

## 多値論理関数の本質的極小閉集合

電気通信大学 町田 元  
(Hajime Machida)

モントリオール大学 Ivo Rosenberg

### 1. はじめに

整数  $k > 1$  に対し、 $\underline{k} = \{0, 1, \dots, k-1\}$  とおく。 $\underline{k}$  上の  $n (> 0)$  変数関数  $f$ , すなわち、 $f: \underline{k}^n \rightarrow \underline{k}$  を一般に  $k$  値論理関数 とよぶ。 $n$  変数  $k$  値論理関数の全体を  $O_k^{(n)}$ , また、 $k$  値論理関数の全体  $\bigcup_{n>0} O_k^{(n)}$  を  $O_k$  と表わす。以下、 $k$  値論理関数を単に関数とよぶ。

関数の集合  $F \subseteq O_k$  は、(i) 射影関数  $e_i^n: (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  をすべて含み、(ii) 関数の合成に関して閉じているとき、閉集合 または clone という。閉集合の全体  $L_k$  は包含関係  $\subseteq$  の下で束をなす。

可算無限個の元からなる束  $L_2$  については [6] により完全に調べられているが、 $k \geq 3$  に対しては  $L_k$  の濃度が  $2^{k^k}$  であることや、極大閉集合、すなわち、 $L_k - \{O_k\}$  の極大元、がすべて求められていること ([7]) などを除き、ま

だあまり調べられていない。

$L_k$  ( $k \geq 3$ )の中の“小さい元”について最近得た結果を報告するのが本稿の目的である。

射影関数の全体を  $PR_k$  とおくと、 $L_k - \{PR_k\}$  の極小元を 極小閉集合 (minimal clone) とよぶ。Csákány は、 $k=3$  に対しすべての極小閉集合を求めた ([1])。  $L_k$  の代数的構造という観点からは最も“小さい元”として極小閉集合を考えるのが自然であろうが、一方、関数の合成という面に重きを置いて考えると、単に極小閉集合を考えるのでは十分とは言い難い。何故ならば、本質的1変数関数から生成される極小閉集合が多く存在するが、本質的1変数関数を何回合成しても本質的1変数関数しか得られないので、それらを考えることは  $O_k^{(1)}$  の中だけで閉集合を考えるのとほとんど同じことだからである。(  $O_k^{(1)}$  の極小閉集合を求めることは容易である。 )

このようなつまらない極小閉集合を除外するため、筆者らは本質的極小閉集合という概念を定義し考察してきた ([2, 3, 4, 5])。ここでは、おもに本質的2変数関数  $f$  に対し、 $f$  によって生成される閉集合が本質的極小閉集合であるための条件をいくつか示す。例えば、次のことが成り立つ。

本質的2変数関数  $f$  が次の a) - d) のいずれかをみたすな

らば、 $f$ が生成する閉集合は本質的極小閉集合である。(簡単のため、 $f(x, y)$ を $xy$ と表わす。)

$$a) (xy)z = x(xy) = x(yy) = xy,$$

$$b) (xy)z = x(y(x(xx))) = xy, \quad x(xy) = x(xx),$$

$$c) x(yz) = xx, \quad (xy)(xy) = (xy)y = (xx)y = xy,$$

$$d) (xy)z = xy, \quad x(yz) = x(xx).$$

なお、紙面の都合上ほとんどの場合証明は省略する。

## 2. 定義

以下、 $k > 1$ は任意に固定して考えるので、添字の $k$ は省略する。

定義1. 関数  $f \in O^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , に対し、 $|f(a_1, \dots, a_{i-1}, \underline{k}, a_{i+1}, \dots, a_n)| \geq 2$  となる  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n \in \underline{k}$  が存在するとき、 $f$ は才 $i$ 変数に依存するという。また、 $f$ が少なくとも2つの変数に依存するとき、 $f$ は本質的 (essential) 関数であるという。

定義2. 閉集合  $C \in \mathcal{L}$ は少なくとも1つ本質的関数を含むとき本質的閉集合であるという。

定義3. 閉集合  $C \in \mathcal{L}$ は、(i) 極小閉集合ではなく、(ii) 本質的閉集合全体の中の極小元であるとき、本質的極小閉集合 (essentially minimal clone) という。

言いかえると、閉集合  $C$  が本質的極小であるのは、(i)  $C$  は本質的集合であるが、 $C$  の任意の真部分閉集合は本質的ではなく、(ii)  $C$  は恒等関数  $e_1$  以外に1変数関数を少なくとも1つ含む場合である。

記法. 集合  $F \subseteq O$  に対し、 $F$  によって生成される閉集合、すなわち、 $F$  を含む最小の閉集合を  $[F]$  と表わす。とくに、 $F = \{f\}$  のとき、 $[\{f\}]$  を  $[f]$  と表わす。

次に、本質的極小閉集合の基本的な性質を述べる。

命題. 本質的極小閉集合  $F$  は、 $F$  に属する任意の本質的関数  $f$  によって生成される ( $F = [f]$ )。

### 3. 本質的極小閉集合

任意の関数  $f \in O$  に対し、 $f$  の対角線関数  $f^* \in O^{(1)}$  を次のように定める： 任意の  $x \in \underline{k}$  に対し、 $f^*(x) = f(x, \dots, x)$ 。

また、 $h \in O^{(1)}$  に対し  $\langle h \rangle = \{x \in \underline{k} \mid \exists i > 0, h^i(x) = x\}$  とおき、さらに、 $f \in O^{(n)}$  に対し  $\langle f \rangle = \langle f^* \rangle$  とおく。例えば、 $h \in O^{(1)}$  に対し、 $\langle h \rangle = \underline{k}$  であることは  $h$  が全単射関数であることと同値である。

定義.  $h \in O^{(1)}$  は  $h^2 = h$  をみたすとき 反射的 (reflective) であるという。

まず、次の補題を導く。

補題.  $f \in O^{(n)}$  が本質的極小閉集合の生成元であるならば

$$\phi \neq \langle f \rangle \subsetneq \underline{k}$$

である。

証明.  $\langle f \rangle \neq \phi$  は明らか。  $\langle f \rangle \subsetneq \underline{k}$  を示すため、  $\langle f \rangle = \underline{k}$

と仮定し矛盾を導く。  $\langle f \rangle = \langle f^* \rangle = \underline{k}$  は  $f^*$  が置換である

ことを示す。  $f^*$  の位数を  $p$  とおき、新たに関数  $g \in O^{(n)}$

を次のように定める：  $g(x_1, \dots, x_n) = (f^*)^{p-1}(f(x_1, \dots, x_n))$ 。

このとき、  $g$  は本質的関数であるにもかかわらず  $[g] \subsetneq [f]$

となるから矛盾である。  $\square$

関数  $f \in O^{(n)}$  に対し、  $f$  を  $\langle f \rangle$  上に制限した関数が本質的である場合には、本質的極小性を単なる極小性に帰着させることにより、  $f$  が生成する閉集合  $[f]$  が本質的極小であるための必要十分条件を与えることができる。

定理 1 ([5]). 関数  $f \in O^{(n)}$  に対し、  $A = \langle f \rangle$  とお

く。  $f$  の  $A$  上への制限  $f|_A$  が本質的関数であるとする。こ

のとき、  $[f]$  が本質的極小閉集合であるための必要十分条

件は次の (i) - (iii) がすべて成り立つことである。

(i)  $A \subsetneq \underline{k}$ ,

(ii)  $f^*$  は反射的であり、任意の  $x_1, \dots, x_n \in \underline{k}$  に対し

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(f^*(x_1), \dots, f^*(x_n)) \text{ となる.}$$

- (iii) a)  $f(A^n) \subseteq A$  であり,  $f|A^n$  は  $A$  上の極小閉集合を生成するか, または, b)  $f^*(f(x_1, \dots, x_n))$  は本質的関数でないか, いずれかである。

$k=3$  の場合, 定理 1 から得られる本質的極小閉集合は, (同型を除くと) 全部で 5 個あるが, それらの中のいくつかの生成元を示す。ここで,  $k=2$  の場合の極小閉集合 (のうち本質的関数を含むもの) は, 次の 4 つの関数の各々から生成されるものに限られることを用いる:  $x \cdot y$ ,  $x+y$ ,  $x \oplus y \oplus z$ ,  $x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x$ 。

例.  $k=3$  のとき, 定理 1 によって本質的極小であることが示される閉集合のうち, 2変数関数を生成元とするものは (同型を除くと) 3 つある。生成元を図によって示す。

(1)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

(2)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

(3)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 |

残る場合は,  $f$  の  $\langle f \rangle$  への制限が本質的でない場合であるが, これについては, (極小閉集合に帰着させるという意味においても,) まだ分類は完成していない。

次章で、生成元  $f$  が 2 変数関数である場合について、これまで得られた部分的結果を述べる。

#### 4. 本質的極小 groupoid

2 変数関数から生成される閉集合、または、単に 2 変数関数自身を groupoid とよぶことがある (universal algebra の用語)。ここでは、本質的極小 groupoid について最近得られた結果を述べる。

任意の  $f \in O^{(2)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  に対し、関数  $*_i \in O^{(2)}$  を

$$x *_i y = (f^*)^i (f(x, y))$$

と定める。(ただし,  $*_0 = f$  とする。)

定理 2.  $f \in O^{(2)}$  に対し、 $\langle f \rangle = \underline{l} \not\subseteq \underline{k}$  とし、また、 $f$  は  $\langle f \rangle$  上で本質的でないとは定する。さらに、任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対し  $x *_i y$  は本質的であり、 $f$  は  $\underline{k} \times \underline{l}$  上で本質的であるとする。このとき、 $[f]$  が本質的極小 groupoid であれば、 $f$  は次の a) または b) をみたす。(ここで、値  $f(x, y)$  を  $xy$  と表わす。)

a)  $(xy)z = x(xy) = x(yx) = xy,$

b)  $(xy)z = x(y(x(xx))) = xy, \quad x(xy) = x(xx).$

次に、 $f \in O^{(2)}$  が与えられたとき、任意の  $y \in k$  に対し関数  $c_y \in O^{(1)}$  を、 $c_y(x) = f(x, y)$  により定める。このとき、すべての  $y \in k$  に対し  $c_{y^j}$  が反射的となるような  $j \in \mathbb{N}$  が存在する。この  $j$  に対し、新しい関数  $\odot$  を次のように定める：  

$$x \odot y = c_{y^j}(x).$$

定理 3.  $f \in O^{(2)}$  に対し、 $\langle f \rangle = \underline{l} \subsetneq k$  とし、また、 $f$  は  $\langle f \rangle$  上で本質的でないとは仮定する。さらに、任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対し  $x *_i y$  は本質的であり、 $f$  は  $k \times \underline{l}$  上で本質的でないが、 $x \odot y$  は本質的であるとす。このとき、 $[f]$  が本質的極小 groupoid であれば、 $f$  は次の c) または d) をみたす。

- c)  $x(yz) = xx$ ,  $(xy)(xy) = (xy)y = (xx)y = xy$ ,  
 d)  $(xy)z = xy$ ,  $x(yz) = x(xx)$ .

さらに、定理 2, 3 の逆が成り立つ。

定理 4.  $f(x, y) = xy$  に対し、定理 2 の a), b), または、定理 3 の c), d) が成り立つならば、 $[f]$  は本質的極小 groupoid である。



証明. a)の場合についてのみ、証明の概略を示す。

閉集合  $[f]$  に属する任意の本質的  $n (> 1)$  変数関数  $h$  に対し、 $f \in [h]$  となることを示せばよい。

まず、a) の等式を駆使することにより次の性質 1 を導く。

性質 1. ある  $p > 1$  および  $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$  に対し、 $h$  は次のように表わされる。

$$\begin{cases} h(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}(x_{i_2}(\dots(x_{i_{p-1}}x_{i_p})\dots)), \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_p. \end{cases}$$

次に、関数  $h_j \in O^{(2)}$ ,  $j > 0$ , を次のように定める。

$$\begin{cases} h_1(x, y) = x, \\ h_j(x, y) = f(x, h_{j-1}(y, x)) \quad (j > 1). \end{cases}$$

このとき、性質 1 において  $h(x, y, \dots, y)$  を考えることにより次の性質が示される。

性質 2. ある  $j > 1$  に対し  $h_j \in [h]$ 。

さて、ここで  $j = 2$  であれば、 $h_2 = f$  であることから証明は終わる。 $j > 2$  の場合は、新たに関数  $\varphi(x, y) = h_j(x, h_j(y, y))$  を考え、再び a) の等式を用いると、 $\varphi = f$  が導かれる。従って、 $f = \varphi \in [h_j] \subseteq [h]$  となつて、 $[f]$  が本質的極小であることが示された。  $\square$

REFERENCES

- [1] Csákány, B., All minimal clones on the three-element set, Acta Cybernetica 6 (1983) 227-238.
- [2] Machida, H., Essentially minimal closed sets in multiple-valued logic, Trans. IECE Japan, E64 (1981) 243-245.
- [3] Machida, H., A theorem on essential minimality in k-valued logic, ibid., E65 (1982) 123-124.
- [4] Machida, H., Toward a classification of minimal closed sets in 3-valued logic, Proceedings 12th Intern. Symposium Multiple-valued logic, IEEE (1982) 313-317.
- [5] Machida, H.; Rosenberg, I.G., Classifying essentially minimal clones, Proceedings 14th Internat. Sympos. Multiple-valued logic, IEEE (1984) 4-7.
- [6] Post, E.L., The two-valued iterative systems of mathematical logic, Annals of Math. Studies No. 5 (Princeton Univ. Press, 1941).
- [7] Rosenberg, I.G., Über die funktionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken. Rozpravy Čs. Akademiě Věd. Ser. Math. Nat. Sci., 80 (1970) 3-93.
- [8] Rosenberg, I.G., Minimal clones I: The five cases, preprint CRMA-1209, Université de Montréal, (1984) 21 pp.