数理解析研究所講究録
第 556 巻 1985 年 147-150

形付項書き換えシステム

外山芳人
(Yoshihito TOYAMA)

(日本電信電話公社 武蔵野電気通信研究所)

1. はじめに

本報告では，項の形(form)に応じて書き換え規則を適用する項書き換えシステムを提案する。このような項書き換えシステムは形付項書き換えシステムと呼ばれる。型(type)付リダクションシステム[1]が項の意味を型によって区別しているのに対し，形(form)付リダクションシステムでは対象のシンタックス上の形状まで考慮して区別する。たとえば1+2と3は型(type)の上では同じ意味をもつが，形(form)の上では異なっている。リダクションシステムの中に形(form)という概念を導入することによって，項の形状に応じたリダクションが可能となり，従来提案されていたリダクションの戦略と比較すると，柔軟で適用性に富んだ戦略が実現できる。ここでは，形付項書き換えシステムを定義し，そのChurch-Rosser性について検討する。

2. リダクションシステム

まずリダクションシステムの基本的な性質について述べる。ここでは抽象的な構造のみをもつ抽象リダクションシステムについて説明する。

リダクションシステムは$R=\langle D,\rightarrow\rangle$で表わせる。ここで$D$は対象の集合，$\rightarrow\subseteq D\times D$は$D$上の2項関係でリダクション関係とよばれる。$A$上の同一関係(syntactical equality)を$\equiv$で表わす。$=$は$\rightarrow$の反射・対称・推移閉包，$\xrightarrow{*}$は$\rightarrow$の反射・推移閉包，$\xrightarrow{=}$は反射閉包を表わす。$x\in D$が$\neg\exists y\in D\,[x\rightarrow y]$をみたすなら$x$は正規形であるという。正規形の集合を$NF_{\rightarrow}$あるいは$NF$で表わす。$x\xrightarrow{*}y$，$y\in NF$なら$x$は正規形$y$をもつという。

$R=\langle D,\rightarrow\rangle$が強正規であるとは$x_0\rightarrow x_1\rightarrow\cdots$なる無限列が存在しないことである。このときSN(R)あるいはSN(→)と書く。

$R=\langle D,\rightarrow\rangle$がChurch-Rosser性(合流性)をみたすとは，

$$\forall x,y,z\in D\,[x\xrightarrow{*}y\wedge x\xrightarrow{*}z\Rightarrow\exists w\in D,\ y\xrightarrow{*}w\wedge z\xrightarrow{*}w]$$

が成立することである。このときCR(R)あるいはCR(→)と書く。

次の命題が成立することが知られている。[1][2]

[命題]

CR(R)とすると以下が成立する。

1) 要素$x\in D$の正規形は高々一個しか存在しない。

2) $x=y$ならあるzが存在して$x\xrightarrow{*}z$，$y\xrightarrow{*}z$となる。

3. 形付項書き換えシステム

次に形付項書き換えシステムについて説明する。変数記号$x,y,z\cdots$の集合をV，関数記号$f,g,h,\cdots$の集合をFとする。($F\cap V=\phi$) 各$f\in F$を自然数に対応させる写像ρが存在し，$\rho(f)=n$のときfをn項関数記号とよぶ。0項関数記号は定数とよぶ。F上の項の集合$T(F)$は

以下の規則によって帰納的に定められる。

1) $x \in V$ なら $x \in T(F)$,

2) $f \in F$, $\rho(f)=0$ なら $f \in T(F)$,

3) $f \in F$, $\rho(f)=n>0$, $M_1 \cdots M_n \in T(F)$ なら $f(M_1,\cdots,M_n) \in T(F)$。

変数を含まない$T(F)$の要素の集合を$T^0(F)$と書く。以下では関数記号を明示する必要のない項の集合はTと書くことにする。

項の集合$T(F)$の任意の部分集合$T \subseteq T(F)$を項の形(form)という。各$x \in V$に対して形T_xが対応している。これを$x : T_x$と書く。とくに$x : T(F)$の場合には形を考慮する必要はない。

代入θは項の集合TからTへの写像で以下の性質を満足する。

1) $x : T$なら$\theta(x) \in T$,

2) $f \in F$, $\rho(f)=0$なら$\theta(f) \equiv f$,

3) $\theta(f(M_1 \cdots M_n)) \equiv f(\theta(M_1),\cdots,\theta(M_n)) \quad (n>0)$ 。

以下では$\theta(M)$を$M\theta$で表わすことにする。

$F \cup V$に含まれない新しい定数記号□を考える。このとき$C \in T(F \cup \{\square\})$を$F$上の文脈とよぶ。$n$個の□を含む文脈を$C[\ ,\cdots,\ ]$と表わし，□を左から$N_1 \cdots N_n \in T(F)$に置き換えて得られる項を$C[N_1 \cdots N_n]$と書く。1個の□を含む文脈は$C[\ ]$で明記する。

$M \equiv C[N]$のときNはMの部分項の出現といい$N \subseteq M$と書く。$M \equiv C[N_1, N_2]$ならMにおけるN_1とN_2の出現は独立であるといい$N_1 \perp N_2$で表わす。

T上の2項関係$\triangleright$が書き換え規則の集合であることは，$M_l \triangleright M_r$なら$M_l \notin V$かつM_rに出現している変数記号はM_lにも出現していることである。このとき$M_l\theta$をリデックスとよぶ。書き換え規則$M_l \triangleright M_r$に出現している変数の形を明記する場合には$M_l \triangleright M_r \ (x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n)$と書く。書き換え規則の集合$\triangleright$からT上のリダクション関係$\rightarrow$を以下のように定める。

$$M \rightarrow N \iff M \equiv C[M_l\theta],\ N \equiv C[M_r\theta],\ M_l \triangleright M_r$$
なる$C[\ ], M_l, M_r, \theta$が存在する。

このリダクションにおいて書き換えられるMのリデックスの出現$A \equiv M_l\theta$を明示するときは$M \xrightarrow{A} N$と書く。

[定義]

T上の形付項書き換えシステムRは，書き換え規則の集合$\triangleright$によってリダクション関係$\rightarrow$が定められるリダクションシステム$R = \langle T, \rightarrow \rangle$のことである。$R$が書き換え規則$M_l \triangleright M_r$をもつならば$M_l \triangleright M_r \in R$で表わす。

項Mの中の各変数が高々一回しか出現しないならば，Mは線形であるという。$\forall M \triangleright N \in R$, Mが線形ならばRは線形であるという。Rが線形でないならば非線形であるという。

$R_1 = \langle T_1, \underset{1}{\rightarrow} \rangle$, $R_2 = \langle T_2, \underset{2}{\rightarrow} \rangle$がそれぞれ書き換え規則の集合$\triangleright_1$, $\triangleright_2$をもっているものとする。このとき$\triangleright_1 \cup \triangleright_2$によって定められる$T_1 \cup T_2$の形付項書き換えシステム$R = \langle T_1 \cup T_2, \rightarrow \rangle$を$R_1$と$R_2$の合併システムとよび$R_1 \cup R_2$で表わす。

4. 形付項書き換えシステムの Church-Rosser 性

以下では形付項書き換えシステムが Church-Rosser 性をみたすための条件について考察する。形付項書き換えシステムの場合にも，通常の項書き換えシステムと同様な条件が得られる。[2]

形Tがリダクション関係→で閉じているとは，$M \in T$, $M \xrightarrow{*} N$ ならば $N \in T$ がみたされることである。以下では形Tはリダクション関係→で閉じているものとする。

$M \triangleright N$, $P \triangleright Q \in R$, $M \equiv C[S]$, $S \notin V$ とする。SとPが単一化作用素θで単一化可能である，[2] すなわち $S\theta \equiv P\theta$ であるとする。このとき $M\theta \equiv C\theta[P\theta]$ をそれぞれの書き換え規則でリダクションして得られる項の対 $\langle C[Q]\theta, N\theta \rangle$ を危険対という。[2] Rが危険対をもつならRは重なっている(overlapping)といい，Rが危険対をもたないならRは重なっていない(non-overlapping)という。

[定理1]

Rは形付項書き換えシステムとする。Rの各形は閉じているものとする。

1) Rが強正規で，任意の危険対 $\langle P, Q \rangle$ に対してPとQは同じ正規形をもつものとする。このときRは Church-Rosser 性をみたす。

2) Rが重なりをもたず，かつ線形であるならばRは Church-Rosser 性をみたす。

強正規でない非線形な項書き換えシステムの Church-Rosser 性を示すことは一般には困難な問題である。しかし，形付項書き換えシステムの場合には Church-Rosser 性を示す簡単な条件が得られる。以下では，非線形な形付項書き換えシステムの Church-Rosser 性について検討する。

項Mに出現している関数記号の集合を $F(M)$ と書く。また，項の集合Tに対して $F(T) = \bigcup_{M \in T} F(M)$ と定める。形付項書き換えシステム $R_1 = \langle T_1, \xrightarrow{a} \rangle$, $R_2 = \langle T_2, \xrightarrow{b} \rangle$ を考える。ここで $T_1 \subseteq T_2$ とし，さらに各変数記号の形はT_1の部分集合になっているものとする。また，$M \triangleright N \in R_1$ ならば $F(M) \subseteq F(T_1)$，$M \triangleright N \in R_2$ ならば $F(M) \cap F(T_1) = \phi$ をみたすものとする。このとき $R_1 \cup R_2$ が Church-Rosser 性をみたすための条件について考察する。ここで R_1, R_2 は非線形でもかまわないことに注意する。

項 $M \in T_2$ の中に出現しているT_1の要素で極大なものを $M_1 \cdots M_n$ とする。すなわち，$M \equiv C[M_1 \cdots M_n] \in T_2$，$\forall i, M_i \in T_1$ で，Mの任意の部分項の出現 $N \subseteq M$ がT_1の要素であるならば $\exists i, N \subseteq M_i$。このとき $M \equiv C[\![M_1 \cdots M_n]\!]$ によって極大なT_1の部分項の出現を明記する。$M \propto N$ とは $M \equiv C[\![M_1 \cdots M_n]\!]$, $N \equiv C[\![N_1 \cdots N_n]\!]$ かつ，$M_i \equiv M_j$ ならば $N_i \equiv N_j$ をみたすこととする。

以下では $R_1 \cup R_2 = \langle T_2, \rightarrow \rangle$ とし，R_1とR_2の書き換え規則の集合$\triangleright_1$, $\triangleright_2$によって定められるT_2上のリダクション関係をそれぞれ$\xrightarrow{1}$, $\xrightarrow{2}$で表わす。

[補題1]

$CR(R_1)$ならば

$$\forall M, N, P \in T_2 [M \xrightarrow[1]{*} N \wedge M \xrightarrow[1]{*} P \Rightarrow \exists Q \in T_2, N \xrightarrow[1]{*} Q \wedge P \xrightarrow[1]{*} Q \wedge N \propto Q \wedge P \propto Q] \text{ 。}$$

(証明)

$M \equiv C[\![M_1 \cdots M_n]\!]$とする。すると $N \equiv C[\![N_1 \cdots N_n]\!]$, $P \equiv C[\![P_1 \cdots P_n]\!]$ と表わせ，$\forall i, M_i \xrightarrow[1]{*} N_i \wedge M_i \xrightarrow[1]{*} P_i$ 。$\{N_1 \cdots N_n, P_1 \cdots P_n\}$ を同値関係$\doteqdot$によって同値類 $S_1 \cdots S_k$ に分割する。するとR_1の Church-Rosser 性より各S_iに対して項A_iが存在して，$\forall B \in S_i, B \xrightarrow[1]{*} A_i$ 。$N_j \in S_i$ ならば $Q_j \equiv A_i$ で Q_j $(1 \leq j \leq n)$ を定める。$Q \equiv C[\![Q_1 \cdots Q_n]\!]$ とおけばよい。 □

[補題2]

$\forall M, N, P \in T_2 [M \xrightarrow[2]{} N \wedge M \xrightarrow[1]{*} P \wedge M \propto P \Rightarrow \exists Q \in T_2, N \xrightarrow[1]{*} Q \wedge P \xrightarrow[2]{} Q \wedge N \propto Q]$。

(証明)

$M \equiv C[\![M_1 \cdots M_m]\!]$, $P \equiv C[\![P_1 \cdots P_m]\!]$, $\forall i, M_i \xrightarrow[1]{*} P_i$ とする。このとき, $A \triangleright B \in R_2$ ならば $F(A) \cap F(T_1) = \phi$ より, $M \xrightarrow[2]{} N$ にもちいられた書き換え規則の左辺は文脈 $C[\ ,\cdots,\ ]$ の中に出現している。$M \propto P$ に注意するとこの規則は P に対しても同様に適用できる。$N \equiv C'[M_{i_1} \cdots M_{i_k}]$ $i_j \in \{1 \cdots m\}$ とすると, P に対してこの規則を適用することによって $P \xrightarrow[2]{} Q$, $Q \equiv C'[P_{i_1} \cdots P_{i_k}]$ なる Q が得られる。このとき $N \xrightarrow[1]{*} Q$, $N \propto Q$ が成立する。 □

[補題3]

$\forall M, N, P \in T_2 [M \xrightarrow[2]{*} N \wedge M \xrightarrow[1]{*} P \wedge M \propto P \Rightarrow \exists Q \in T_2, N \xrightarrow[1]{*} Q \wedge P \xrightarrow[2]{*} Q]$ 。

(証明)

補題2をもちいて図1の図式を構成すればよい。 □

[定理2]

$CR(R_1)$, $CR(R_2)$ なら $R_1 \cup R_2$ は Church-Rosser 性をみたす。

(証明)

まず図2の図式が成立することを示す。これは補題1, 補題3, $CR(R_2)$ より図3の図式が構成できることから明らか。ここで $M' \propto Q'$, $M'' \propto Q'$ である。次に $\rightarrow \subseteq \xrightarrow[1]{*}\xrightarrow[2]{*}$ に注意して $\xrightarrow{*}$ を $\xrightarrow[1]{*}\xrightarrow[2]{*}$ で分割し, 図4の図式を構成すれば $R_1 \cup R_2$ の Church-Rosser 性は示される。 □

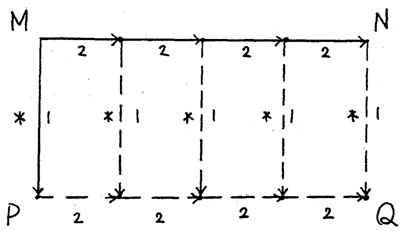

図1

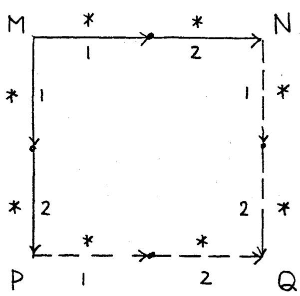

図2

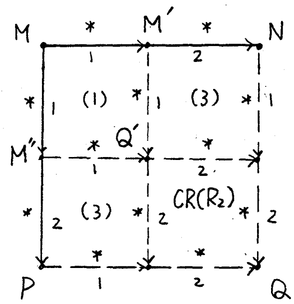

図3

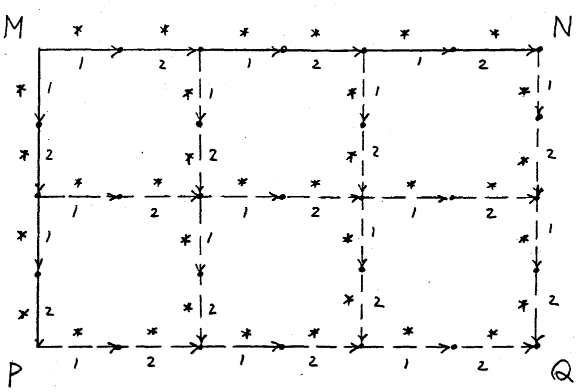

図4

参考文献

1) Hindley, Lercher, Seldin: "Introduction to combinatory logic", cambridge at the university press (1972).

2) 二木, 外山: "項書き換え型計算モデルとその応用", 情報処理学会誌 Vol24, NO2 (1983).

3) Toyama: "On the Church-Rosser property for the direct sum of term rewriting systems", to appear.