数理解析研究所講究録
第556巻 1985年 151-162

項書き換えシステムの簡約化戦略について

豊橋技科大　直井徹 (Tohru Naoi)
山下雅史 (Masafumi Yamashita)
茨木俊秀 (Toshihide Ibaraki)
本多波雄 (Namio Honda)

1. はじめに

あいまいでない線形項書き換えシステムに対する正規化戦略としてcall by need が知られている[2]。本報告では，適当な十分条件のもとでは，あいまいさを許しても依然call by need が正規化戦略であることを示す。

2. 基本概念

2.1 諸定義

関数記号の有限集合$\mathcal{F}$と，変数記号の可算集合$\mathcal{V}$から生成される項の集合を$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$とかく(ただし，$\mathcal{F}\cap\mathcal{V}=\phi$)。$\mathbb{P}^*$を正整数の列全体の集合とし，その元を出現とよぶ。$\mathbb{P}^*$の空列は$\varepsilon$で表わす。$\mathbb{P}^*$上の順序$\preceq$を，$u\preceq v$ iff $\exists w\ uw=v$で定義し，$u\prec v$ iff $u\preceq v$かつ$u\neq v$とする。また，関係⊥

を，$u \perp v$ iff $u \not\leq v$ かつ $v \not\leq u$ と定義し，このとき，u と v は独立であるという[1]。

項 M の部分項の出現の集合 $O(M)$ と，出現 $u \in O(M)$ における M の部分項 M/u を次で定義する[1]：

(i) $M = x \in \mathcal{V}$ のとき，$O(x) = \{\varepsilon\}$，$x/\varepsilon = x$，

(ii) $M = f(M_1, \cdots, M_m)$ のとき，$O(M) = \{\varepsilon\} \cup \{i \cdot v \mid i = 1, 2, \cdots, m,\ v \in O(M_i)\}$，$M/\varepsilon = M$，$M/i \cdot v = M_i/v$。

項 M の出現 u における部分項 M/u を，N で置き換えて得られる項を $M[u \leftarrow N]$ とかく[1]。

代入とは，写像 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ である。その定義域を次により，$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ へと拡張する：

$$\sigma(f(M_1, \cdots, M_m)) = f(\sigma(M_1), \cdots, \sigma(M_m))$$

代入を用いて，$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の擬順序 $\trianglerighteq$ と関係 $\uparrow$ を次に定義する：$M \trianglerighteq N$ iff $\exists \sigma$ $M = \sigma(N)$，$M \uparrow N$ iff $\exists P$ $P \trianglerighteq M$ かつ $P \trianglerighteq N$。

2.2 項書き換えシステム

集合 $\Sigma = \{A_1 \to B_1, \cdots, A_m \to B_m\} \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が，$\mathcal{V}(A_i) \supset \mathcal{V}(B_i)$ をみたすとき $(1 \leq i \leq m)$，Σ を項書き換えシステムといい，その元を書き換え規則という。ただし，$\mathcal{V}(M)$ は項 M に現われる変数記号の集合である。

代入σ, 出現$u \in \mathcal{O}(M)$, 規則$A \to B \in \Sigma$ があって, $M/u = \sigma(A)$, $N = M[u \leftarrow \sigma(B)]$ となるとき, Mは(uに$A \to B$を用いて) Nへ書き換わるという。このとき, 3項組$\xi = \langle M, u, A \to B \rangle$をリダクションとよび,

$$\xi : M \underset{\Sigma}{\to} N \;(u\,;\, A \to B)$$

と表わす。ξと$(u; A \to B)$は各々省略することがある。

リダクション列$\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m$ ($\xi_i : M_{i-1} \underset{\Sigma}{\to} M_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$)が項$M_0$に始まり項$M_m$に終わることを, $\xi : M_0 \overset{*}{\underset{\Sigma}{\to}} M_m$と表わす。$\xi : M \overset{*}{\underset{\Sigma}{\to}} N$; $\eta : N \overset{*}{\underset{\Sigma}{\to}} P$の連接を$\xi\eta$とかく。

項Mの書き換え可能な部分項をMのリデックスという。Mにリデックスが存在しないとき, Mを正規形という。また, このときリダクション列$N \overset{*}{\underset{\Sigma}{\to}} M$があるなら, Nは正規形Mをもつという。

Mの互いに独立なリデックスの出現$u_1, \cdots, u_m$ ($m \geqslant 0$)を同時に書き換えて項Nが得られるとき, $\xi : M \underset{\Sigma}{+\!\!\!\to} N$ とかいてξを並列リダクションとよぶ。

項Mの非変数部分項の出現の集合を$\mathcal{C}(M) = \{u \mid M/u \notin \mathcal{V}\}$とし, Σの危険対を定義する:

[定義 2.1] $A \to B$, $A' \to B' \in \Sigma$と$u \in \mathcal{C}(A)$に対し, 代入σ, σ'があって$\sigma(A/u) = \sigma'(A')$となるとき, リダクションの対,

$$\langle \sigma(A) \underset{\Sigma}{\to} \sigma(A)[u \leftarrow \sigma'(B')],\quad \sigma(A) \underset{\Sigma}{\to} \sigma(B) \rangle$$

をΣの危険対という(注1)。ただし，σ, σ' としては，$\sigma(A/u) = \sigma'(A')$ を成立させる代入のうち最も一般的なものを選ぶ。また，$A \to B$ と $A' \to B'$ が同一の規則で，$u=\varepsilon$ である場合は除く。■

Σがあいまい対をもつとき，Σはあいまいであるという。

項Mの中に同一の変数が2度以上現われないとき，Mを線形であるという。また，Σのどの規則の左辺 A_i も線形であるとき，Σは線形であるという。

以下では，Σの線形性と，Σのどの規則の左辺も変数記号ではないことを仮定する。

なお，以後では混同の無い限り添字Σを省略する。

2.3 リダクションによる出現の伝達

リダクション $\xi: M \to N\ (u; A \to B)$ に対し，$\mathcal{O}(M)$ から $\mathcal{O}(N)$ への対応 τ_ξ を次で定義し，ξによる出現の伝達とよぶ(注2)：

$v \in \mathcal{O}(M)$ に対し，

(注1) 通常，危険対とは項の対 $\langle \sigma(A)[u \leftarrow \sigma'(B')], \sigma(B) \rangle$ をいう[1,3]。しかし，ここでは上のように定義しておく。

(注2) residual の概念[2,4]を修正したものである。

$$\tau_\xi(v) = \begin{cases} \{v\} & \text{if } v \prec u \text{ または } v \perp u, \\ \{u\} & \text{if } \exists w \in \mathcal{C}(A)\ v = uw, \\ \{uw_2v' \mid v = uw_1v',\ A/w_1 = x \in \mathcal{V},\ B/w_2 = x\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

リダクション列$\xi = \xi_1\xi_2\cdots\xi_m$に対しては，$\tau_\xi$を$\tau_{\xi_1}, \tau_{\xi_2}, \cdots, \tau_{\xi_m}$の合成対応として定義する。ただし，$\xi$が空列のときは$\xi$が出発する項Mに対し，$\tau_\xi$を$\mathcal{O}(M)$上の恒等写像としておく。また，並列リダクションに対しては，上の定義に準ずるものとする。

2.4 τ合流性

合流性(Church-Rosser性)[1,3]を強めた次のような性質を定義しておく。

[定義 2.2] Σがτ合流性をもつとは，次が成立することをいう： $\forall \xi : M \xrightarrow{*} N\ \ \xi' : M \xrightarrow{*} N'\ \ \exists \eta : N \xrightarrow{*} P\ \ \eta' : N' \xrightarrow{*} P\ \ \tau_{\xi\eta} = \tau_{\xi'\eta'}$.
■

τ合流性の判定には，合流性の十分条件として知られる種々のものが[1,3]，ほぼ同様の形で適用できる。次はその一例でもある。

[補題2.1] Σが線形であり，その任意の危険対 $\langle \xi : M \to P, \eta : M \to Q \rangle$ に対し，$\xi' : P \mathrel{+\!\!\!\!\!\rightarrow} Q$ があって $\tau_{\xi\xi'} = \tau_\eta$ となるならば，Σはτ合流性をもつ。■

[系] あいまいでない線形項書き換えシステムは，τ合流性をもつ。■

[例2.1] $\Sigma_{or} = \{ or(ff, x) \to x,\ or(x, ff) \to x,\ or(tt, tt) \to tt \}$ は，上の補題より，τ合流性をみたす。■

次章では，無あいまい性より緩い制約，τ合流性を仮定する。

3. Call by need

3.1 必須リデックス

項Mのuにおける部分項が，$\forall \xi : M \xrightarrow{*} N\ \ \tau_\xi(u) \neq \phi$ をみたすとき，必須部分項であるという。Mの必須部分項の出現の集合を $\mathcal{N}(M)$ とかく。特に，必須部分項がリデックスであるとき，それを必須リデックスという(注3)。必須リデックスを書き換えるリダクションを必須リダクションとよぶ。

(注3) この定義は，[2]のそれよりもやや緩い。

正規形をもつ任意の項Mに対し，Mから始まる無限必須リダクション列が存在しないとき，(Σにおいて) call by need は正規化戦略であるという。これに対する十分条件を2つ示す。

［定理3.1］　Σは線形で，τ合流性をみたすとする。このとき任意の危険対 $\langle M \to P, M \to Q \rangle$ において $P = Q$ となるならば，call by needは正規化戦略である。■

［系］　Σがあいまいでなく，線形ならば，call by needは正規化戦略である。■

上記の系は［2］の結果に相当する。

［例3.1］　例2.1の Σ_{or} はあいまいであるが，上の定理より，call by needが正規化戦略になると判る。一方，τ合流性をみたさない次の例では，そうでない：　$\Sigma'_{or} = \{or(tt, x) \to tt,\ or(x, tt) \to tt,\ or(ff, ff) \to ff\}$。■

［定理3.2］　Σによる，ある空でない必須リダクション列 $\xi: M \xrightarrow{*} N$ に対し，$\eta: M \to N\ (\varepsilon; M \to N)$ としたとき $\tau_\xi = \tau_\eta$ となる

とする。このとき，Σにおいてcall by needが正規化戦略であるならば，$\Sigma \cup \{M \to N\}$においてもそうである。■

[例3.2]　$\Sigma = \{f(x) \to g(x, f(x)),\ g(a, x) \to a\}$ において，$f(a) \to g(a, f(a)) \to a$。そこでまず$\Sigma$に定理3.1の系を用い，次に$\Sigma' = \Sigma \cup \{f(a) \to a\}$に定理3.2を用いれば，あいまいな$\Sigma'$においてもcall by needは正規化戦略であることが導かれる。■

4. 必須リデックスの計算

前章の定理が適用できる場合，与えられた項に対しその必須リデックスを少なくともひとつ発見できる手段を与えておけば，必ず正規形に到達できる（もし，存在するならば）ことになる。HuetとLévyは，あいまいでない線形項書き換えシステムがstrong sequentialityをみたすとき，必須リデックスを線形時間で計算できることを導いた[2]。本章では，その結果があいまいさを許しても成立していることを示す。

新しい変数記号の可算集合$\mathcal{V}'$（$\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \phi$）を加えて生成される項の集合$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$の元$\bar{M}$に対し，$null(\bar{M}) = \{u \mid \bar{M}/u \in \mathcal{V}'\}$を$\bar{M}$の欠損した部分項の出現の集合という。代入$\sigma$を$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$上に拡張しておく。

[定義 4.1]　Σ の左辺の集合を $\mathcal{L}=\{A \mid A\to B\in\Sigma\}$, 欠損左辺の集合を $\mathcal{L}^{null}=\{A[u_i\leftarrow \bar{x}_i \mid i\leq m] \mid A\in\mathcal{L}, \{u_1,\cdots,u_m\}\subset \mathcal{C}(A)$ は互いに独立な出現の集合, $\{\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m\}\subset\mathcal{V}'\}$ とする。

また, 拡張左辺の集合 $\mathcal{L}^{ext}$ を次で定義する:

(i) $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}^{ext}$,

(ii) $\bar{A}\in\mathcal{L}^{null}$, $null(\bar{A})=\{u_1,\cdots,u_m\}$, $\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_m\in\mathcal{L}^{ext}$ のとき, $\bar{A}[u_i\leftarrow\tilde{A}_i \mid i\leq m]\in\mathcal{L}^{ext}$。

ただし, $\mathcal{V}(\bar{A})\cap\mathcal{V}(\tilde{A}_i)=\emptyset$ $(1\leq i\leq m)$, $\mathcal{V}(\tilde{A}_i)\cap\mathcal{V}(\tilde{A}_j)=\emptyset$ $(i\neq j;\ 1\leq i,j\leq m)$ となるようにする。■

$\mathcal{L}^{ext}\subset\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ である。また, Σ の線形性より, $\mathcal{L},\mathcal{L}^{null}$, $\mathcal{L}^{ext}$ の全ての元が線形である。

項 M の共有されるリデックスの出現の集合 $\mathcal{S}(M)$ を次で定義しておく: $u\in\mathcal{S}(M)$ iff $\forall v\in\mathcal{O}(M)\ \forall\tilde{A}\in\mathcal{L}^{ext}$ $M/v\trianglerighteq\tilde{A}$ かつ $u=vw$ ならば $w\in\mathcal{C}(\tilde{A})$。すなわち, u のリデックスはそれ自身より上方にマッチする全ての拡張左辺に(その非変数部分項として)共有されている。$\mathcal{S}(M)$ は左辺の情報のみから計算できることに注意する。

[補題 4.1]　$\mathcal{S}(M)\subset\mathcal{N}(M)$ 。■

ここで，欠損左辺 $\bar{A}\in\mathcal{L}^{null}$ に対し，その共有される欠損部分項の出現の集合を $S^{null}(\bar{A})=\{u\in null(\bar{A}) \mid \forall A\in\mathcal{L}\ \ A\uparrow\bar{A}\Rightarrow u\in C(A)\}$ とする。また，真の欠損左辺の集合を $\underline{\mathcal{L}}^{null}=\{\bar{A}\in\mathcal{L}^{null} \mid \nexists A\in\mathcal{L}\ \ \bar{A}\geq A\}$ とする。次の性質（注4）は可解である：

［性質4.1］　任意の $\bar{A}\in\underline{\mathcal{L}}^{null}$ に対し，空でない集合 $s(\bar{A})\subset S^{null}(\bar{A})$ があって次をみたす：$\forall u\in s(\bar{A})\ \ \forall\bar{A}'\in\underline{\mathcal{L}}^{null}$

$\bar{A}[u\leftarrow\bar{A}']\in\underline{\mathcal{L}}^{null}$ ならば，

(i) $\exists v\ \ \ uv\in s(\bar{A}[u\leftarrow\bar{A}'])$，かつ

(ii) $\forall v\ \ \ uv\in s(\bar{A}[u\leftarrow\bar{A}'])\ \Rightarrow\ v\in s(\bar{A}')$。■

［補題4.2］　線形な Σ において性質4.1が成立するとき，正規形でない任意の項Mにおいて $S(M)\neq\phi$（注5）。■

［定理4.1］　線形な Σ において性質4.1が成立するとき，

（注4）　この性質は，［2］の matching dag の存在条件を我々の記法で表わしたものであり，あいまいでない場合には，strong sequentiality と同値であることが示されている［2］。

（注5）　Huet と Lévy のアルゴリズムを使えば，項のサイズに対し線形時間で $S(M)$ の元をひとつ計算できる。

正規形でない任意の項Mに対し，少なくともひとつの必須リデックスを計算できる。■

[例4.1]　例3.2のΣ'には定理4.1が適用できる。例えば，$g(f(a), a)$の必須リデックスは$f(a)$と求まり，$f(a) \to a$および$f(x) \to g(x, f(x))$のいずれの規則を用いるかは任意である。
■

5. むすび

Call by needが正規化戦略であるクラス，および必須リデックスを計算できるクラスは，ともにあいまいさを許す場合へと真に拡張された。なお，後者に関して，strong sequentialityが共有リデックス$S(M)$の存在の十分条件であることが判っているが，同時に必要条件でもあることを予想している。

最後に，著者のひとりが日本電信電話公社で実習を行った際，討論をいただいた武蔵野電気通信研究所の外山芳人氏に謝意を表します。

162

文献

[1] Huet, G. "Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems," J. ACM 24-4 (1980).

[2] Huet, G. and Lévy J.-J. "Call by need computations in non-ambiguous linear term rewriting systems," Rab. Lep. 359, IRIA (1979).

[3] Knuth, D. E. and Bendix, P. B. "Symple word problems in universal algebras," Computational problems in abstract algebra, Ed. J. Leech, Pergamon Press (1970), pp. 263-297.

[4] O'Donnel, M. "Computing in systems described by equations," LNCS 58, Springer-Verlag (1977).

[5] Toyama, Y. "On reduction strategies: abstract approaches," L.A. Symp. (Aug. 1983).