         7         7      -0.24494897427831779D+01      -0.19999822000210783D+01
3        12        12      -0.24494897427831779D+01      0.53398336908615436D-04
4        17        17      -0.24494897427831779D+01      -0.19998932065258916D+01
5         9         9      -0.24152294576982396D+01      0.17798379066329841D-03
6        14        14      -0.24152294576982396D+01      0.89001694437676700D+00
7        19        19      -0.24152294576982396D+01      -0.11098922766906520D+01
8        17         4      0.24152294576982392D+01      0.89020029567859675D+00
9        13        13      0.11952286093343936D+01      -0.11097053401153403D+01
10       18        18      0.11952286093343936D+01      0.89039081432768225D+00
11       17         8      0.11952286093343931D+01      0.98833389445554590D+00
12       12         3      0.11952286093343931D+01      -0.10115679736815189D+01
13       20        20      -0.38209946349085580D+00      0.98853034536436880D+00
14       15        15      -0.32262493597840251D+00      -0.10113711500066442D+01
15       18        10      0.31686086533558674D+00      0.98872753860558653D+00
16       20         5      0.31629101790597239D+00      0.99861463816767747D+00
17       20        16      -0.42313012190907083D-01      -0.10012864684387408D+01
18       20        11      -0.43089727102294077D-02      0.99881244575294494D+00
19       20         6      0.44395838852121053D-03      -0.10010886208571168D+01
20       20         1      0.0      0.99901033013121826D+00

```

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 2)

```

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) : 0.33820826609804603D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA : 0.39998178684335027D-04
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) : 0.39998178684341424D-04
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION : 0.10389892279454609D-07
GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION : 0.22494957401671198D+01
HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION : 0.22494957390264294D+01

```

• $eps = 0.15985 \times 10^{-7}$ によって a_1 を落し、 $x_1 = 0$ とおいた特解を求めた。 x_g
 x_h 共に正解とくらべ、 $\|x_g - x\|_2$, $\|x_h - x\|_2$ は 2.25 程度の大きな値を示レ
ているが、 $\|b - Ax_g\|_2$, $\|b - Ax_h\|_2$ は共に 0.4×10^{-4} の程度、しかも 10^{-16} のケ
タまで両者は一致している。($10^{-4} \times 10^{-12} = 10^{-16}$)

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0

, ITER : 3 , EPS : 0.159985D-05

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.6000000000000000D+01	*** 0.0
2	7	7	0.6000000000000000D+01	-0.20000000353835372D+01
3	12	12	0.6000000000000000D+01	-0.88457074335208498D-07
4	17	17	0.6000000000000000D+01	-0.20000001415270736D+01
5	9	9	0.5833333333333333D+01	-0.17689999729235861D-06
6	14	14	0.5833333333333333D+01	*** 0.0
7	17	4	0.5833333333333333D+01	-0.19998230292144046D+01
8	19	19	0.5833333333333333D+01	0.53075461113938409D-03
9	12	3	0.14285714285714288D+01	-0.19989388062513249D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.17681304702452360D-02
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.88504470811910597D+00
12	19	8	0.14285714285714288D+01	-0.11140534034041771D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.88686693924365029D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	-0.11121944216653685D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.88876235614080809D+00
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.98623823548230997D+00
17	19	16	0.17903910006686519D-02	-0.10127847975328530D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.98819421991544748D+00
19	20	1	0.39840185803729136D-08	-0.10108248699007469D+01
20	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99015777529060488D+00

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	*** 0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	-0.20000000353835361D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	-0.88457072432602099D-07
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	-0.20000001415270701D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	-0.17689999364990790D-06
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	*** 0.0
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	-0.19998230292143908D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.53075461118034969D-03
9	13	13	0.11952286093343936D+01	-0.19989388062512436D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.17681304703792654D-02
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.88504470818459270D+00
12	12	3	0.11952286093343931D+01	-0.1114053403387495D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.88686693930889378D+00
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	-0.11121944216004334D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.88876235620531113D+00
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.98623823549125789D+00
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	-0.10127847975244821D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.98819421992321928D+00
19	19	1	0.0	-0.10108248698935929D+01
20	20	6	0.0	0.99015777529712329D+00

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 3)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) : 0.33820826609804603D-14
 GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA : 0.397,149,791,825,579,46D-03
 HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) : 0.397,149,791,825,56,070D-03
 HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION : 0.14665420581572808D-09
 GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION : 0.31713752538370683D+01
 HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION : 0.31713752538252200D+01

● 単精度によるATA → GAUSSO によるときは大体この例の $eps = 0.16 \times 10^{-5}$ によるランク落ち判定による特解を求めるあたりが限度となる。上例では a_1, a_6 を落してのち解を求めている。

ICASE : 1 , IPUTUB : 1 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

```

***** GAUSS *****
      JP(K)      JQ(K)      PIV(K)      SOLUTION
1         2         2      0.600000000000000000D+01      0.10123711565025064D+01
2         7         7      0.600000000000000000D+01      -0.98762884348269356D+00
3        12        12      0.600000000000000000D+01      0.10123711565469065D+01
4        17        17      0.600000000000000000D+01      -0.98762984340869336D+00
5         9         9      0.583333333333333333D+01      0.10123691566505053D+01
6        14        14      0.583333333333333333D+01      0.10023698966072567D+01
7        17         4      0.583333333333333333D+01      -0.99763110331517013D+00
8        19        19      0.583333333333333333D+01      0.1002367896765973D+01
9        12         3      0.14285714285714288D+01      -0.99763410314929621D+00
10       13        13      0.14285714285714288D+01      0.10023638969390005D+01
11       18        18      0.14285714285714288D+01      0.10003639888050428D+01
12       19         8      0.14285714285714288D+01      -0.99963801110248081D+00
13       20        20      0.146000000000000012D+00      0.10003599889906027D+01
14       15        15      0.10408684931506861D+00      -0.99964301091570940D+00
15       20        10      0.10040080798121710D+00      0.10003539891785778D+01
16       19         5      0.1000400800799605D+00      0.10000539986667234D+01
17       19        16      0.17903910006686519D-02      -0.99994900123830244D+00
18       18        11      0.18567245818392145D-04      0.10000479988567592D+01
19       20         6      0.19709905158712137D-06      -0.99995600104809675D+00
20       20         1      0.15998547585863385D-08      0.10000399990471227D+01
    
```

```

***** HOUSEHOLDER *****
      JP(K)      JQ(K)      PIV(K)      SOLUTION
1         2         2      0.24494897427831779D+01      0.10123720000156691D+01
2         7         7      -0.24494897427831779D+01      -0.98762799998433097D+00
3        12        12      -0.24494897427831779D+01      0.10123720000156691D+01
4        17        17      -0.24494897427831779D+01      -0.98762899998432960D+00
5         9         9      -0.24152294576982396D+01      0.10123700000156697D+01
6        14        14      -0.24152294576982396D+01      0.10023700000021225D+01
7        19        19      -0.24152294576982396D+01      -0.99763099999787912D+00
8        17         4      0.24152294576982392D+01      0.10023680000021189D+01
9        13        13      0.11952286093343936D+01      -0.99763399999788270D+00
10       18        18      0.11952286093343936D+01      0.10023640000021152D+01
11       17         8      0.11952286093343931D+01      0.10003640000002454D+01
12       12         3      0.11952286093343931D+01      -0.99963799999975680D+00
13       20        20      -0.38209946349085580D+00      0.10003600000002411D+01
14       15        15      -0.32262493597840251D+00      -0.99964299999976053D+00
15       18        10      0.31686086533558674D+00      0.10003540000002376D+01
16       20         5      0.31629101790597239D+00      0.10000540000000353D+01
17       20        16      -0.42313012190907083D-01      -0.9999489999996592D+00
18       20        11      -0.43089727102294077D-02      0.10000480000000305D+01
19       20         6      0.44395838852121053D-03      -0.9999559999997149D+00
20       20         1      0.39998178684218635D-04      0.10000400000000256D+01
    
```

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM **** (ITER : 1)

```

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA ( 1 ) :      0.45775667985222376D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :      0.34070691831354278D-10
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA ( 2 ) :      0.45775667985222376D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :      0.19002553886421441D-05
||δxg||2 GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :      0.28175007834719107D-01
||δxh||2 HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :      0.28176903555741829D-01
    
```

• $\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に殆んど同じ値 $\approx 0.2817 \times 10^{-1}$ を示している。これは右辺の擾動 $\|\delta b\|_2 / \|b\|_2$ に対する解の擾動 $\|\delta x\|_2 / \|x\|_2$ の倍率 α :

$$\|\delta x\|_2 / \|x\|_2 = \alpha \cdot \|\delta b\|_2 / \|b\|_2$$

が ATA - GAUSSO と DHOUSE とで殆んど等しいことを示している。

($\text{cond}(ATA)$, $\text{cond}(A)$ に '比例' するというのは迷信か?)

ICASE : 1 , IPUTUB : 3 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.6000000000000000D+01	0.10000080202955040D+01
2	7	7	0.6000000000000000D+01	-0.99999197970481546D+00
3	12	12	0.6000000000000000D+01	0.10000070202945457D+01
4	17	17	0.6000000000000000D+01	-0.99999397970641227D+00
5	9	9	0.5833333333333333D+01	0.10000060202923104D+01
6	14	14	0.5833333333333333D+01	0.10000060043215875D+01
7	17	4	0.5833333333333333D+01	-0.99999399568045702D+00
8	19	19	0.5833333333333333D+01	0.10000050043170505D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	-0.99999599568588991D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.10000040043107217D+01
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.10000040004745987D+01
12	19	8	0.14285714285714288D+01	-0.99999599952927545D+00
13	20	20	0.1460000000000000D+00	0.10000030004668121D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	-0.99999799953713842D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.10000020004588730D+01
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.10000020000562504D+01
17	19	16	0.17903910006686519D-02	-0.99999799994777412D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000010000482031D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	-0.9999999995581743D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	0.10000000000401641D+01

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.10000080000055922D+01
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	-0.99999199999440817D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000070000055914D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	-0.99999399999440805D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.10000060000055921D+01
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.10000060000016382D+01
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	-0.99999399999836251D+00
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000050000016361D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	-0.99999599999836518D+00
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.10000040000016333D+01
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.10000040000002273D+01
12	12	3	0.11952286093343931D+01	-0.9999959999977440D+00
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000030000002236D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	-0.9999979999977745D+00
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.10000020000002205D+01
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.10000020000000349D+01
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	-0.9999979999996669D+00
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000010000000303D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	-0.9999999999997150D+00
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.10000000000000255D+01

**** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM **** (ITER : 1)

$\ x_h\ _2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.32859600789134063D-14
$\ y_g\ _2$	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.12323126498273127D-11
$\ y_h\ _2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.32859600789134063D-14
$\ x_h - x_g\ _2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.46393302240268073D-07
$\ \delta x_g\ _2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.20920162580912965D-04
$\ \delta x_h\ _2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.20880624519324018D-04

• IPUTUB=3 の擾動は、 $0, +\epsilon, 0, -\epsilon, 0$ の形ゆえ、対応する解の擾動が、IPUTUB=1 のときとくらべ、はるかに小さい。epsy=0.1×10⁻⁵の擾動に対する $\|\delta x_g\|_2$ 、 $\|\delta x_h\|_2$ 共に0.209×10⁻⁴の程度である。IPUTUB=1 のときは0.281×10⁻¹であった(13頁)残差のルム $\|y_g\|_2$ は約0.12×10⁻¹¹、ガウスでもよい線に入っている。

これより ICASE = 3, (正解は $0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots$)

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0

, ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

```

***** GAUSS *****

```

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.600000000000000000D+01	-0.51199157699937871D-06
2	7	7	0.600000000000000000D+01	0.99999948801744845D+00
3	12	12	0.600000000000000000D+01	0.99999948803549951D+00
4	17	17	0.600000000000000000D+01	0.99999948806257596D+00
5	9	9	0.583333333333333333D+01	-0.51190132271644891D-06
6	14	14	0.583333333333333333D+01	-0.60649336958677479D-07
7	17	4	0.583333333333333333D+01	0.99999993939755275D+00
8	19	19	0.583333333333333333D+01	0.99999993944620635D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.99999993949662283D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	-0.60451199205153984D-07
11	18	18	0.14285714285714288D+01	-0.65136486914162584D-08
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.99999999354054536D+00
13	20	20	0.146000000000000012D+00	0.99999999359499481D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.99999999364969799D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	-0.62953470168700691D-08
16	19	5	0.10004000800799605D+00	-0.77490928731555237D-09
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.99999999928033330D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.99999999933561218D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99999999939092518D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.55373029669610632D-09

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.19795483191187123D-10
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197942D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197933D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197922D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.19792189168736289D-10
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.31828052754216783D-11
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000031801D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000000000031783D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000000000031768D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.31755810947552964D-11
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.34329848437470820D-12
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000000000003397D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000000000003368D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10000000000003340D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.33175120923185826D-12
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.40607468093442889D-13
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000000000000364D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000000000000331D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000000000000304D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.29114374113802578D-13

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.45441226316795398D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.20569875523775613D-10
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.45441226316795398D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.11528813766163590D-05
GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.11528365826264109D-05
HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.44833029070968522D-10

- この後、ランク落ちのあるときの特解と正解とを比較するとき、 $x_1 = 0$, $x_6 = 0, \dots$ であるため比較し易いのである。

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0

ITER : 2 , EPS : 0.159985D-07

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.6000000000000000D+01	*** 0.0
2	7	7	0.6000000000000000D+01	0.9999999999991214D+00
3	12	12	0.6000000000000000D+01	0.99999999999973715D+00
4	17	17	0.6000000000000000D+01	0.99999999999947572D+00
5	9	9	0.5833333333333333D+01	-0.87191877901581504D-12
6	14	14	0.5833333333333333D+01	-0.43389391087480980D-08
7	17	4	0.5833333333333333D+01	0.99999999566147257D+00
8	19	19	0.5833333333333333D+01	0.99999999566272994D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.99999999566483268D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	-0.43322196206087269D-08
11	18	18	0.14285714285714288D+01	-0.54070094462295590D-09
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.99999999946325042D+00
13	20	20	0.1460000000000000D+00	0.99999999946736129D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.99999999947163098D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	-0.52394175832501218D-09
16	19	5	0.10004000800799605D+00	-0.65615701467417409D-10
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.9999999993899436D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.9999999994363098D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.9999999994828993D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.47027662299923437D-10

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	*** 0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.999999999999936D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.999999999999907D+00
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.9999999999999889D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.22925268549286958D-15
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.10056375465120370D-11
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000010050D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000000000010050D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000000000010052D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.10058143021747097D-11
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.11236228816169062D-12
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000000000001106D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000000000001095D+01
14	15	15	-0.3226249359784251D+00	0.10000000000001086D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.10860738917430772D-12
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.13183561227758928D-13
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000000000000111D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000000000000095D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.100000000000000089D+01
20	20	1	0.0	0.95233808613355103D-14

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 2)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.45441226316795398D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.19328880367282697D-11
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.42195321972799592D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.97724643772636014D-08
$\ \delta x_g\ _2$ GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.97702031011719092D-08
$\ \delta x_h\ _2$ HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.22614850686469608D-11

• a_1 を落し、 x_1 を0とおいた特解 x_g, x_h を求めている。もともと正解 x の x_1 が0であったから、 x_g, x_h の x_2, x_3, \dots と x, x_{h0} の x_2, x_3, \dots と、そう変化しないで済んでいる。 $\|\delta x_g\|_2 \doteq 0.9770 \times 10^{-8}$, $\|\delta x_h\|_2 \doteq 0.2261 \times 10^{-11}$ 。

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 3 , EPS : 0.159985D-05

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.600000000000000000D+01	*** 0.0
2	7	7	0.600000000000000000D+01	0.999999999999999911D+00
3	12	12	0.600000000000000000D+01	0.9999999999999999797D+00
4	17	17	0.600000000000000000D+01	0.9999999999999999706D+00
5	9	9	0.583333333333333333D+01	-0.33640922544775360D-14
6	14	14	0.583333333333333333D+01	*** 0.0
7	17	4	0.583333333333333333D+01	0.9999999999999999152D+00
8	19	19	0.583333333333333333D+01	0.99999999999999997544D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.99999999999999995230D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	-0.77698738886739434D-13
11	18	18	0.14285714285714288D+01	-0.37153801355443851D-10
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.99999999999999996287914D+00
13	20	20	0.146000000000000000D+00	0.9999999999999999628250D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.99999999999999996315640D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	-0.36599531697480123D-10
16	19	5	0.1000400800799605D+00	-0.52792573864303617D-11
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.9999999999999999504999D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.9999999999999999539503D+00
19	20	1	0.39840185803729136D-08	0.9999999999999999575524D+00
20	20	6	0.19709905158712137D-06	-0.38703981347451894D-11

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	*** 0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.999999999999999944D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.999999999999999925D+00
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.9999999999999999899D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.27947439599373105D-16
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	*** 0.0
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.9999999999999999981D+00
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.100000000000000000D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.100000000000000000D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.17521422177841161D-14
11	17	8	0.11952286093343931D+01	-0.43450223215744663D-14
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.9999999999999999518D+00
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.9999999999999999516D+00
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.9999999999999999521D+00
15	18	10	0.31686086533558674D+00	-0.43441016942581878D-14
16	20	5	0.31629101790597239D+00	-0.80063907403986857D-15
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.9999999999999999818D+00
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.9999999999999999777D+00
19	19	1	0.0	0.9999999999999999815D+00
20	20	6	0.0	-0.47919446036978628D-15

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 3)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.45441226316795398D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.16104332527955496D-12
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.35886896686837450D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.83249295761152235D-10
$\ \delta x_g\ _2$ GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.83259960094590350D-10
$\ \delta x_h\ _2$ HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.11195750618022060D-13

• a_1, a_6 を落したが, 正解 x の x_1, x_6 が 0 であったから特解 x_g, x_h の x_1, x_6 以外の要素 x_i ももとと比べ変化が非常にすくない。特に x_h において然り。 $\|\delta x_g\|_2 \doteq 0.8325 \times 10^{-10}$, $\|\delta x_h\|_2 \doteq 0.1195 \times 10^{-13}$ 。

ICASE : 3 , IPUTUB : 1 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.6000000000000000D+01	0.12371220714942027D-01
2	7	7	0.6000000000000000D+01	0.10123712207286688D+01
3	12	12	0.6000000000000000D+01	0.10123712207561222D+01
4	17	17	0.6000000000000000D+01	0.101237022007973018D+01
5	9	9	0.5833333333333333D+01	0.12369220852206852D-01
6	14	14	0.5833333333333333D+01	0.23699071462183144D-02
7	17	4	0.5833333333333333D+01	0.10023689072176374D+01
8	19	19	0.5833333333333333D+01	0.10023679072918452D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.10023659073688400D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.23639074486202935D-02
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.36399001112808117D-03
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.10003619900941148D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.10003599901775235D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.10003569902613516D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.35399034559639530D-03
16	19	5	0.10004000800799650D+00	0.53998811333015237D-04
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.10000509988960551D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000479989808388D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.10000439990656798D+01
20	20	1	0.15998547585863385D-08	0.39999150574221383D-04

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.12372000016719797D-01
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10123720000167185D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10123720000167173D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10123710000167159D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.12370000016716222D-01
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.23700000026220816D-02
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10023690000026200D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10023680000026183D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10023660000026167D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.23640000026156240D-02
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.36400000029454343D-03
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10003620000002915D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10003600000002890D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10003570000002864D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.35400000028488750D-03
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.54000000035018532D-04
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000510000000318D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000480000000289D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000440000000264D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.40000000025111464D-04

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.42894527863324324D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.31332317336273770D-10
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.42894527863324324D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.17548760829626051D-05
$\ \delta x_g\ _2$ GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.28175153289685724D-01
$\ \delta x_h\ _2$ HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.28176903558255612D-01

• 0, 0, $\pm \epsilon$, 0, 0 タイプの $\text{epsy} = 0.1 \times 10^{-5}$ の擾動に対し, $\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に約 0.2817×10^{-1} の解の擾動がひきおこされた。(ICASE=1 のときと同じ, 13頁)

ICASE : 3 , IPUTUB : 3 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

```

**** GAUSS ****

```

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.600000000000000000D+01	0.74246742647324727D-05
2	7	7	0.600000000000000000D+01	0.10000074246844195D+01
3	12	12	0.600000000000000000D+01	0.10000064247047296D+01
4	17	17	0.600000000000000000D+01	0.10000054247351939D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01	0.54247758124559890D-05
6	14	14	0.58333333333333333D+01	0.59324848802034448D-05
7	17	4	0.58333333333333333D+01	0.10000059325375066D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.10000049325919880D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.10000039326483230D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.39327065105118281D-05
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.39927441732609581D-05
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.10000039928045055D+01
13	20	20	0.146000000000000012D+00	0.10000029928651315D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.10000019929260493D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.19929872567009917D-05
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.19991366494522077D-05
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.10000019991981888D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000009992597714D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99999999932139440D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.61694499484237247D-09

```

**** HOUSEHOLDER ****

```

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.80000180337382474D-05
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10000080000180329D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000070000180323D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10000060000180311D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.60000180310065575D-05
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.60000024458201445D-05
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000060000024433D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000050000024416D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000040000024404D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.40000024394928094D-05
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.40000002491478833D-05
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000040000002464D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000030000002442D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10000020000002419D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.20000002405700360D-05
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.20000000277924511D-05
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000020000000247D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000010000000223D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000000000000204D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.19889971298792031D-13

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM **** (ITER : 1)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.40791018318416037D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.23089827259236415D-10
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.40791018318416037D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.12953167716628089D-05
$\ \delta x_g\ _2$ GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.19844737259605330D-04
$\ \delta x_h\ _2$ HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.20880646350265844D-04

• IPUTUB = 1 (18頁) のもの と 比べ、擾動が 0, +ε, 0, -ε, 0 タイプ となっ たため、 $\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に約 3桁 小さく なる った。

ここで全体を通観して特筆したい点を二・三あげる：

1) ハウスホルダならばフルランクにて解 x_{ho} を得、ATA-ガウスのとき a_1 を落し x_1 をゼロとおいた特解 x_g を求めた場合 x_{ho} の x_1 がゼロでなければ $\|x_{ho} - x_g\|_2$ は大きな値を示すが、 $\|b - Ax_{ho}\|_2$ と $\|b - Ax_g\|_2$ の差はそれほど大きくなく、 x_g はそれなりに真理を主張している。実際 a_1 は他のものの一次結に近いかから ATA ガウスによって一次従属と見なされてランク落ちとされたわけである。その場合他のもの a_j が a_1 の肩代りをして x_j を調節して最初二乗解を形成するからである。

a_1 を強制的に落して再びハウスホルダによって求めなおした解 x_h と x_g を比較するとその点がはきりする。

2) ATA ガウスによってもランク落ちなく解けた場合

$\text{piv}(m) > \text{eps}$ ではあるが $\text{piv}(m)$ が eps に近い場合には、 x_g と x_h とは外見上大いに異なった値を示すことがある。このことは $a_{jq(m)}$ が '殆んど' 他の a_j の一次結合なわけゆえ当然と言える。($a_{jq(m)}$ を外した A に対する二つの特解に近い x_g , x_h が求まっている。) $\|b - Ax_g\|_2$, $\|b - Ax_h\|_2$ の方は、結構よく合っている。最小二乗解にとってはそれでよい筈。

3) b 自身に擾動が入るときの、それに対する x_g の擾動は、 A_g 自身の条件数 $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ に依存し、計算機内部の丸の誤差に対する x_g の擾動が、 $A_g^T A_g$ の条件数の支配を受ける。

(例えば 外部データ自身に $\|\delta b\|_2/\|b\|_2 \sim 10^{-5}$ 程度の誤差を含む場合、 $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} \leq 10^{+5}$ の程度の、ATA ガウスで解ける程度の問題の場合、解かれた x_g の信頼性に関しては、ハウスホルダによるものと変りない。)

6 ハウスホルダー法の変種

DHOUSE は、理論的には大変好ましいが、 $N \times M$ 語が主メモリに入らぬような大きな問題を扱おうときのページ交換の負担が大きい。(各 k 段で $a_j^{(k)}$, $j=k, \dots, m$ の長さを計算する計算負担は軽減する技法が知られているけれども。)

それに対し、筆者が日頃愛用していた素朴な上階段化ハウスホルダーの方は、それ自身 DHOUSE よりもページ交換の負担がすくないし、‘たてブロック化’による、一層のページ交換の負担軽減が直ちに可能である。素朴な上階段化ハウスホルダーの方を今回は OHOUSE (Old House) と命名して、DHOUSE と比較した。(次頁にプログラムの大筋を示す。) 先程 GAUSSO を置いたところに OHOUSE を置いて DHOUSE と比較するわけである。結果は、ICASE=8 の行列によって、(実用上は問題にならない程度の) わずかの有意差? を得た。

DHOUSE にオプションをつけて、ページ交換の負担軽減をはかった場合も併せテストした。それは、DHOUSE の初めから 7-10 行目のところを次のように直したものである:

{例えば $\text{safe} = \min(\text{eps} \times 10^6, \|A\|_2 \times 10^{-6})$ 程度に設定して}

```

do 30 j=k,m
  S =  $\sum_{i=k}^n a(i,j)**2$ 
  if S > smax then
    Smax = S ; jpk = j
  if Smax  $\geq$  safe**2 go to 900 {do 30の外へ!} {*}
30 continue
900 continue

```

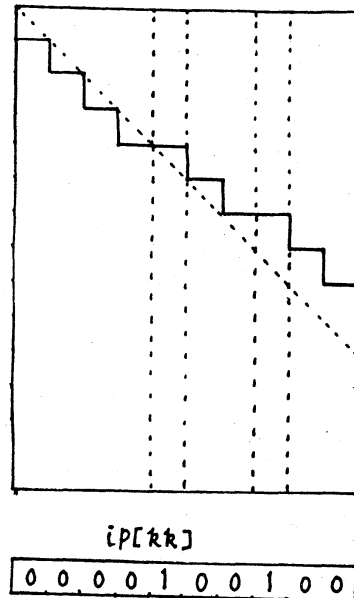
{*} がオプション, {*} ありを SAFEARI, なしを SAFENASHI と呼ぶ。

HOUSE

```

iY = 0
do kk = 1, m
  ip(kk) = 0
do kk = 1, m
  k = kk - iY
  s =  $\sum_{i=k}^n a(i, kk) ** 2$ 
  sigma = sqrt(s)
  if sigma > eps then
    h = sigma * (sigma + abs(a(k, kk)))
    alfa = 1.0/h
    if a(k, kk) < 0.0 sigma = -sigma
    a(k, kk) = a(k, kk) + sigma
    do j = kk + 1, m
      s =  $\sum_{i=k}^n a(i, kk) * a(i, j)$ 
      as = alfa * s
      do i = k, n
        a(i, j) = a(i, j) - as * a(i, kk)
      s =  $\sum_{i=k}^n a(i, kk) * b(i)$ 
      as = alfa * s
      do i = k, n
        b(i) = b(i) - as * a(i, kk)
    else
      iY = iY + 1
      ip(kk) = 1 ; a(k, kk) = -sigma
do kk = m, 1, -1
  if ip(kk) = 1 then
    x(kk) = 0.0 ; iY = iY - 1
  else
    s = 0.0
    do j = kk + 1, m
      s = s + a(kk - iY, j) * x(j)
    x(kk) = (b(kk - iY) - s) / a(kk - iY, kk)

```



次頁のデータは $\text{Cond}(A) \doteq 0.1 \times 10^{16}$ の、即ち常識的には限界を超えた問題である。それにしても残残 $\|b - Ax_h\|_2$ でみるとき何れも約 0.2×10^{-13} のよい線を出している。いっぽう $\|x_h - x_{\text{true}}\|_2$ の方は 0.18×10^0 と 0.60×10^{-1} を示している。DHOUSEがこれによりや、勝ると言えるかどうか問題である。

EPS1 : 0.9999999999999998D-12
 EPS2 : 0.1000000000000000D-10
 EPS3 : 0.1000000000000000D-09

ANORM : 0.31925131407056544D+02
 AINRM : 0.34873164517570012D+14
 COND2 : 0.11133303598033242D+16

ICASE : 8 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 1 , EPS : 0.367624D-13

***** OLD-HOUSEHOLDER *****

	A(K,KK)	SOLUTION
1	-0.14142135623730951D+01	-0.91495301424396140D-03
2	-0.24525496936861444D+02	0.98663492298408759D+00
3	-0.18334746412707418D+02	-0.13365077015899451D-01
4	-0.24424033595578996D+01	-0.10133650770158871D+01
5	-0.70587389985090243D+00	-0.13365077015875349D-01
6	-0.44869935904710805D+00	-0.12450124001675152D-02
7	-0.90909090909117571D-01	0.11324057577589628D+01
8	-0.67184857632933485D-13	0.13240575775885076D+00
9	-0.10542204251233214D+01	-0.10012450124001329D+01
10	-0.10489050812574234D-10	-0.12450124001209267D-02
11	-0.10445457838625212D+01	-0.54927510755587883D-05
12	-0.10409003186316870D+01	0.99988623067767561D+00
13	-0.24516872607873626D+02	-0.11376932231370011D-03
14	-0.22516361115292884D+01	-0.10001137693223028D+01
15	-0.47668472641840517D+00	-0.11376932229292307D-03
16	-0.13540064008477455D+01	-0.10827657126011367D-04
17	-0.60302268921103261D+00	0.99998917234288449D+00
18	-0.56281327776348828D-11	0.11268655660317196D-02
19	-0.10260042558266944D+01	-0.10000108276570949D+01
20	-0.24608604043407922D-09	-0.10827657084490912D-04

***** D-HOUSEHOLDER ***** +++++ SAFE NASHI +++++

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24617067250182341D+02	-0.35370659643271985D-03
2	13	13	-0.24617067250182341D+02	0.10043123213994880D+01
3	3	3	-0.18348478592697177D+02	0.43123213994831731D-02
4	16	16	-0.14189430361913733D+02	-0.99568767860052258D+00
5	6	6	0.13959630622932399D+02	0.43123213994729574D-02
6	14	14	-0.24440766768282953D+01	0.46660279959264106D-03
7	16	4	0.24423955924167347D+01	0.95734338880470450D+00
8	19	19	-0.18273843973831527D+01	-0.42656611195247426D-01
9	17	17	0.15899133131788945D+01	-0.99953339720042136D+00
10	17	9	0.15841192138911309D+01	0.46660279957362589D-03
11	12	12	-0.11339417464456680D+01	-0.49560957985244609D-05
12	14	5	-0.70429935941460645D+00	0.10000462869737596D+01
13	15	15	0.56025424210319585D+00	0.46286973756079280D-04
14	17	10	-0.31716484819041774D+00	-0.99995371302624760D+00
15	20	20	0.31413031069474177D+00	0.46286973748144492D-04
16	19	8	-0.90834052439168089D-01	0.51243069560716578D-05
17	17	11	0.49604492795175328D-10	0.10000051243069517D+01
18	18	18	-0.45390681733274510D-11	-0.45774543061334497D-03
19	20	1	-0.48800420206357430D-12	-0.99999487569305689D+00
20	20	7	-0.40847083079464047D-13	0.51243069379646959D-05

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM *** (ITER : 1)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA	1 :	0.17273442266649573D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.25356533690258136D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA	2 :	0.17273442266649573D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION	:	0.25011066763772644D+00
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	<u>0.18916627584110519D+00</u>
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	<u>0.60947140326883691D-01</u>

• 次頁には OHOUSE と SAFE ARI の DHOUSE を比べたものを示す。

***** D-HOUSEHOLDER ***** +++++ SAFE ARI +++++

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	1	1	-0.14142135623730951D+01	-0.11691792514421411D-03
2	2	2	-0.24525496936861444D+02	0.98714037718797024D+00
3	3	3	-0.18334746412707418D+02	-0.12859622812017003D-01
4	4	4	-0.24424033595578996D+01	-0.10128596228120050D+01
5	5	5	-0.70587389985090243D+00	-0.12859622811993678D-01
6	6	6	-0.44869935904710805D+00	-0.12742704886892328D-02
7	7	7	-0.90909090909117571D-01	0.11273219576316138D+01
8	9	9	-0.11180339887504145D+01	0.12732195763150374D+00
9	11	11	0.14142135623801659D+01	-0.10012742704886557D+01
10	12	12	0.12247448713977125D+01	-0.12742704886437618D-02
11	13	13	-0.24522098876999632D+02	-0.75039145978239269D-05
12	14	14	0.23074400055394757D+01	0.99986954566111684D+00
13	15	15	0.55887147395426653D+00	-0.13045433887149155D-03
14	16	16	0.13540064008477455D+01	-0.10001304543388596D+01
15	17	17	0.60302268921103251D+00	-0.13045433884805923D-03
16	19	19	-0.11180339888018829D+01	-0.12295042429692097D-04
17	20	20	-0.49108425620482010D-09	0.99998770495758238D+00
18	19	10	0.65785931381441523D-11	0.12922483463088843D-02
19	19	18	-0.33333761856333124D-11	-0.10000122950423944D+01
20	20	8	-0.40968638299218349D-13	-0.12295042382492222D-04

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA 1 :	0.22305430354251406D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.25356533690258136D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA 2 :	0.22305430354251406D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION :	0.73061541915006014D-02
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.18916627584110519D+00
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.18190619833166051D+00

• この例では SAFE ありの DHOUSE は OHOUSE と比べ 有意差はないと言える。しかし有意差らしいものがあることもある。次のデータは、 a_8 を落して計算させたときのものである：

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 2)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA 1 :	0.22305430354251406D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.21741294238059423D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA 2 :	0.24512043184183116D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION :	0.13926807317366374D-02
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	<u>0.13347295690909738D-02</u>
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	<u>0.71001420302615038D-04</u>

a_8 を落したあとの \tilde{A} でも、まだ‘殆んど一次従属’だから、 $\|x_h - x_{true}\|_2$ において上の \sim 部程度の差があらわれることを‘有意差’と見るかどうか、問題である。 $\|b - \tilde{A}x_h\|_2$ の方はよい一致を示している。因みに SAFE なし的时候には以下のようになった：

DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION : 0.40142198847359226D-03

以上、まだデータがすくなく、検討も浅いが、大方の予想としては次のように言ってよいと思われる：

1) オーソドックスな DHOUSE でなくても、これにオプションをつけた、SAFE ありの DHOUSE で十分である。

2) OHOUSE でも実用上差しかえ無さそうである。

OHOUSEは特に、‘たてブロック化’による、ページスワップの負担軽減のためのプログラム作成が容易だから、早速試みることができる。SAFE ありの DHOUSE もちょっと手がかるが実用上十分の効果のあるプログラムを作成可能である。SAFEなしの DHOUSE となると、‘よこ方向番地づけ’を行なった上で全面的にプログラムの書き換えを行なわねばならない。しかしそうすると、通常、断然たての方が長いデータを扱おう関係上、スーパーコンピュータにとっては CPU タイムの点では損をする。

7 おわりに： 正規方程式 $A^T(Ax-b)=0$ を異なる算法によって解いたときの二つの解を合理的に比較する方法を提示し、実施例を示した。

初めに、列選択つきハウスホルダ DHOUSE による解 x_h と、対角軸選択の対称ガウス GAUSSO による解 x_g を比較した例

を示した。要約を20頁にしておいたが、さらに要約すると、

「 $A = (a_1, \dots, a_m)$ の中に一次従属に近い a_1 があって、それがATAを作ったために GAUSSO によってランク落ちと判定され、 A から外されて計算がされるとき、 $x_1 = 0$ とおいた特解 x_g は最小二乗の意味では実用上採用可能な解になる。特に外部データも自身に10%程度の相対誤差は現実にはあると考えると、ますますその感を深くする。」

次に DHOUSE より簡単な、上階段化ハウスホルダー - OHOUSE と DHOUSE を比べた。要約は25頁に書いた通りである。

OHOUSE は、ページ交換の負担を軽くするようプログラムするのが容易だから、「大きな問題」を常時扱かう人には、それを奨めたい。

この研究のためのプログラム作成、データ取得は、すべて本学卒論学生：新美昌代によって実行された。じつは筆者自身、卒論指導教官になった縁で、始めてこの方面に参入したのであって、この報告も、専門家の目からみれば、未熟のことであろう。

文献：

- 1) C.L. Lawson and R.J. Hanson (1974). *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall
- 2) 中川徹・小柳義夫 (1982). 最小二乗法による実験データ解析
東京大学出版会