数理解析研究所講究録
第554巻 1985年 47-68

三角行列分解による行列固有値問題の解析

富大・工 川田 勉 (T. Kawata)

§1. 序

可積分と称される非線形方程式を逆散乱法で処理しようとすれば，常に固有値方程式の解析が主テーマとなる。それが高次行列形式を取ると，あつかいが複雑になるのみならず，従来にない困難も生じてくる。本文では，以下に示す M×M次行列系の問題を取り上げ，それに付随する三角行列分解テクニックとその応用を解説する。

$$\Phi_x = \{ i\lambda A + Q(x) \} \Phi . \qquad (1.1)$$

ここに λ は Spectral parameter, $A=(a_1, a_2, \cdots, a_M)$ は対角定数で $a_M < a_{M-1} < \cdots < a_1$，又 $Q(x)$ は Potential で off-diagonal，かつ遠方で速やかに消失又はもっと強く有限台 ($a \leqq x \leqq b$) 上にあるとされる。三角行列分解は，Shabat[1)]の逆理論の可解性を述べた論文にみられる。又高次行列系の問題は Caudrey,[2)] ごく最近のものとしては Beals-Coifman によるもの[3)] がある。

§2. 解析接続と三角行列分解

$\lambda=\xi$(実数)として，(1.1)式に次の変換を行う。

$$\Psi(\xi,x)=e^{-i\xi Ax}\Phi(\xi,x), \tag{2.1a}$$

$$\Psi_x=e^{-i\xi Ax}Q(x)e^{i\xi Ax}\Psi, \tag{2.1b}$$

$$\Psi(\xi,x)\to C^{\pm}(\xi) \quad \text{as } x\to\pm\infty. \tag{2.1c}$$

(2.1b), (2.1c)は次のボルテラ型積分方程式に等価である。

$$\Psi(\xi,x)=C^{\pm}(\xi)+\int_{\pm\infty}^{x}e^{-i\xi Ax}Q(y)e^{i\xi Ay}\Psi(\xi,y)\,dy. \tag{2.2}$$

明らかに $\Psi(\xi,x)$ は Boundされて $C^{\pm}(\xi)$ が存在し，散乱行列 $S(=[s_{ij}])$ が定義できる，

$$S(\xi)=C^{+}(\xi)[C^{-}(\xi)]^{-1}. \tag{2.3}$$

$\Psi^{\pm}=\Psi[C^{\pm}]^{-1}$ を使うと，$\Psi^{-}=\Psi^{+}S$ ともかける。$|\xi|=\infty$ 近傍で展開でき，次の評価を得る。

$$\Psi^{\pm}(\xi,x)-E=O(1/\xi),\quad S(\xi)-E=O(1/\xi). \tag{2.4}$$

$\lambda=\xi+i\eta$ (ηは正又は負)に対しても Boundされる函数 $\textcircled{H}(\lambda,x)$ を，次の変換で導入できる。

$$\textcircled{H}(\lambda,x)=\Phi(\lambda,x)e^{-i\lambda Ax}, \tag{2.5a}$$

$$\textcircled{H}_x=i\lambda[A,\textcircled{H}]+Q(x)\textcircled{H}. \tag{2.5b}$$

c_jをスカラー積分定数，$\theta_j (= \textcircled{H}|j\rangle)$を行列Ⓗの第$j$列ベクトル成分とすると，(2.5b)は次のFredholm型方程式に帰される。

$$\theta_j(\lambda,x)=c_j|j\rangle+\left\{K_j\int_{-\infty}^{x}+(K_j-E)\int_{x}^{\infty}\right\}e^{i\lambda(A-a_j)(x-y)}Q(y)\theta_j(\lambda,y)dy. \quad (2.6)$$

$\eta\gtrless 0$に応じ肩字(P,N)をⒽ，K_j等に添えるものとする。積分内の指数項を押えるために，$K_j^{P,N}$を対角定数行列，

$$K_j^P=(1,\cdots,1,k_j^P,0,\cdots,0),\ K_j^N=(0,\cdots,0,k_j^N,1,\cdots 1), \quad (2.7)$$

とする。Potentialの条件から$\theta_j^{P,N}(\lambda,x)$はλの上下半面でそれぞれanalyticかつ実軸にcontinuous downする。一方$x\gg b$で

$$\theta_j^P(\lambda,x)=c_j^P|j\rangle+e^{i\lambda(A-a_j)(x-b)}u_j^P(\lambda),$$

但し

$$u_j^P(\lambda)=K_j^P\int_a^b e^{i\lambda(A-a_j)(x-y)}Q(y)\theta_j^P(\lambda,y)dy.$$

$u_j^P(\lambda)$はanalyticであり，その第1〜第j成分のみがnon-zeroであることから，行列$\textcircled{H}^P$に直すと

$$\textcircled{H}^P(\lambda,x)=e^{i\lambda A(x-b)}U^P(\lambda)e^{-i\lambda A(x-b)} \quad (x\gg b),$$

と書ける。ここに$U^P(\lambda)$は上三角行列で$\eta>0$でanalyticである。U^Pに代って$U_0^P(\lambda)=e^{-i\lambda Ab}U^P(\lambda)e^{i\lambda Ab}$を以下で使う。これは，Potentialが有限台上にあっても$\eta=\infty$でBoundされない。

以上の手続きを繰返すと，$x\to\{-\infty,+\infty\}$でそれぞれ，

$$\begin{cases} \textcircled{H}^P(\lambda,x)\to e^{i\lambda Ax}\{L_0^P(\lambda),\,U_0^P(\lambda)\}e^{-i\lambda Ax}, \\ \textcircled{H}^N(\lambda,x)\to e^{i\lambda Ax}\{U_0^N(\lambda),\,L_0^N(\lambda)\}e^{-i\lambda Ax}. \end{cases} \qquad (2.8)$$

随伴系も定義しておく。

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_x=-\{i\lambda A+Q^T(x)\}\tilde{\Phi}, & (2.9a) \\ \hat{\tilde{\Phi}}=e^{i\xi Ax}\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\textcircled{H}}=\hat{\tilde{\Phi}}e^{i\lambda Ax}. & (2.9b) \end{cases}$$

S行列は，$\tilde{S}=\hat{\tilde{\Phi}}(x=+\infty)[\hat{\tilde{\Phi}}(x=-\infty)]^{-1}$，又 $\tilde{S}^TS=E$。$x\to\{-\infty,\infty\}$で

$$\begin{cases} \tilde{\textcircled{H}}^P(\lambda,x)\to e^{-i\lambda Ax}\{\tilde{U}_0^P(\lambda),\,\tilde{L}_0^P(\lambda)\}e^{i\lambda Ax}, \\ \tilde{\textcircled{H}}^N(\lambda,x)\to e^{-i\lambda Ax}\{\tilde{L}_0^N(\lambda),\,\tilde{U}_0^N(\lambda)\}e^{i\lambda Ax}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

これらの$\textcircled{H}$行列を$x=\pm\infty$で規格化する。

$$\begin{aligned} \{\textcircled{H}^-,\textcircled{H}^+\} &= \textcircled{H}^P e^{i\xi Ax}\{[L_0^P]^{-1},[U_0^P]^{-1}\}e^{-i\xi Ax} \\ &= \textcircled{H}^N e^{i\xi Ax}\{[U_0^N]^{-1},[L_0^N]^{-1}\}e^{-i\xi Ax}, \qquad (2.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\textcircled{H}}^-,\tilde{\textcircled{H}}^+\} &= \tilde{\textcircled{H}}^P e^{-i\xi Ax}\{[\tilde{U}_0^P]^{-1},[\tilde{L}_0^P]^{-1}\}e^{i\xi Ax} \\ &= \tilde{\textcircled{H}}^N e^{-i\xi Ax}\{[\tilde{L}_0^N]^{-1},[\tilde{U}_0^N]^{-1}\}e^{i\xi Ax}. \qquad (2.11b) \end{aligned}$$

当然 $\textcircled{H}^\pm$, $\tilde{\textcircled{H}}^\pm\to E$ as $x\to\pm\infty$，又これらも(2.5b)等を満たしている。この事は重要である。換言すれば，変換：$\textcircled{H}(\xi,x)\to$

$Ⓗ(\xi,x)e^{i\xi Ax}C(\xi)e^{-i\xi Ax}$ は x-独立な不変量 $C(\xi)$ を生む。この行列 C の種類は，取り合せる Ⓗ-函数の種類に依る。S行列もその一つであり，$[\tilde{Ⓗ}^{\pm}]^T Ⓗ^{\pm} = E$ もそうである。この他に次の様な G-行列が定義できる。

(i) 対角で analytic なもの。

$$G^P = [\tilde{Ⓗ}^P]^T Ⓗ^P, \qquad G^N = [\tilde{Ⓗ}^N]^T Ⓗ^N. \qquad (2.13)$$

(ii) Riemann-Hilbert 問題を定義するもの。

$$\begin{cases} [\tilde{Ⓗ}^N]^T Ⓗ^P = e^{i\xi Ax} G e^{-i\xi Ax}, \\ [\tilde{Ⓗ}^P]^T Ⓗ^N = e^{i\xi Ax} \tilde{G} e^{-i\xi Ax}. \end{cases} \qquad (2.13)$$

これらの x-独立な行列は，先に導入した三角行列で表現できる。特に S 行列を取上げよう。

$$S = U_0^P [L_0^P]^{-1} = L_0^N [U_0^N]^{-1} = [\tilde{S}^T]^{-1}. \qquad (2.14)$$

行列 S の 2 種の Principal Minor を定義しよう。

$$\det{}_j^{(+)} S = \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j1} & \cdots & s_{jj} \end{vmatrix} = |s_{11}, \cdots, s_{jj}|, \quad \det{}_j^{(-)} S = |s_{jj}, \cdots, s_{MM}|.$$

$\det_j^{(+)}(LU) = \det_j^{(+)}L \cdot \det_j^{(+)}U$ 等に注意して，$\{\det_j^{(+)}\tilde{S}, \det_j^{(-)}S\}$ は上半面に，$\{\det_j^{(+)}S, \det_j^{(-)}\tilde{S}\}$ は下半面に解析接続される。

(2.4)の行列 G, $\tilde{G}$ を調べるために，それを S 行列要素で表示する事を考える。その対応は三角行列を介して行われている

が一意的でない。これを処理するために，S行列を

$$\begin{cases} S = S_L^N S_D^N S_U^N = S_U^P S_D^P S_L^P \ , \\ \tilde{S} = \tilde{S}_L^P \tilde{S}_D^P \tilde{S}_U^P = \tilde{S}_U^N \tilde{S}_D^N \tilde{S}_L^N \ , \end{cases} \tag{2.15}$$

とLDU, UDL分解する。$S_{L,U}$等は対角成分に1を持つ三角行列である。$\tilde{S}^T S = E$より次のorthogonalityを得る。

$$\tilde{S}_D^P S_D^P = \tilde{S}_D^N S_D^N = E \ , \tag{2.17a}$$

$$[\tilde{S}_L^P]^T S_U^P = [\tilde{S}_U^P]^T S_L^P = [\tilde{S}_U^N]^T S_L^N = [\tilde{S}_L^N]^T S_U^N = E . \tag{2.17b}$$

(2.14), (2.15)の比較から次の分解が必要となる．

$$L_0^P = [\tilde{S}_U^P]^T D_L^P \ , \qquad U_0^P = S_U^P D_U^P \ , \ etc..$$

かくして現れた対角行列 $D_{L,U}^{P,N}$, $\tilde{D}_{L,U}^{P,N}$ とS行列の関係は

$$S_D^P = D_U^P [D_L^P]^{-1} = \tilde{D}_U^P [\tilde{D}_L^P]^{-1}, \ etc.,$$

で与えられるが，明らかに自由度があってD行列は一意に定まらない。この自由度を，一般性を損わずに除去できる．最も簡単なものとして，我々は次の付加条件を使用する。

$$D_{L,U}^{P,N} = \tilde{D}_{L,U}^{P,N} \ . \tag{2.18}$$

この行列を決定せねばならない。$S_D^N = (d_1, \cdots, d_M)$として $S = S_L^N S_D^N S_U^N$ のPrincipal minorを取ろう。

$$\det{}_j^{(+)} S = \det{}_j^{(+)} S_D^N = | s_{11}, \cdots, s_{jj} | = \prod_{k=1}^{j} d_k \ .$$

これよりd_kを定める事ができる，

$$\begin{cases} S_D^N = \left(s_{11}, \dfrac{\mu_2^N}{s_{11}}, \cdots\cdots, \dfrac{\tilde{s}_{MM}}{\mu_{M-2}^N}, \dfrac{1}{\tilde{s}_{MM}} \right), \\ S_D^P = \left(\dfrac{1}{\tilde{s}_{11}}, \dfrac{\tilde{s}_{11}}{\mu_2^P}, \cdots\cdots, \dfrac{\mu_{M-2}^P}{s_{MM}}, s_{MM} \right). \end{cases} \tag{2.19}$$

但し，

$$\mu_j^N = | s_{11}, \cdots, s_{jj} | = | \tilde{s}_{j+1,j+1}, \cdots, \tilde{s}_{MM} |,$$

$$\mu_j^P = | \tilde{s}_{11}, \cdots, \tilde{s}_{jj} | = | s_{j+1,j+1}, \cdots, s_{MM} |.$$

(2.19)を直接的に因子分解して，$D_{L,U}^{P,N}$を定める。

$$D_L^N = (s_{11}, \mu_2^N, \cdots, \tilde{s}_{MM}, 1), \quad D_U^N = (1, s_{11}, \cdots, \mu_{M-2}^N, \tilde{s}_{MM}),$$

$$D_L^P = (\tilde{s}_{11}, \mu_2^P, \cdots, s_{MM}, 1), \quad D_U^P = (1, \tilde{s}_{11}, \cdots, \mu_{M-2}^P, s_{MM}). \tag{2.20}$$

これらにおいて $\det S = \det \tilde{S} = 1$ も使われている。(2.18),(2.20)のもとで，先に触れたx-独立な行列の表示が求まる。

$$G^P = D_U^P D_L^P, \qquad G^N = D_U^N D_L^N, \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} G = D_U^N [\tilde{S}_U^N]^T S_U^P D_U^P = D_L^N S_U^N [\tilde{S}_U^P]^T D_L^P, \\ \tilde{G} = D_U^P S_L^P [\tilde{S}_L^N]^T D_U^N = D_L^P [\tilde{S}_L^P]^T S_L^N D_L^N. \end{cases} \tag{2.22}$$

§3. Riemann-Hilbert 問題

Potentialに強い条件が課されているので，実軸上で定義

された各量も，実軸上の近傍まで解析接続される。それで，(2.4)の関係を使うと，$\eta \gtrless 0$ の各領域で $|\eta| \to \infty$ として，

$$D_{L,U}^{P,N}(\lambda) \to E\ , \tag{3.1a}$$

$$\textcircled{H}^{P,N}(\lambda,x),\ \widetilde{\textcircled{H}}^{P,N}(\lambda,x) \to E\ , \tag{3.1b}$$

が得られる。(3.1a)は，Principal minor の解析接続より明らかである。(3.1b)に対しては，$\textcircled{H}^{\pm} = e^{i\xi A x}\Psi^{\pm}e^{-i\xi A x}$ と(2.11)を使えば良い。(2.22)第一式の Principal minor を取ろう，

$$\det_j^{(-)}(D_L^N D_L^P) = \det_j^{(-)}(D_U^N D_U^P)\cdot \det_j^{(-)}([\widetilde{S}_L^P]^{-1}\widetilde{S}_U^N). \tag{3.2}$$

j に関し順次分解してみると，これはスカラー R.H.問題であり，(3.1a)のもとで，$D_{L,U}^{P,N}$ は $\widetilde{S}_L^P$，$\widetilde{S}_U^N$ で再構成できる。行列R.H.問題(2.13)を，次の様に書く。

$$\begin{cases} [\widetilde{\textcircled{H}}^N]^T\,\textcircled{H}^P = e^{i\xi A x}(E - G_0)e^{-i\xi A x}, \\ [\widetilde{\textcircled{H}}^P]^T\,\textcircled{H}^N = e^{i\xi A x}(E - \widetilde{G}_0)e^{-i\xi A x}. \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.2)もそうであるが，$D_{L,U}^{P,N}(\lambda)$ が上下半面に零点を持つ時は各R.H.問題は特異であると称され，(3.1)を課したのみでは一意に解けない。別に，零点に関する情報が必要で，これがSoliton解のパラメータとなる。[4,5] けれど，これに関する記述はめんどうになるので，本文では特に断らない限り零点のない"正則"なケースを考えるものとする。

(3.3)才一式を操作して，

$$Ⓗ^P(\lambda,x)=E-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}\left\{Ⓗ^N[G^N]^{-1}e^{-i\xi Ax}G_0e^{i\xi Ax}\right\}(\xi,x),\ (\eta>0)$$

を得て $Ⓗ^P(\lambda,x)$の構成ができるが，積分内の$Ⓗ^N(\xi,x)$を知る必要がある。これは，$Ⓗ^N(\lambda,x)$の類似の表示も用意して $\lambda\to\xi\pm i0$ とした時に得られる連立特異積分方程式の解法という難かしい問題に帰着する。この難点を回避して(3.3)より何が判るか？

2種のPotential $Q(x)$, $Q(x)+\Delta Q(x)$に属するR.H.問題を考える。(3.3)の有限変分を取って，次の公式を得る。[6,7]

$$\Delta Q(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A,\ \Delta\Xi_1(\xi,x)+\Delta\Xi_2(\xi,x)\right]d\xi, \qquad (3.4)$$

但し，
$$\Delta\Xi_1=\left([\widetilde{Ⓗ}^N]^T\right)^{-1}e^{i\xi Ax}\Delta G_0e^{-i\xi Ax}[Ⓗ^P]^{-1},$$

$$\Delta\Xi_2=\left([\widetilde{Ⓗ}^N]^T\right)^{-1}[\Delta\widetilde{Ⓗ}^N]^T\Delta Ⓗ^P[Ⓗ^P]^{-1}.$$

片方のPotentialを零とすると，次式を得る。

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A,\ Ⓗ^P(\xi,x)+[\widetilde{Ⓗ}^N(\xi,x)]^T\right]d\xi. \qquad (3.5)$$

(3.3),(3.5)は，もっと対称性の良い，かつ(3.2)に現れた行列$\{\widetilde{S}_L^P(\xi),\ \widetilde{S}_U^N(\xi)\}$を使った形に直す事ができる。そこで，

$$Ⓗ_{L,U}^{P,N}=Ⓗ^{P,N}[D_{L,U}^{P,N}]^{-1},\quad \widetilde{Ⓗ}_{L,U}^{P,N}=\widetilde{Ⓗ}^{P,N}[D_{L,U}^{P,N}]^{-1}, \qquad (3.6)$$

導入しよう。明らかに $[\tilde{\textcircled{H}}{}_L^{P,N}]^T\,\textcircled{H}{}_U^{P,N} = E$ 等が成立つ．これ
(2.11a)を書き直そう。

$$\textcircled{H}{}^{\dagger} = \textcircled{H}{}_U^P e^{i\xi Ax}[\tilde{S}_L^P]^T e^{-i\xi Ax} = \textcircled{H}{}_L^N e^{i\xi Ax}[\tilde{S}_U^N]^T e^{-i\xi Ax}.$$

に変形して(3.3)と異った形の$R.H.$問題を得る。

$$\begin{aligned}\textcircled{H}{}_U^P - \textcircled{H}{}_L^N &= \textcircled{H}{}_U^P e^{i\xi Ax}(E-[\tilde{S}_L^P]^T)e^{-i\xi Ax} \\ &\quad - \textcircled{H}{}_L^N e^{i\xi Ax}(E-[\tilde{S}_U^N]^T)e^{-i\xi Ax}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

これを(3.5)に使うには，以下に示す操作を使う。

$$\textcircled{H}{}^P = \frac{1}{2}\left(\textcircled{H}{}^P+[\textcircled{H}{}^P]^{-1}-2E\right)+\left\{E+\frac{1}{2}\left(\textcircled{H}{}^P-[\textcircled{H}{}^P]^{-1}\right)\right\}.$$

更に，

$$\textcircled{H}{}^P-[\textcircled{H}{}^P]^{-1} = \left(\textcircled{H}{}_U^P-[\textcircled{H}{}_U^P]^{-1}\right)+\left\{\left(\textcircled{H}{}^P-[\textcircled{H}{}^P]^{-1}\right)-\left(\textcircled{H}{}_U^P-[\textcircled{H}{}_U^P]^{-1}\right)\right\}.$$

$|\lambda|\to\infty$で，$\textcircled{H}{}^P = E + O(1/\lambda)$なので，

$$\textcircled{H}{}^P+[\textcircled{H}{}^P]^{-1}-2E = O(1/\lambda^2).$$

又に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\textcircled{H}{}^P+[\textcircled{H}{}^P]^{-1}-2E\right\}d\xi = \oint\left\{\textcircled{H}{}^P+[\textcircled{H}{}^P]^{-1}-2E\right\}d\lambda = 0.$$

同様に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\textcircled{H}{}^P-[\textcircled{H}{}^P]^{-1}\right)-\left(\textcircled{H}{}_U^P-[\textcircled{H}{}_U^P]^{-1}\right)\right\}d\xi = 0.$$

以上から次の等式を得る，

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}]\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}_{U}-[\textcircled{H}^{P}_{U}]^{-1}]\,d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A,[\tilde{\textcircled{H}}^{N}]^{T}]\,d\xi=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{N}_{L}-[\textcircled{H}^{N}_{L}]^{-1}]\,d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}+[\tilde{\textcircled{H}}^{N}]^{T}]\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}_{U}-\textcircled{H}^{N}_{L}]\,d\xi.$$

これと，(3.7)を(3.5)に代入すれば，

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}_{U}-\textcircled{H}^{N}_{L}]\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{P}_{U}e^{i\xi Ax}(E-[\tilde{S}^{P}_{L}]^{T})e^{-i\xi Ax}]\,d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\textcircled{H}^{N}_{L}e^{i\xi Ax}(E-[\tilde{S}^{N}_{U}]^{T})e^{-i\xi Ax}]\,d\xi. \quad (3.8)$$

(3.7)の意味を示すために，具体例を調べたい。まず，

$$\textcircled{H}^{P}_{U}|1\rangle=\textcircled{H}^{+}|1\rangle,\quad \textcircled{H}^{N}_{L}|M\rangle=\textcircled{H}^{+}|M\rangle, \quad (3.9)$$

に注意しておく．(3.7)は，$\beta_{kj}=a_k-a_j$ として，分解しておく。

$$\textcircled{H}^{P}_{U}|j\rangle-\textcircled{H}^{N}_{L}|j\rangle=-\sum_{k=1}^{j-1}\textcircled{H}^{P}_{U}|k\rangle\langle k|[\tilde{S}^{P}_{L}]^{T}|j\rangle e^{i\xi\beta_{kj}x}$$

$$+\sum_{k=j+1}^{M}\textcircled{H}^{N}_{L}|k\rangle\langle k|[\tilde{S}^{N}_{U}]^{T}|j\rangle e^{i\xi\beta_{kj}x}. \quad (3.10)$$

$n=3$のケースを例に取り，必要事項をリストする。

$$\textcircled{H}^P_U=\left[\theta^P_1,\ \frac{\theta^P_2}{\tilde{S}_{11}},\ \frac{\theta^P_3}{S_{33}}\right],\quad \textcircled{H}^N_L=\left[\frac{\theta^N_1}{S_{11}},\ \frac{\theta^N_2}{\tilde{S}_{33}},\ \theta^N_3\right],\ (3.11a)$$

$$\tilde{S}^P_L=\begin{pmatrix}1, & & \\ \tilde{\gamma}^2_1, & 1 & \\ \tilde{\gamma}^3_1, & -\gamma^2_3, & 1\end{pmatrix},\quad \tilde{S}^N_U=\begin{pmatrix}1 & -\gamma^2_1 & \tilde{\gamma}^1_3\\ & 1 & \tilde{\gamma}^2_3\\ & & 1\end{pmatrix}.\quad (3.11b)$$

$$\tilde{\gamma}^2_1=\tilde{S}_{21}/\tilde{S}_{11},\quad \tilde{\gamma}^3_1=\tilde{S}_{31}/\tilde{S}_{11},\quad \gamma^2_3=S_{23}/S_{33},$$

$$\tilde{\gamma}^1_3=\tilde{S}_{13}/\tilde{S}_{33},\quad \tilde{\gamma}^2_3=\tilde{S}_{23}/\tilde{S}_{33},\quad \gamma^2_1=S_{21}/S_{11}.\quad (3.11c)$$

(3.10)は次の様に書ける。

$$\theta^P_1-\frac{\theta^N_1}{S_{11}}=-\frac{\theta^N_2}{\tilde{S}_{33}}\gamma^2_1 e^{i\xi\beta_{21}x}+\theta^N_3\tilde{\gamma}^1_3 e^{i\xi\beta_{31}x},\quad (3.12a)$$

$$\frac{\theta^P_2}{\tilde{S}_{11}}-\frac{\theta^N_2}{\tilde{S}_{33}}=-\theta^P_1\tilde{\gamma}^2_1 e^{i\xi\beta_{12}x}+\theta^N_3\tilde{\gamma}^2_3 e^{i\xi\beta_{32}x},\quad (3.12b)$$

$$\frac{\theta^P_3}{S_{33}}-\theta^N_3=-\theta^P_1\tilde{\gamma}^3_1 e^{i\xi\beta_{13}x}+\frac{\theta^P_2}{\tilde{S}_{11}}\gamma^2_3 e^{i\xi\beta_{23}x}.\quad (3.12c)$$

$\theta^P_1(\lambda,x)$, $\theta^N_3(\lambda,x)$は Gel'fand-Levitan核表示を持てる事が知られている。[7,8] 例えば，

$$K^P(x,y)=-\frac{\beta_{12}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\theta^P_1(\xi+i0,x)-|1\rangle\right\}e^{i\xi\beta_{12}(x-y)}d\xi.\quad (3.13)$$

これに(3.12a)より作った$\theta^P_1(\lambda,x)$を代入すると

$$K^P(x,y)=\frac{\beta_{12}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\theta^N_2}{\tilde{S}_{33}}\gamma^2_1 e^{-i\xi\beta_{12}y}-\theta^N_3\tilde{\gamma}^1_3 e^{-i\xi(\beta_{12}y+\beta_{23}x)}\right\}(\xi,x)d\xi.$$

ここで(3.8)によれば，

$$Q|1\rangle = -\frac{1}{2\pi}(A-a_1)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Theta_2^N}{\tilde{S}_3^3}\gamma_1^2 e^{-i\xi\beta_{12}x} - \Theta_3^N \tilde{\gamma}_3^1 e^{-i\xi\beta_{13}x}\right\}d\xi .$$

明らかに $\beta_{12}Q(x)|1\rangle = (A-a_1)K^P(x,x)$。以上を見てみると，R.H.問題(3.7)，Potentialの公式(3.8)及びλ-独立な核(3.13)により，Gel'fand-Levitan方程式の構成とそれによるPotentialの回復ができる。所で，我々は，核を(3.9)の函数にしか定義できない。詳細は省略するが，この事は $4 \leq M$ では特に重大で，closeしたGel'fand-Levitan方程式が得られないのである。

§4. 無限小変分と2乗固有函数

(3.4)で変分を無限小とした時，$\Delta\Xi_2$ は高次オーダー故，落るが，この時(2.22)を使って注目すべき簡単化が得られる。

$$\delta\Xi_1 = \delta\Xi^{(0)} + \delta\Xi^{(P)} + \delta\Xi^{(N)}, \qquad (4.1)$$

但し

$$\delta\Xi^{(0)} = \textcircled{H}_L^N e^{i\xi Ax}\delta([\tilde{S}_U^N]^T S_U^P)e^{-i\xi Ax}[\textcircled{H}_U^P]^{-1}, \qquad (4.2a)$$

$$\delta\Xi^{(P)} = \textcircled{H}_L^P \delta D_U^P \cdot [D_U^P]^{-1}[\tilde{\textcircled{H}}_U^P]^T, \qquad (4.2b)$$

$$\delta\Xi^{(N)} = \textcircled{H}_U^N \delta D_U^N \cdot [D_U^N]^{-1}[\tilde{\textcircled{H}}_L^N]^T. \qquad (4.2c)$$

$\delta\Xi^{(P,N)}$ は，λの上下半面でanalyticでかつ $|\lambda|\to\infty$ で消失して，しかも積分(3.4)に寄与しない。これを直接計算で求

めるのはM=2を除いては困難である。[6] 所で(4.2a)は，$\tilde{S}^N_U$, $\tilde{S}^P_L$ の変分を含むが，次の様にしておくと後の都合で良い。

$$\delta\Xi^{(0)} = \textcircled{H}^N_L e^{i\xi Ax}(\delta\hat{S}^N_U)^T S^N_L e^{-i\xi Ax}[\tilde{\textcircled{H}}^N_U]^T - \textcircled{H}^P_U e^{i\xi Ax}(\delta\hat{S}^P_L)^T S^P_U e^{-i\xi Ax}[\tilde{\textcircled{H}}^P_L]^T. \tag{4.3}$$

さて(3.4)の逆の問題を考える。2種のPotential $Q+\Delta Q$, Qに対する解の変分$\Delta\Phi^\pm$は，$\Phi^\pm = \textcircled{H}^\pm e^{i\xi Ax}$を使って

$$\Delta\Phi^\pm(x) = \Phi^\pm(x)\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi^\pm(y)]^{-1}\Delta Q(y)\{\Phi^\pm(y)+\Delta\Phi^\pm(y)\}dy. \tag{4.4}$$

で与えられる。散乱行列の変分ΔSは，次のようになる。

$$\Delta S = S\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi^-(y)]^{-1}\Delta Q(y)\{\Phi^-(y)+\Delta\Phi^-(y)\}dy. \tag{4.5}$$

一方のPotentialをゼロとすると，

$$S(\xi)-E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay}Q(y)\,\textcircled{H}^-(\xi,y)e^{i\xi Ay}dy. \tag{4.6}$$

無限小変分に対しては，$\Delta\Phi^-$を落せば良い。特に，

$$\delta\Omega^P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay}[\tilde{\textcircled{H}}^P_U]^T\delta Q\cdot\textcircled{H}^P_L e^{i\xi Ay}dy, \tag{4.7a}$$

$$\delta\Omega^N = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay}[\tilde{\textcircled{H}}^N_L]^T\delta Q\cdot\textcircled{H}^N_U e^{i\xi Ay}dy. \tag{4.7b}$$

を定義すれば，$\delta\Omega^{P.N} = \delta\Omega^{P.N}_L + \delta\Omega^{P.N}_D + \delta\Omega^{P.N}_U$ と三角分解して

$$(\tilde{S}^P_L)^T \delta S^P_U = S^P_D \delta\Omega^P_U \tilde{S}^P_D, \quad (\tilde{S}^N_U)^T \delta S^N_L = S^N_D \delta\Omega^N_L \tilde{S}^N_D. \quad (4.8)$$

(4.3),(4.8)を(3.4)に代入する．

$$\delta Q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A, \Theta^N_L e^{i\xi Ax} S^N_D \delta\Omega^N_L \tilde{S}^N_D e^{-i\xi Ax}[\tilde{\Theta}^N_U]^T]d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A, \Theta^P_U e^{i\xi Ax} S^P_D \delta\Omega^P_U \tilde{S}^P_D e^{-i\xi Ax}[\tilde{\Theta}^P_L]^T]d\xi. \quad (4.9)$$

(4.7),(4.9)は，恒等演算子($\delta Q \to \delta S \to \delta Q$)を表す。各々の写像は，2乗固有函数を介して表現され，結局，恒等演算子の2乗固有函数による展開（つまり，completeness）を与える。具体例をM=3について与えよう．Notationを工夫する，

$$\delta Q = [\delta Q^2_3, \delta Q^3_1, \delta Q^1_2]^T, \quad \delta\tilde{Q} = [\delta Q^3_2, \delta Q^1_3, \delta Q^2_1], \quad Q = [Q^i_j].$$

$\Phi^{P,N} = e^{i\xi Ax}\Theta^{P,N}$ Κ2乗固有函数($\Phi = [\phi^i_j]$)を定義等する，

$$\Phi_{jk} = \begin{pmatrix} \phi^2_j \tilde{\phi}^3_k \\ \phi^3_j \tilde{\phi}^1_k \\ \phi^1_j \tilde{\phi}^2_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_{jk} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}^2_j \phi^3_k \\ \tilde{\phi}^3_j \phi^1_k \\ \tilde{\phi}^1_j \phi^2_k \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_2 - a_3, & & \\ & a_3 - a_1 & \\ & & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

これらベクトルを$|\delta Q, \delta\tilde{Q}\rangle$の如く，6次元に拡大し，通常のブラ・ケット演算も定義しておく，

$$|\Phi_{12}, \tilde{\Phi}_{12}\rangle\langle\tilde{\Phi}_{21}, \Phi_{21}| = \begin{pmatrix} |\Phi_{12}\rangle\langle\tilde{\Phi}_{21}|, & |\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{21}| \\ |\tilde{\Phi}_{12}\rangle\langle\tilde{\Phi}_{21}|, & |\tilde{\Phi}_{12}\rangle\langle\Phi_{21}| \end{pmatrix}.$$

6×6のDirac-δ，$\delta^{(6)}(x-y)$に関し次式が成立つ，

$$\delta^{(6)}(x-y)=\frac{-1}{2\pi}\begin{pmatrix}\hat{A}, & \\ & -\hat{A}\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\tilde{S}_{11}S_{33}}\Big\{\left|\Phi^P_{12},\tilde{\Phi}^P_{12}\right\rangle\frac{1}{\tilde{S}_{11}}\left\langle\tilde{\Phi}^P_{21},\Phi^P_{21}\right|$$

$$+\left|\Phi^P_{13},\tilde{\Phi}^P_{13}\right\rangle\left\langle\tilde{\Phi}^P_{31},\Phi^P_{31}\right|+\left|\Phi^P_{23},\tilde{\Phi}^P_{23}\right\rangle\frac{1}{S_{33}}\left\langle\tilde{\Phi}^P_{32},\Phi^P_{32}\right|\Big\}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\hat{A}, & \\ & -\hat{A}\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{S_{11}\tilde{S}_{33}}\Big\{\left|\Phi^N_{21},\tilde{\Phi}^N_{21}\right\rangle\frac{1}{S_{11}}\left\langle\tilde{\Phi}^N_{12},\Phi^N_{12}\right|$$

$$+\left|\Phi^N_{31},\tilde{\Phi}^N_{31}\right\rangle\left\langle\tilde{\Phi}^N_{13},\Phi^N_{13}\right|+\left|\Phi^N_{32},\tilde{\Phi}^N_{32}\right\rangle\frac{1}{\tilde{S}_{33}}\left\langle\tilde{\Phi}^N_{23},\Phi^N_{23}\right|\Big\}. \tag{4.10}$$

但し，各2乗固有函数の内，ケットはxに，ブラはyに依存する．これを使ってやれば，(1.1)を伴う可積分な非線形方程式を線形化した問題のGreen函数を構成できる．[9]

§5. Resolvent とFormalな逆散乱法

(1.1)の非同次問題

$$\boldsymbol{u}_x=\{i\lambda A+Q(x)\}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}(x) \tag{5.1}$$

を考え，特に解が次の条件に従うものとする

$$\boldsymbol{u}(\lambda,x)=O(1/\lambda). \tag{5.2}$$

(5.1)を，$|\lambda|=\infty$に沿って積分すれば，$\boldsymbol{v}$がλ-独立なので

$$\boldsymbol{v}(x)=-\frac{A}{2\pi}\oint\boldsymbol{u}(\lambda,x)\,d\lambda. \tag{5.3}$$

一方，(5.1)は定数変化法で積分できる。λの上下面でAnalyticな解$\mathfrak{u}^{P,N}(\lambda,x)$は，$Ⓗ^{P,N}$で書ける。

$$\mathfrak{u}^{P,N}(\lambda,x)=Ⓗ^{P,N}(\lambda,x)\left\{\int_{-\infty}^{x}K_0^{P,N}-\int_{x}^{\infty}(E-K_0^{P,N})\right\}$$
$$\times e^{i\lambda A(x-y)}\left[Ⓗ^{P,N}(\lambda,y)\right]^{-1}\mathfrak{v}(y)\,dy\,. \qquad (5.4)$$

ここで$K_0^{P,N}$はAに依存する対角射影行列で，Aの要素が$a_{j+1}<0<a_j$の時

$$K_0^P=(1\cdots\overset{(j)}{1},\overset{(j+1)}{0},\cdots0),\quad K_0^N=E-K_0^P\,,$$

と選ばれる。$\mathfrak{u}^{P,N}$で区分的にanalyticな函数$\mathfrak{u}(\lambda,x)$を定義する。これはやはり(5.1)を満たし，しかも(5.2)から

$$\mathfrak{u}(\lambda,x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\lambda;x,y)\mathfrak{v}(y)\,dy \qquad (5.5)$$

と，解核表示される。但し，Gは以下に示す$G^{P,N}$で構成される区分的にanalyticな核(Resolvent kernel)である。

$$G^P=\begin{cases}Ⓗ_U^P(x)K_0^Pe^{i\lambda A(x-y)}\left[\widetilde{Ⓗ}_L^P(y)\right]^T & (y\leqq x)\\ -Ⓗ_U^P(x)K_0^N\,e^{i\lambda A(x-y)}\left[\widetilde{Ⓗ}_L^P(y)\right]^T & (y\geqq x)\end{cases} \qquad (5.6a)$$

$$G^N=\begin{cases}Ⓗ_L^N(x)K_0^Ne^{i\lambda A(x-y)}\left[\widetilde{Ⓗ}_U^N(y)\right]^T & (y\leqq x)\\ -Ⓗ_L^N(x)K_0^P\,e^{i\lambda A(x-y)}\left[\widetilde{Ⓗ}_U^N(y)\right]^T & (y\geqq x).\end{cases} \qquad (5.6b)$$

(5.5)によれば，先の仮定(5.2)は確かに満たされる事がわかる。(5.3)，(5.5)は恒等演算子$(\mathfrak{v}(x)\to\mathfrak{u}(\lambda,x)\to\mathfrak{v}(x))$

を定義する。

$$\delta(x-y) = -\frac{1}{2\pi}A\oint G(\lambda; x, y)\, d\lambda .$$

(5.6)を代入して，(1.1)の固有函数のCompletenessが求まる。その際，次の関係に注意する，

$$\{G^P(\xi)-G^N(\xi)\}_{y<x} - \{G^P(\xi)-G^N(\xi)\}_{y>x}$$
$$= \Phi^+\{S_U^P[\tilde{S}_L^P]^T - S_L^N[\tilde{S}_U^N]^T\}[\tilde{\Phi}^+]^T = 0 .$$

これらより，次式を得る.

$$\delta(x-y) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(x)\{S_U^P K_0^P[\tilde{S}_L^P]^T - S_L^N K_0^N[\tilde{S}_U^N]^T\}[\tilde{\Phi}^+(y)]^T d\xi . \tag{5.7}$$

さて，ここで高次オーダー行列系の逆理論，特にGel'fand-Levitan方程式によるものを考える。§3ですでに触れたが厳密な意味では未解決である。しかし，例えばZakharov等は,[10]これを扱っている。基本的な問題はGel'fand-Levitan核導入の正当性にある。本節でも，Zakharov等と同様に，その正当性を考慮しないものとし，議論を進める。2種のPotential Q_1, Q_0を持つ系を考え，それらの解の間にλ-独立な変換核$M(x,y)$, $\tilde{M}(x,y)$による変換を仮定する,

$$\Phi_1(\lambda, x) = \Phi_0(\lambda, x) + \int_{\infty}^{x} M(x,y)\Phi_0(\lambda, y)\, dy \ , \tag{5.8a}$$

$$\tilde{\Phi}_0^T(\lambda,x)=\tilde{\Phi}_1^T(\lambda,x)+\int_{\infty}^{x}\tilde{\Phi}_1^T(\lambda,y)\tilde{M}^T(x,y)\,dy. \qquad (5.8b)$$

但し，$\Phi=\Phi^{\dagger}$. Potentialは，核と次の関係を持つ，

$$A^{-1}M(x,x)A-M(x,x)=Q_0(x)-Q_1(x).$$

次のFunctionalを考える事は基本的である。

$$\Lambda(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(\xi,x)W_1(\xi)\tilde{\Phi}_0^T(\xi,y)\,d\xi \quad (x<y). \qquad (5.9)$$

W_1はQ_1に属する散乱データで，次の通りである.

$$W_1(\xi)=\{S_U^P K_0^P[\tilde{S}_L^P]^T-S_L^N K_0^N[\tilde{S}_U^N]^T\}(\xi).$$

(5.7)~(5.9)から，Gel'fand-Levitan型方程式を得る，

$$M(x,y)A+\int_{x}^{\infty}M(x,z)F(z,y)\,dz=F(x,y). \qquad (5.10)$$

ここで $$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0(\xi,x)\{W_1(\xi)-W_0(\xi)\}[\tilde{\Phi}_0^T]\,d\xi.$$

(5.10)は，Q_0の系が解けている時に，Q_1を求めるものであり普通のGel'fand-Levitan方程式の拡張したものである。従来迄は，2乗固有函数のCompleteness (4.10)又は(4.9)の導出にこの一般化されたG.L.eq.が必要であった。実際(5.10)を線形化して写像$\delta S\to\delta Q$を構成し，(4.10)に良く似た関係を得るが一致はしない。[9] (4.10)の各積分内には，3種の2乗固

有函数のテンソル積が存在するのに対し，(5.10)を用いて得られるものでは，次に示す2種の内の一方が捨てられ，結果的に2種のテンソル積しか現れない。

$$|\Phi_{12}, \tilde{\Phi}_{12}\rangle\langle\tilde{\Phi}_{21}, \Phi_{21}|, \quad |\Phi_{23}, \tilde{\Phi}_{23}\rangle\langle\tilde{\Phi}_{32}, \Phi_{32}|.$$

換言すれば，2乗固有函数のスパンする空間の次元が異る。この事実は，本節の議論がformalであったからと片付ける事を好まない。(5.4)に使った射影行列の影響が強く出ており，formalな変換核の導入(5.8)の寄与と考えにくいのである。

上に述べた事柄は，§3における逆理論と(5.10)によるそれとの間にも存在すると思われるが，それに関する議論は本文では行わなかった。

§6. あとがき

高次行列系の固有値問題は，S行列等の三角分解を行うことによって組織的に扱える。積の形と和の形のR-H問題，(3.3)，(3.7)が与えられたが，特に和の形(3.7)には，三角行列$\tilde{S}_L^P$，$\tilde{S}_U^N$が陽に現れていて，直接それが散乱データになる事がわかる。$M=3$に相当する(3.12)によって，$\mathbb{H}_U^P$の第1,2成分と$\mathbb{H}_L^N$の第2,3成分に関するcoupleしたλ面上における積分方程式が構成可能であるが，$M \geq 4$ではこれは困難となる。この事は，(3.13)の如き変換核が(3.9)に示した成分にしか

定義できない事と関係して，G-L eq.の導出が $M \geqq 4$ でやはり困難になる事を教える。注意せねばならないのは，上に述べた理由から，逆理論が全く不可能になったわけではない。本文では触れなかったが，(3.7)の離散スペクトラムを扱って，Soliton解は求まるであろう。この他にも，積の形のR-H問題を解析的因子分解[4,5]したり，§5のG-L eq.を解く方法などによっても可能である。けれど逆散乱法の立場に立てば，連続スペクトラムをいかに処理するかが本質的であり，この意味で先に述べた問題は，興味深いものである。

R-H問題からPotential変動についての汎函数表現を得られる事は特筆すべき事である。従来迄は，一般化されたG-L eq.より求めるという遠回りをしていたので，すでに述べた理由から高次系では，その導出は困難だったのである。逆のMappingを合成する事により，2乗固有函数のCompletenessが得られた。これは，formalな逆理論から得られるものと明白な相違を持つ事が判った。尚，2乗固有函数そのものが従う固有値問題が存在し，これを使って逆散乱法で解ける非線形方程式を定める事ができる。この非線形方程式を線形化した時に得られる線形偏微分演算子の解核，つまりGreen函数は，2乗固有函数のCompletenessを使って決定できるのである。

参考文献

(1) A. B. Shabat : Differential Equations, 15 (1979) 1824

(2) P. J. Caudrey ; Physica 6D (1982) 51

(3) R. Beals and R. R. Coifman ; Comm. Pure. Appl. Math., XXXVII (1984) 39

(4) V. E. Zakharov and A. B. Shabat ; Func. Anal. Appl., 13 (1979) 13

(5) T. Kawata : J. Phys. Soc. Jpn., 51 (1982) 3381

(6) T. Kawata : J. Phys. Soc. Jpn., 53 (1984) 2879

(7) T. Kawata : "Riemann-Hilbert Problem and Inverse Scattering Method for the 3×3 - Spectral Problem", will appear in J. Phys. Soc. Jpn.

(8) D. J. Kaup ; Studd. Appl. Math., 55 (1976) 9

(9) T. Kawata ; IPPJ Research Report in Nagoy Uni., IPPJ-641, Aug. 1983

(10) V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Func. Anal. Appl. 8 (1974) 43