数理解析研究所講究録
第555巻 1985年 101-105

概均質ベクトル空間の分類について

筑波大数学 笠井伸一 (Shin-ichi Kasai)

Gを連結線型代数群とし, $\rho: G \to GL(V)$を有限次元有理表現とする。すべて複素数体上で考えているものとする。(G, ρ)が概均質ベクトル空間(以下P.V.と略す)であるとは, VがZariski-denseなG-orbitを持つことをいう。

G'を半単純線型代数群とする。$G' = G_1 \times \cdots \times G_k$, G_i $(1 \leq i \leq k)$は単純代数群, としてよい。G'の有限次元有理表現$\rho': G' \to GL(V)$を考える。そのときρ'は既約表現$\rho_i: G' \to GL(V_i)$ $(i = 1, \cdots, l)$の直和に分解する: $\rho' = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$。$G$を$GL(1)^l \times G'$とし, ρをρ'とその各既約成分V_iへのスカラー倍の作用$GL(1)^l$との合成とする。このときP.V.となるような(G, ρ)の分類を考える。

[1]では, 既約P.V.の分類, 即ち$l = 1$の場合に任意のkに対してP.V.となる(G, ρ)を分類している。[2]では, simple P.V.の分類, 即ち$k = 1$の場合に任意の$l (\geq 2)$に対してP.V.となる

(G,ρ)を分類している。さらに[3]においては，finite P.V.の分類，即ちρの作用によりVが有限個のG-orbitに分解するような(G,ρ)を分類している。

P.V.の分類の次の段階として，two simple P.V.の分類，即ち$k=2$の場合に任意の$\ell\,(\geq 2)$に対してP.V.となる(G,ρ)を分類することが問題となる。two simple P.V.の分類は現在，木村·笠井·大塚によりおこなわれており，non-trivial caseの分類は完成した。即ち(G,ρ)がその既約成分にtrivial P.V.以外の既約なtwo simple P.V.を含む場合の分類はできている（大塚による本講究録参照）。

既約P.V.の分類結果を見ると，castling classの代表としてほとんどのものがfinite P.V.をとることができる。実際，既約正則P.V.でreducedなものはすべてfinite P.V.である。P.V.の分類において，既知の分類結果（simple P.V.の分類，finite P.V.の分類）からいくつかの変換によって構成されるP.V.がどのような位置をしめているのかを見ることは重要である。ここではtwo simple P.V.の分類結果においてこのことを調べてみる。例外的にあらわれるものが少ないほど一般の分類が可能であることを示しているとみることができる。

はじめに次の2つの変換を考える。

変換Ⅰ. 裏返変換([1]のProp. 7).

変換Ⅱ. $(G_1 \times GL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1)$が正則P. V.のとき,
$(GL(1)^2 \times G_1 \times SL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$と
$(GL(1)^2 \times G_1 \times SL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$とはP. V.同値.

定理. Ⅰ,Ⅱの変換により, simple P. V. ([2])または finite P. V. ([3])と同値になるものを除いた, two simple P. V. の non-trivial case の分類結果は次の通り;

1. $(GL(1)^2 \times SL(4) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$
2. $(GL(1)^3 \times SL(4) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1)$ $(m = 2, 4)$
3. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1^* \otimes 1)$ $(m = 2, 8)$
4. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + \Lambda_1^* \otimes 1)$
   $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(8), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1)$
5. $(GL(1)^2 \times SL(5) \times SL(8), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
6. $(GL(1)^2 \times SL(5) \times SL(9), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
7. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(9), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^{(*)} \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
8. $(GL(1)^3 \times SL(7) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1)$
   $(GL(1)^3 \times SL(7) \times SL(20), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1)$
9. $(GL(1)^2 \times SL(9) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1)$
   $(GL(1)^2 \times SL(9) \times SL(34), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$

10. $(GL(1)^2 \times SL(2m+1) \times SL(n),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ $(n = 2,\ m(2m-1)-1)$

11. $(GL(1)^3 \times Sp(2) \times SL(3),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_2 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$

12. $(GL(1)^3 \times Sp(2) \times SL(m),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$ $(m = 2, 4)$

13. $(GL(1)^3 \times Spin(7) \times SL(m),$ vector rep. $\otimes \Lambda_1 +$ spin rep. $\otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$ $(m = 2, 6)$

14. $(GL(1)^2 \times Spin(10) \times SL(m),$ vector rep. $\otimes \Lambda_1 +$ half-spin rep. $\otimes 1)$ $(m = 4, 6)$

15. $(GL(1)^2 \times Spin(10) \times SL(15),$ half-spin rep. $\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$

16. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(2),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes 2\Lambda_1)$

17. $(GL(1)^{1+k} \times SL(2m+1) \times SL(2),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k)$ $\sigma_1 = 2\Lambda_1, 3\Lambda_1;\ \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$

18. $(GL(1)^{1+k} \times Spin(10) \times SL(2),$ half-spin rep. $\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k)$ $\sigma_1 = 2\Lambda_1, 3\Lambda_1;\ \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$

19. $(GL(1)^4 \times SL(5) \times SL(2),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$

20. $(GL(1)^{1+k} \times SL(2m+1) \times SL(2),\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k)$ $\sigma_2 = \Lambda_1 + \Lambda_1;\ \sigma_3 = \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1$

21. $(GL(1)^{1+k} \times Spin(10) \times SL(2),$ half-spin rep. $\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k)$ $\sigma_2 = \Lambda_1 + \Lambda_1;\ \sigma_3 = \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1$

22. $(GL(1)^4 \times Sp(n) \times SL(m),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$

ただし $(GL(1)^4 \times Sp(n) \times SL(2m+1),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$ は除く

23. $(GL(1)^4 \times Sp(n) \times SL(m),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$

ただし $(GL(1)^4 \times Sp(n) \times SL(2m+1),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$ は除く

24. $(GL(1)^2 \times Sp(n) \times SL(2m+1),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_2)$

25. $(GL(1)^3 \times Sp(n) \times SL(2m+1),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1)$

26. $(GL(1)^3 \times Sp(n) \times SL(5),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_2 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$

27. $(GL(1)^{1+k} \times Sp(n) \times SL(2),\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k)$ $\sigma_1 = 3\Lambda_1;\ \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$

変換III. $2n \geqq \deg \rho$ のとき，$(Sp(n) \times G, \Lambda_1 \otimes \rho)$ と $(G, \rho_{日})$ とは P.V. 同値（[1]の Prop. 13）.

さらに，III の変換まで考えると，22.～27. は simple P.V. と同値になる。

変換IV.

(1) $(GL(1)^4 \times G_1 \times SL(\deg \rho_1), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + \tau \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ と $(GL(1)^3 \times G_1, \tau + \rho_1 + \rho_1)$ とは P.V. 同値.

(2) $(GL(1)^4 \times G_1 \times SL(\deg \rho_1 + 1), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ と $(GL(1) \times G_1, \rho_1 + \rho_1)$ とは P.V. 同値.

さらに，IV の変換まで考えると，19.～21. は simple P.V. と同値になる。

参考文献

[1] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65 (1977), 1–155.

[2] T. Kimura, A classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups with scalar multiplications, J. of Alg. 83 (1983), 72–100.

[3] T. Kimura, S-I. Kasai and O. Yasukura, A classification of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits, to apper in Amer. J. of Math.