数理解析研究所講究録
第 555 巻 1985 年 48-60

概均質ベクトル空間のL関数

立教大理　佐藤文広　(Fumihiro Sato)

§0.　本講究録所収の川中・行者両氏による概均質ベクトル空間のGauss和についての研究（[川中・行者]）を，概均質ベクトル空間のゼータ関数についての標準的な議論と組み合わせると，直ちに概均質ベクトル空間に付随するL関数の関数等式についての結果を得ることができる。この結果は，正定値2次形式のL関数についての[Stark]の結果の一般化を与えている。以下[川中・行者]への補足としてこのことを説明する。

§1.　(G,ρ,V)を$\mathbb{Q}$上定義された概均質ベクトル空間，Sをその特異点集合とする。以下，(G,ρ,V)の$\mathbb{Z}$-structureを一つ固定しておく。また，zeta関数としては一変数のものだけを考えることにして，[Sato-Shintani]にならって次の仮定をおく：

$$(1.1)\qquad \begin{cases} G : \underline{\text{reductive}}, \\ S : \underline{\text{絶対既約超曲面}}. \end{cases}$$

(G, ρ, V) の既約相対不変式をとって $f(v)$ とおく。$f(v)$ は $\mathbb{Z}$-係数と仮定してよい。$\phi : G \to GL(1)$ を $f(v)$ に対応する G の $\mathbb{Q}$-有理指標とする。G^+ で $G_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分を表わし，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の G^+-軌道分解を

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$$

とする。ゼータ関数・L関数を定義するために，

(1.2) $\underline{{}^\forall x \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}} \text{ について}}$，$G_x = \{ g \in G \,;\, \rho(g)x = x \}$ <u>の単位元連結成分（代数群としての）は自明でない</u> $\mathbb{Q}$-<u>有理指標を持たない</u>，

と仮定する。

自然数 N をとって

$$\Gamma = \Gamma(N) = \{ g \in G_{\mathbb{Z}} \cap G^+ \,;\, \rho(g) \equiv 1_n \pmod N,\ \phi(g) = 1 \}$$
$$(n = \dim V)$$

とおく。$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を N を法とする Dirichlet 指標として，$m \in \mathbb{Z}$, $(m, N) \neq 1$ に対しては $\chi(m) = 0$ と定義することで χ を $\mathbb{Z}$ 上の関数に拡張しておく。

さて，(G, ρ, V) に付随する L関数，Zeta integral，Local zeta functions at ∞ を次のように定義する：

L関数： $L_j(s,\chi) = \sum_{v \in \Gamma \backslash V_j \cap V_{\mathbb{Z}}} \mu(v)\chi(f(v))|f(v)|^{-s}$

$(1 \leqq j \leqq \nu,\ s \in \mathbb{C})$,

Zeta integral： $Z_\chi(\Phi; s) = \int_{G^+/\Gamma} |\phi(g)|^s \sum_{v \in V_{\mathbb{Z}} - S} \chi(f(v))\Phi(\rho(g)v)\,dg$

（dg：G^+ の Haar measure，$\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$，$s \in \mathbb{C}$），

Local zeta at ∞： $\zeta_{\infty,j}(\Phi; s) = \int_{V_j} |f(v)|^s \Phi(v)\,dv$

（dv：$V_{\mathbb{R}}$ の標準的な Euclid 測度，

$\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$，$s \in \mathbb{C}$，$1 \leqq j \leqq \nu$）.

ここで，L関数の定義に現れる $\mu(v)$ は，

$$G_v^+ = \{g \in G^+ ;\ \rho(g)v = v\},\quad \Gamma_v = \Gamma \cap G_v^+$$

とおいて，

$$\mu(v) = \int_{G_v^+/\Gamma_v} d\nu_v,\quad d\nu_v = G_v^+ \text{ の Haar 測度}$$

によって定義される。$\mu(v)$ は仮定(1.2)により有限である。又，$d\nu_v$ の正規化の仕方は，[Sato-Shintani, p.146] 参照。

$N=1$，従って χ が自明な Dirichlet 指標のとき $L_j(s,\chi)$ は，(G, ρ, V) に付随した通常のゼータ関数に他ならない。このとき $\zeta_j(s)$ と記すことにする。

（1.3：L関数の積分表示）　$\zeta_1(s),\cdots,\zeta_\nu(s)$ は $\mathrm{Re}\,s$ が十分大きいとき絶対収束すると仮定する。このとき $L_j(s,\chi)$，$Z_\chi(\Phi;s)$ も同じ範囲で絶対収束し，

$$Z_\chi(\Phi;s)=\sum_{j=1}^{\nu}L_j(s,\chi)\cdot\zeta_{\infty,j}(\hat{\Phi};s-\frac{n}{d})\quad(n=\dim V,\ d=\deg f)$$

が成立つ。

（注意）　仮定（1.2）の下では，$\zeta_i(s)$ は $\mathrm{Re}\,s>n/d$ で絶対収束すると予想される。（cf. [Sato-Shintani, p154, Remark 1]，[Sato I, §4, p455, Remark]，[Sato II, p80, Remark 2]）.

次に，V の dual space を $V^\vee$，ρ の反傾表現を $\rho^\vee$ とすると，$(G,\rho^\vee,V^\vee)$ も仮定（1.1），（1.2）を満たす $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間になる。$(G,\rho^\vee,V^\vee)$ の $\mathbb{Z}$-structure としては $V_{\mathbb{Z}}$ の dual lattice を $(V^\vee)_{\mathbb{Z}}$ とすることによって定まるものを考える。$f^\vee$，$S^\vee$，$\phi^\vee$，$V_{\mathbb{R}}^\vee-S_{\mathbb{R}}^\vee=V_1^\vee\cup\cdots\cup V_\nu^\vee$ は，それぞれ (G,ρ,V) の場合と同様に定義する。このとき，$V_{\mathbb{R}}^\vee-S_{\mathbb{R}}^\vee$ の G^+-軌道の個数が ν と一致していることに注意しておく。又，$\phi^\vee(g)=\phi(g)^{-1}$ が成立っている。

加法的指標 $\psi:\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ を

$$\psi(m)=\exp(2\pi i\,m/N)\qquad(m\in\mathbb{Z})$$

で定義する。概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の Gauss 和を [川中・行者] にならって，

$$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee) = \sum_{v \in V_{\mathbb{Z}}/N\cdot V_{\mathbb{Z}}} \chi(f(v))\psi(\langle v^\vee, v\rangle) \quad (v^\vee \in V_{\mathbb{Z}}^\vee/NV_{\mathbb{Z}}^\vee)$$

によって定義する。

ここで $(G, \rho^\vee, V^\vee)$ に付随する L関数・Zeta integral を定義するのだが，この場合には，$\chi(f^\vee(v^\vee))$ を係数とするのではなく Gauss和 $\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)$ を係数とするものを考えるのである。すなわち，

$$L_j^\vee(s, \chi) = \sum_{v^\vee \in \Gamma\backslash V_j^\vee \cap V_{\mathbb{Z}}^\vee} \mu^\vee(v^\vee)\cdot \mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)\cdot |f^\vee(v^\vee)|^{-s}$$

$$(1 \leqq j \leqq \nu,\ s \in \mathbb{C}),$$

$$Z_\chi^\vee(\Phi^\vee; s) = \int_{G^+/\Gamma} |\phi^\vee(g)|^s \sum_{v^\vee \in V_{\mathbb{Z}}^\vee - S^\vee} \mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)\,\Phi(\rho^\vee(g)v^\vee)\,dg$$

$$(\Phi^\vee \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^\vee),\ s \in \mathbb{C})$$

とおく。Local zeta functions at ∞ については，(G, ρ, V) の場合と同様に

$$\zeta_{\infty, j}^\vee(\Phi^\vee; s) = \int_{V_j^\vee} |f^\vee(v^\vee)|^s\,\Phi^\vee(v^\vee)\,dv^\vee$$

$$(1 \leqq j \leqq \nu,\ \Phi^\vee \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^\vee),\ s \in \mathbb{C})$$

とおく。

やはり，$N=1$，$\chi=$ 自明な Dirichlet 指標の場合には，$L_j^\vee(s, \chi)$ は $(G, \rho^\vee, V^\vee)$ に付随する通常のゼータ関数 $\zeta_j^\vee(s)$ に

帰着する。

(1.4：L関数の積分表示) $\xi_1^\vee(s),\dots,\xi_\nu^\vee(s)$ が $\mathrm{Re}\,s$ が十分大きいときに絶対収束するならば，$L_j^\vee(s,\chi)$，$Z_\chi^\vee(\Phi^\vee;s)$ も同じ範囲で絶対収束し，

$$Z^\vee_\chi(\Phi^\vee;s)=\sum_{j=1}^{\nu} L_j^\vee(s,\chi)\cdot \xi^\vee_{\infty,j}\left(\Phi^\vee; s-\frac{n}{d}\right)$$

が成立つ。

概均質ベクトル空間のZeta関数の関数等式の証明の一つの柱は，Poissonの和公式であった。L関数に対しては，次の形のものを用いる。

(1.5：Poissonの和公式) $\Phi\in\mathcal{S}(V_\mathbb{R})$ のFourier変換を，

$$\Phi^\vee(v^\vee)=\int_{V_\mathbb{R}}\Phi(v)\exp(2\pi i\langle v,v^\vee\rangle)\,dv \quad (\in\mathcal{S}(V^\vee_\mathbb{R}))$$

と定義する。このとき，

$$\sum_{v\in V_\mathbb{Z}}\chi(f(v))\Phi(\rho(g)v)=N^{-n}\phi(g)^{-\frac{n}{d}}\sum_{v^\vee\in V^\vee_\mathbb{Z}} \mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](-v^\vee)\,\Phi^\vee\left(\rho^\vee(g)\frac{v^\vee}{N}\right)$$

が成立つ。

この等式は，$\chi(f(v))$ の値が $v \pmod{N}$ のみで定まることに注意すれば，通常のPoissonの和公式から直ちに得られる。

次に概均質ベクトル空間の理論の基本定理であるLocal

zeta functions at ∞ の満たす関数等式について復習する。

$f^\vee(\mathrm{grad})$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の定数係数偏微分作用素で

$$f^\vee(\mathrm{grad})\exp\langle v, v^\vee\rangle) = f^\vee(v^\vee)\exp(\langle v, v^\vee\rangle)$$

を満たすものだとする。このとき

$$f^\vee(\mathrm{grad})P(v)^s = b(s)\cdot P(v)^{s-1}$$

を満足する s の d 次多項式 $b(s)$ ((G, ρ, V) の b 関数) が存在する。b 関数を

$$b(s) = b_0 \cdot \prod_{i=1}^{d}(s+\alpha_i)$$

と因数分解し，

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{d}\Gamma(s+\alpha_i+1) \qquad (\Gamma\text{-factor})$$

とおく。

(1.6 : Local functional equations [Sato-Shintani, Theorem 1, p142])

$\exp(-\pi\sqrt{-1})$ に関する高々 d 次の多項式 $u_{ij}(s)$ $(1 \leqq i, j \leqq \nu)$ が存在し，$\forall \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ について

$$\zeta_{\infty, i}\left(\Phi; s-\frac{n}{d}\right) = \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)(2\pi)^{-ds}|b_0|^s\cdot\exp\left(\frac{d\pi s\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$\times\sum_{j=1}^{\nu}u_{ij}(s)\zeta^\vee_{\infty, j}(\Phi^\vee; -s) \qquad (1 \leqq i \leqq \nu)$$

が成立つ。ここで $\Phi^\vee$ は (1.5) で定義された Φ の Fourier 変換である。

(1.3), (1.4), (1.5), (1.6) を用いて [Sato-Shintani, pp.152-154 & p.169 Remark 2] と同様の議論を行って次の定理が得られる。

定理 1. (1) $L_j(s,\chi)$, $L_j^\vee(s,\chi)$ $(1 \leqq j \leqq \nu)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される。さらに

$$b(s-\tfrac{n}{d})L_j(s,\chi), \quad b(s-\tfrac{n}{d})L_j^\vee(s,\chi)$$

は entire functions である。

(2) 次の関数等式が成立つ:

$$L_i^\vee(\tfrac{n}{d}-s,\chi) = (2N\pi)^{-ds}\cdot|b_0|^s\cdot\exp\left(\frac{d\pi s\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$\times\gamma(s-\tfrac{n}{d})\cdot\sum_{j=1}^{\nu}u_{ji}(s)L_j(s,\chi) \quad (1\leqq i\leqq\nu).$$

Remark. 以上の議論は一変数のゼータ関数に限られるわけでなく, [Sato-1] で考察されている多変数ゼータ関数の場合にも容易に一般化される。又,同様の考え方で, 概均質ベクトル空間に付随する Hurwitz-Lerch 型の zeta 関数を構成できる。

さて, 定理1によって L関数の解析接続の問題は片づいた。又, ある種の関数等式を満足していることもわかった。以上は概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論における routine work である。次の問題は, L関数と関数等式で結びつけられている $L_i^\vee(s,\chi)$ が, 再びもとのL関数と同じタイプのもの

として書き表わすことができるかということである。言いかえれば，Gauss和 $\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f]$ が，Dirichlet指標と $f^\vee$ の合成によって記述されるかということで，これこそ[川中・行者]が解答を与えている問題である。

スローガン的に説明すると，ゼータ関数に対しては

相対不変式の複素巾の Fourier変換の公式 (Local functional equations)	$\Longrightarrow$	ゼータ関数の関数等式

という図式が成立していたが，L関数に対しては

相対不変式の複素巾の Fourier変換の公式 + 相対不変式とDirichlet指標の合成の $V_{\mathbb{Z}}/NV_{\mathbb{Z}}$ 上のFourier変換 (Gauss和の計算).	$\Longrightarrow$	L関数の関数等式

となっているのである。

§2. この節では，[川中・行者]で取扱われている場合を考察する．すなわち，§1の仮定に加えて

$$
(2.1)\begin{cases} (G,\rho,V) : \underline{\text{既約正則概均質ベクトル空間}}\ (\underline{\text{に自然な}}\\ \qquad\qquad \underline{\mathbb{Z}\text{-structure を入れたもの}}). \\ N=p \ : \underline{\text{十分大きな素数}} \end{cases}
$$

を仮定する。

$(G,\rho^\vee,V^\vee)$ に付随する“真の”L関数を

$$L_j^*(s,\chi) = \sum_{v^\vee \in \Gamma \backslash V_{\mathbb{Z}}^\vee \cap V_j^\vee} \mu^\vee(v^\vee)\cdot\chi(f^\vee(v^\vee))\,|f^\vee(v^\vee)|^{-s}$$

で定義する。定理1によって $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されることは保証されている。

このとき，[川中・行者]の結果を用いると定理1は次のように精密化される。

<u>定理 2.</u> $m_f(\operatorname{ord}\chi) = 0$ <u>ならば</u>，$L_j(s,\chi)$，$L_j^*(s,\theta_\chi\otimes\chi^{-1})$ <u>は</u> s <u>の整関数であり</u>，<u>関数等式</u>

$$
\begin{aligned}
L_i^*\left(\frac{n}{d}-s,\theta_\chi\otimes\chi^{-1}\right) &= \left(\varepsilon_{\chi,\psi}\cdot(\theta_\chi\otimes\chi)(-1)^d\right)\cdot p^{n/2} \\
&\times (2p\pi)^{-ds}\,|b_0|^s \exp\left(\frac{d\pi s\sqrt{-1}}{2}\right)\cdot\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right) \\
&\times \sum_{j=1}^{\nu} u_{ji}(s)\cdot L_j(s,\chi)
\end{aligned}
$$

<u>が成立つ</u>。<u>ここで[川中・行者]の記号はことわりなしに用いた</u>。

[略証] [川中・行者]の定理5(i)，及び有限体$\mathbb{F}_p$上のFourier変換に関するPlancherelの定理から，$m_f(\mathrm{ord}\,\chi)=0$ならば，

$$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)=0 \qquad \text{if} \quad f^\vee(v^\vee)\equiv 0 \pmod p$$

が得られる。この事実と[川中・行者]定理5(i)とから直ちに

$$L_j^\vee(s,\chi)=\varepsilon_{\chi,\psi}\cdot(\theta_\chi\otimes\chi)(-1)^d\cdot p^{n/2}\,L_j^*(s;\theta_\chi\otimes\chi^{-1})$$

が出る。定理イの関数等式をこの式を用いて書き直せば，求める関数等式を得る。さらに，このとき，Poissonの和公式(1.5)の両辺において，$v\in V_{\mathbb{Z}}\cap S$，$v^\vee\in V_{\mathbb{Z}}^\vee\cap S^\vee$に対応する項の寄与は0であることに注意すれば，L関数が整関数であることがわかる。▨

<u>Remark</u> (1) 具体例については，[Stark]，[Chen]を参照。

(2) $m_f(\mathrm{ord}\,\chi)\neq 0$ のときは，$f^\vee(v^\vee)\equiv 0 \pmod p$となる$v^\vee$について$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)$は生き残り得る。[川中・行者]の予想4は，そのような$v^\vee$については何も主張していない。従って，このときには

$$L_j^\vee(s,\chi)=\text{定数倍}\cdot L_j^*(s,\theta_\chi\otimes\chi^{-1}) + (*)$$

となるが，$(*)$については良くわからない。また同じ理由によって，χがnon-trivialなDirichlet指標でも$m_f(\mathrm{ord}\,\chi)\neq 0$

であれば，L関数は整関数とは限らず，極を持ち得る。その最も簡単な例として，

$$n = 2m+1$$

$$f(v) = v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

$$\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right) \ : \text{Legendre symbol}, \quad \mathrm{ord}(\chi) = 2$$

の場合を考えてみよう。このとき，$m_f(2) = 1 \neq 0$ であり，L関数は $s = n/2$ で1位の極を持っている。

《参考文献》

[Chen] Fonction zêta associée à un espace préhomogène et sommes de Gauss, preprint.

[川中・行者] 概均質ベクトル空間のGauss和，本講究録，pp. – .

[Sato-I] Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 437–483.

[Sato-II] ———— II: A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35 (1983), 77–99.

[Sato-Shintani] On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131–170.

[Stark] L-functions and character sums for quadratic forms (I), Acta. Arith. 16 (1968), 35-50.