数理解析研究所講究録
第553巻 1985年 134-144

平衡プラズマにおける自由境界値問題の数値解法

東京大・工 今井仁司
(Hitoshi IMAI)

§0 序

物理現象を解く場合，目的意識をはっきりもって問題にのぞまなくてはならない．今，2次元平衡プラズマの形状決定問題を解くことを考える．これは自由境界値問題と呼ばれる一連の問題の典型的なものの一つで，しかも内部問題と呼ばれるものである．固定境界の中に自由境界があり，それを求めるのが問題となる．内部問題では解の非一意性を示した論文もあり，解の分岐が起こっている可能性が大きい．そこで分岐構造を明らかにするという立場に立ってこの問題を解くことを考える．しかも電流が表面にだけ流れているという特殊なモデルを解くのであるが，この場合等角写像を用いて解いた方が差分等で直接解くより有効だと思われる．以下，A.S. Demidov が Phys. Fluids で示した方法に従って，もう少し分岐がわかり易いようパラメータをとって行った数値計算例を示すことにする．

§1 基礎方程式

分岐現象の構造を明らかにするために後で真空容器の形を制限するが，その前に一般の容器の形において以下の仮定を満たす平衡プラズマを考える．

仮定

① Ideal MHD である．
② z 方向に表面電流が流れている．
③ プラズマは平衡である．
④ z 方向には一様である．

今ベクトルポテンシャルを $\mathbb{A}=(A_x, A_y, A_z)$（以下添字は成分を表す），磁場を $\mathbb{B}$，電流を $\mathbb{J}$，容器の壁（固定境界）を Γ，プラズマと真空の境界（自由境界）を γ，プラズマ領域を Ω_p，真空領域を Ω_v とすると，$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{J}$ に対してはよく知られている関係式

(1.1) $\quad \mathbb{B}=\mathrm{rot}\,\mathbb{A}, \quad \mathbb{J}=\mathrm{rot}\,\mathbb{B}$

を満たす．仮定④より $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x,y)$ だから $\mathbb{B}, \mathbb{J}$ を $\mathbb{A}$ で表わすと

(1.2) $\quad \mathbb{B}=(B_x, B_y, B_z)=\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z,\ -\frac{\partial}{\partial x}A_z,\ \frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)$

(1.3) $\quad \mathbb{J}=(J_x, J_y, J_z)$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_y\right),\ -\Delta A_z\right)$$

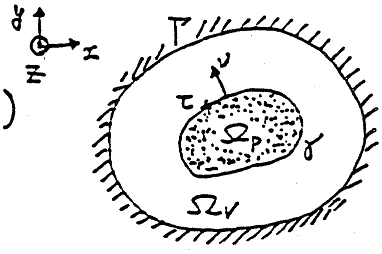


Fig. 1

ここで，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である．仮定②より $\mathbb{J}=(0, 0, \rho\,\delta|_\gamma)$，（$\rho>0$ は表面電流密

度，$\delta|_\gamma$ は γ 上の δ-関数）とかかれるので (1.3) とから

$$\left.\begin{aligned} &(1.4)\quad \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = B_z = \text{const} \\ &(1.5)\quad -\Delta A_z(x,y) = \rho\,\delta|_\gamma \end{aligned}\right\} \text{ in } \Omega = \Omega_p \cup \gamma \cup \Omega_v$$

であることがわかる．仮定③より $|\mathbb{B}||_\gamma = \text{const}$ でなければならないので，γ 上で (1.2), (1.4) を使うと

$$(1.6)\quad |\mathbb{B}|^2 = \text{const} = \left(\frac{\partial}{\partial x}A_z\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)^2$$

$$= |\nabla A_z|^2 + \text{const}$$

$$(1.7)\quad \therefore\ |\nabla A_z| = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

である．ここで $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ である．仮定①より $A_z = \text{const}$ on γ，当然ながら容器の壁 Γ 上で $A_z = \text{const}$ である．従って，(1.7) より ν を γ の外向き法線方向の単位ベクトルとして

$$(1.8)\quad \frac{\partial}{\partial \nu}A_z = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

この定数は計算されて

$$(1.9)\quad \int_\gamma \rho\, dl = \int_{\Omega_p} \rho\,\delta|_\gamma\, dx = \int_{\overline{\Omega_p}} (-\Delta A_z)\, dx = -\int_\gamma \frac{\partial}{\partial \nu}A_z\, dl = -\frac{\partial}{\partial \nu}A_z \cdot \int_\gamma dl$$

$$(1.10)\quad \therefore\ \frac{\partial}{\partial \nu}A_z = -I_p/l_\gamma \quad \text{on } \gamma$$

となる．ここで $I_p = \int_\gamma \rho\, dl$ は全電流，l_γ は γ の長さである．

フラックス定数 K を

$$(1.11)\quad K = A_z|_\gamma - A_z|_\Gamma > 0$$

とおいて

$$(1.12)\quad u(x,y) = A_z|_\gamma - A_z(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega_v$$

とおくと，今考えている平衡プラズマの問題は次のように書

かれる．

Prob.1　次を満たすなめらかな曲線 γ と $\Omega_\gamma \cup \gamma$ でなめらかな u を求めよ

$$
\begin{cases}
\Delta u = 0 & \text{in } \Omega_\gamma \quad (1.13)\\
u = 0 & \text{on } \gamma \quad (1.14)\\
u = K & \text{on } \Gamma \quad (1.15)\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = I_p/\ell_\gamma & \text{on } \gamma \quad (1.16)
\end{cases}
$$

ここで I_p，K は与えられた正定数で ℓ_γ は γ の長さである．■

§2．等角写像による変換

今分岐現象の構造を明らかにするため固定境界 Γ は Fig.2 のような対称性をもち，変数 a によって一意的に定まるものとする．そして対称にするプラズマも Fig 2 に示されている 1-component プラズマと 2-component プラズマに限る．すると問題の対称性から 1/4 領域で問題を解けばよいことになる．

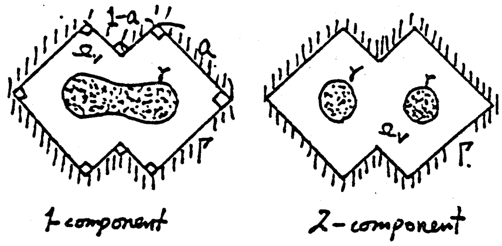


Fig. 2

従って Fig 3 の領域で Prob.1 を解くことを考える．簡単のため，$I_p = 4$ に固定する．これを Prob. 2 とすると

Prob. 2　Fig. 3 の領域で Prob. 1 を解け．ただし γ は x 軸，y 軸に垂直に交わるとする．■

ここで γ が x 軸, y 軸に垂直に交わるということは物理的には当然であるが数学的には O, E 付近で u が特異的でないことに対応する.

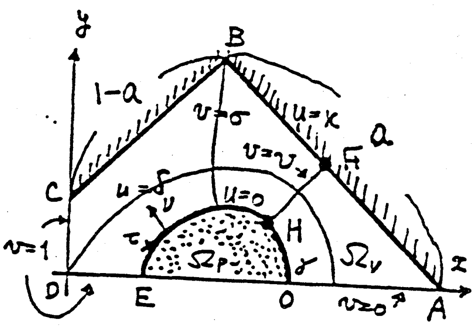


Fig. 3

即ち u に共役調和な v をもってきて $v_{OA}=0$ とできる. そして CDE 上で v は定数であるとする. その定数は求めることができて

(2.1) $$v_{CDE} - v_{OA} = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial \tau}\, dl = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial \nu} u\, dl = 1 \quad (\because I_p = 4 \text{ より})$$

(2.2) $$\therefore v_{CDE} = 1$$

となる. この u, v を使って Ω_v を長方形領域に写す. そのために

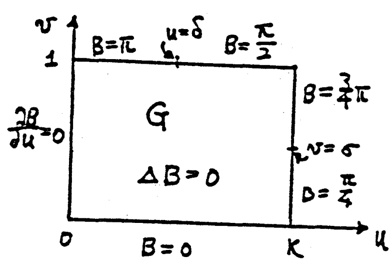


Fig. 4

(2.3) $$z = x+iy, \quad w = u+iv$$

とおいて

(2.4) $$G = \{0<u<K, \ 0<v<1\}$$

とすると Ω_v は G に写される. その写像関数を求めるために

(2.5) $$\frac{dz}{dw} = e^{A(u,v)+iB(u,v)}$$

とおく. $A+iB$ は G で正則となる. 従って A, B のどちらか一方が求まれば他方も求まる. B は偏角を表わすので B の方が求めやすい. Prob. 1 の (1.13)~(1.15) に対応する B の条件は容易に求まって

$$\begin{cases} \Delta B = 0 \quad \text{in } G, \quad B(u,0)=0 \end{cases}$$

$$(2.6)\quad \begin{cases} B(K,v) = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi & \sigma < v < 1 \\ \frac{\pi}{4} & 0 < v < \sigma \end{cases} = \varphi_\sigma(v) , \\ B(u,1) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \delta < u < K \\ \pi & 0 < u < \delta \end{cases} = \psi_\delta(u) \end{cases}$$

であることがわかる．(1.16)に対応しては(2.5)より

$$(2.7)\quad e^{-A(0,v)} = \left|\frac{dw}{dz}\right|\Big|_\gamma = \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|\Big|_\gamma = \frac{4}{\ell_\gamma} = const$$

$$(2.8)\quad \therefore A(0,v) = A_0 = const \quad on\ \gamma$$

$$(2.9)\quad \therefore 0 = \frac{\partial}{\partial v} A(0,v) = -\frac{\partial B}{\partial u}(0,v)$$

$$(2.10)\quad \therefore \frac{\partial B}{\partial u}(0,v) = 0$$

従って(1.16)をuが満たせば(2.10)が成立する．逆に(2.10)をBが満たせば(2.9)より(2.8)が出て

$$(2.11)\quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial \tau} = C = const \quad on\ \gamma$$

が出る．そして

$$(2.12)\quad 1 = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial \tau} d\ell = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial v} d\ell = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\ell_\gamma}{4}$$

$$(2.13)\quad \therefore \frac{\partial u}{\partial v} = 4/\ell_\gamma \quad on\ \gamma$$

となって(1.16)が満たされる．

さてBを具体的に求めるにはσ, δを決定しなければならない．また写像函数(2.5)を定めるためにはBからAを求めるわけであるがこのとき定数の任意性が残る．Bから一意的に定まる部分を$A_1(u,v)$とし，定数部分を(2.8)よりA_0とすると

$$(2.14)\quad A(u,v) = A_0 + A_1(u,v)$$

と書ける．σ, δ, A_0 の決定は Prob. 2 を解くことを式で表現すればよい．そのために次の関数を導入する．

(2.15) $$I(v) = e^{-A_0} \cdot \mathrm{Im}\,[Z(0,v) - Z(0,0)] = \int_0^v \cos B(0,\eta)\,d\eta$$

(2.16) $$S(v) = \int_0^v e^{A(K,\eta)}\,d\eta$$

$I(v)$ は Fig. 3 において O と H の y 座標の差を表わし，$S(v)$ は A と F の距離である．従って σ, δ, A_0 は

(i) $\delta > 0$ のとき（2-component プラズマのとき）

(2.17) $$I(1) = 0\ ,\quad S(1) = 1\ ,\quad S(\sigma) = a$$

(ii) $\delta = 0$ のとき（1-component プラズマのとき）

(2.18) $$S(1) = 1\ ,\quad S(\sigma) = a$$

を満たすものとして決定される．γ は x 軸の上になければならない，即ち $I(v) > 0$，$0 < v < 1$ でなくてはならないがそれが満たされることは示すことができる．

以上で Prob. 2 と等価な問題を考えることができる．（Fig. 4 参照）

Prob. 3　次を満たす $A(u,v) + iB(u,v)$ を求めよ．但し A と B は共役調和で

$$\begin{cases} \Delta B_{\sigma,\delta}(u,v) = 0 \quad \text{in } G & (2.19) \\ B_{\sigma,\delta}(u,0) = 0 & (2.20) \\ B_{\sigma,\delta}(K,v) = \varphi_\sigma(v) & (2.21) \\ B_{\sigma,\delta}(u,1) = \psi_\delta(u) & (2.22) \end{cases}$$

$$(2.23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} B_{\sigma,\delta}(0,v) = 0 \\ \text{かつ} \\ A_{\sigma,\delta}(u,v) \text{ は } (2.14) \text{ の形で } A_{\sigma,\delta},\ B_{\sigma,\delta} \text{ は } (2.17), (2.18) \text{ を満たす.} \end{cases}$$

を満たす. ここで a, k は与えられた正定数で $\frac{1}{2} < a \leq 1$ である.

(2.19) ~ (2.23) を満たす $B_{\sigma,\delta}(u,v)$, それから一意的に定まる $A_{1\sigma\delta}(u,v)$ は具体的に求めることができる.

$$(2.24)\quad B_{\sigma,\delta}(u,v) = \frac{\pi}{2}v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1-(-)^n}{2} + \cos(n\pi\sigma)\right\} \cdot \frac{\cosh(n\pi u)}{\cosh(n\pi k)} \cdot \sin(n\pi v)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}\delta \cdot \frac{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}v\right\}}{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}\right\}} \cdot \cos\left\{\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}u\right\}$$

$$(2.25)\quad A_{1\sigma,\delta}(u,v) = \frac{\pi}{2}u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1-(-)^n}{2} + \cos(n\pi\sigma)\right\} \cdot \frac{\sinh(n\pi u)}{\cosh(n\pi k)} \cdot \cos(n\pi v)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}\delta \cdot \frac{\cosh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}v\right\}}{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}\right\}} \cdot \sin\left\{\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}u\right\}$$

である.

§3 数値計算例

分岐についてその構造をみるには次のようにすればわかり易い. a を分岐変数にとって, まず $k>0$ を定める. (2.24) の $B_{\sigma,\delta}$ を使って $I_{\sigma,\delta}(1)$ のグラフを $\sigma-\delta$ 平面で作り, (2.17), (2.18) を $I_{\sigma,\delta}(1)$ が満たすよう (σ, δ) をプロットしてゆけば σ と δ はもはや独立変数ではなくなる. ~~各~~の σ に対して $a(\sigma) = s(\sigma)$ を

プロットしてゆけばよい。この $a=a(\sigma)$ 曲線に対して a を与えたとき（即ち容器の形を決めるということ），$a(\sigma)$ 曲線との交点の数が Prob.2 の解の数となる。

数値計算例を Fig.5 ～ Fig.11 に示す。Fig.5 ～ Fig.7 は $K=0.2$，Fig 8 ～ Fig.11 は $K=1.0$ である。Fig 5 と Fig.8 に $a=a(\sigma)$ の様子を示した。いずれも上の曲線が 1-component プラズマ（$\delta=0$）のときのもので下の曲線が 2-component プラズマ（$\delta>0$）のときのものである。今 $a=0.57$ としてみると Fig 5 においても Fig 8 においても $a=a(\sigma)$ との交点は3つあるため平衡解は3つあることになる。それを図示したのが Fig 6，7，Fig 9 ～ 11 である。$K=0.2$ のときは都合で2つしか示していない。$\sigma-\delta$ 面のメッシュのとり方が粗かったため $a=a(\sigma)$ のグラフはガタガタしているが傾向はよく表われていると思う。これから分岐の様子がわかる。a が1に近いところでは解は1つしかなく，a が小さくなるにつれて解は2個，3個となってゆく。また特に Fig 11 がひどいが形が閉じてないのは σ，$\delta(\sigma)$ の値によって $A_{\sigma\delta}(u,v)$ が特異的になり数値誤差が相当出ているためと思われる。この点は今検討中である。

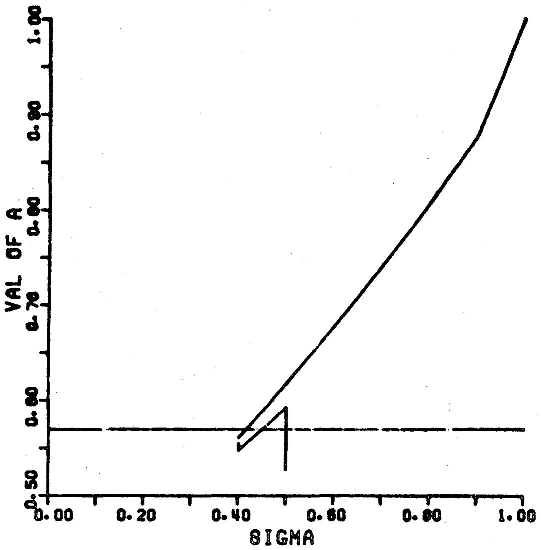
参考文献

A.S. Demidov ; "The form of a steady plasma subject to the skin

effect in a Tokamak with non-circular cross-section "
Nuc1. Fusion, 15, 765-768, (1975)

A. S. Demidov; " Equilibrium form of a steady plasma "
Phys. Fluids, 21 (6), 902-904, (1978)

FIGURE OF A(KAPP,SIGM)



KAPP=0.20
A =0.5700
NUM =2.

A1 =0.5613
DEL=0.0000
SIG=0.4000
ERR=-0.0087

A2 =0.5746
DEL=0.1000
SIG=0.5000
ERR=0.0046

Fig. 5

THE FORM OF PLASMA

KAPP=0.2000
AO =0.5700

A =0.5634
DELT=0.0000
SIGM=0.4000

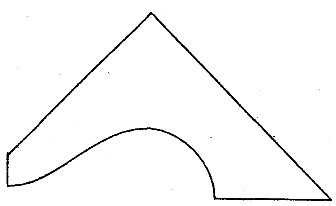


Fig 6

THE FORM OF PLASMA

KAPP=0.2000
AO =0.5700

A =0.5745
DELT=0.1000
SIGM=0.5000

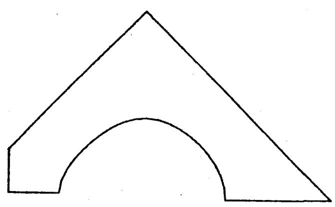
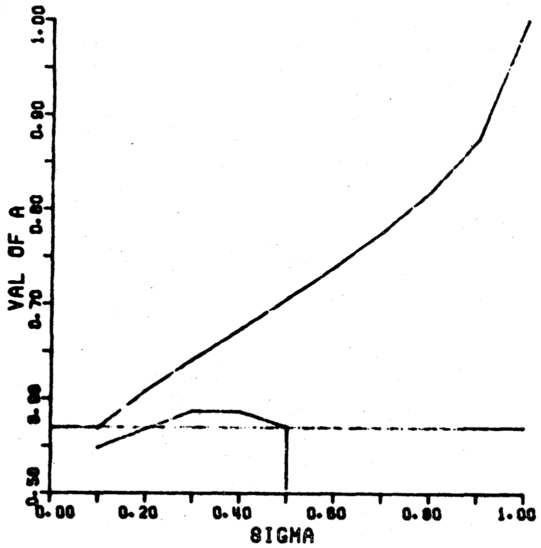


Fig. 7

FIGURE OF A(KAPP,SIGM)



KAPP=1.00
A =0.5700
NUM =2.

A1 =0.5687
DEL=0.0000
SIG=0.1000
ERR=-0.0013

A2 =0.5706
DEL=0.9000
SIG=0.5000
ERR=0.0006

Fig. 8

THE FØRM ØF PLASMA

KAPP=1.0000
A0 =0.5700
A =0.5708
DELT=0.0000
SIGM=0.1000

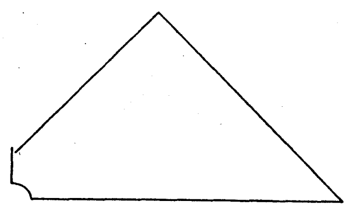


Fig. 9

THE FØRM ØF PLASMA

KAPP=1.0000
A0 =0.5700
A =0.5762
DELT=0.6300
SIGM=0.2000

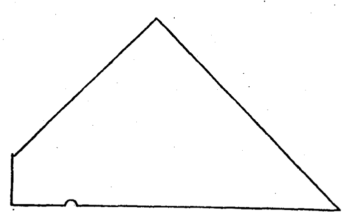


Fig 10

THE FØRM ØF PLASMA

KAPP=1.0000
A0 =0.5700
A =0.6380
DELT=0.9000
SIGM=0.5000

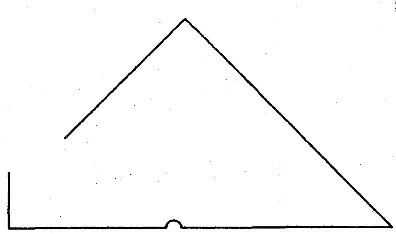


Fig. 11