数理解析研究所講究録
第 556 巻 1985 年 306-318

時空間様相論理ＥＴＳＬの
完全・無矛盾な公理系

岩沼宏治[+]　　原尾　政輝[++]　　野口　正一[+]
Koji　IWANUMA　Masateru HARAO　Syoichi NOGUTI

[+] 東北大学電気通信研究所　　[++]山形大学工学部
[+] Research Institute of Electrical Communication,　TOHOKU University
[++]Faculty of Engineering,　YAMAGATA University

１　序論　並列システムの性質の記述，検証は近年その重要性を増してきている．システムの時間的性質を扱うため時制論理等が研究されているが，複数のプロセス相互の結合より生じる空間的性質を扱った研究は極めて少ない[4]．本稿では時間と空間双方を扱う時空間様相論理ＥＴＳＬ[2,3] の完全かつ無矛盾な公理系を示す．これは時間と空間に対する論理としては初の試みである．

２　時間と空間のモデル　本稿では，連結有向グラフ（以下，空間グラフ）を空間と考え，時間は離散的，線形順序構造を持つと仮定する．また時間の流れは空間のどこでも一様と仮定する．また任意の空間座標（グラフの節点）は任意の時刻に独自の状態（以下，世界）を持つとする．以上より時空間は世界は格子状に並んだものとしてモデル化出来る．このとき世界は相互に時間的，空間的に結合しているから，これを時間リンク，空間リンクと呼ぶ２項関係で表現する．

３　ＥＴＳＬ　正規プログラムの命題ダイナミック論理（以下，ＰＤＬ）[1,5] に対して，プログラムを上記のリンクと解釈し直し，意味領域を，時空間モデルと整合するものに限定する．更に位置を指定する演算子“〖vi〗”を付加したものがＥＴＳＬである．以下の空間グラフに附随して定義する．

【定義】　空間グラフＧ＝<ＶG,ＬG,ＥG,>とは以下の連結グラフである．

　ＶG ；　節点の可算集合

LG； 弧ラベルの可算集合

EG； $LG \to 2^{VG \times VG}$，各ラベルを持つ弧がどの節点間にあるのかを決める関数

又，空間グラフGが有限であるとは，VG 及びLG が有限である時を言う． ■

基底の原子記号の集合はΦ_0，Σ_0 の２つである．

Φ_0；命題定数Trueを含む，素命題の可算集合，

$\Sigma_0 = LG \cup \{N\} \cup \{T\}$，原子リンクの可算集合

任意の弧ラベル$A_i \in LG$ は空間リンクであり，世界間の空間的結合を示す２項関係の名前である．Tは空間全リンクと呼び，２つの世界が同時刻にあることを示す２項関係の名前である．Nは唯一の時間リンクであり，時間的結合関係を示す２項関係の名前である．

【定義】論理式の集合Φ，リンクの集合Σは以下のもの．

1) $P \in \Phi_0$ なら，$P \in \Phi$

2) $p, q \in \Phi$，$a \in \Sigma$なら，$v_i \in VG$ なら，

$$\sim p,\ p \wedge q,\ \langle a \rangle p,\ [\![v_i]\!]\, p\ \in \Phi$$

3) $A \in \Sigma_0$ なら，$A \in \Sigma$

4) $a, b, c \in \Sigma$（但しc中にはNが出現しない），$p \in \Phi$なら，

$$a\,;b,\ a \cup b,\ a^*,\ p?,\ c^- \in \Sigma$$ ■

$[a]\,p$で$\sim\langle a \rangle \sim p$を略記し，∨，⊃，≡も通常の通りとする．ＰＤＬではΣ_0 の元は“プログラム”と解釈するが，形式的に見れば世界間の２項関係の名前をあらわす単なる記号であり，その必要性は無い．本稿では“リンク”（即ち時空間中のパス）と解釈し直した．次に意味を与える．

【定義】 意味領域（以下，構造）は次の４項組Mである．

$$M = \langle S, \pi, \rho, \psi \rangle$$

S； 世界の可算集合

π； $\Phi \to 2^S$，論理式が成り立つ世界を決める関数で，$\pi(\mathrm{True}) = S$なるもの．

ρ； $\Sigma \to 2^{S \times S}$，世界間のリンクによる結合関係を決める関数

ψ； $S \to VG$，世界の空間座標（グラフGの節点）を決める関数

次の性質1)～10) と後述の11) ～13) を満たすMをＥＴＳＬモデルと呼ぶ．

1) $\rho(a;b) = \rho(a) \circ \rho(b)$　（関係の合成）

2) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$　（関係の集合和）

3) $\rho(a^{*}) = (\rho(a))^{*}$　（反射的推移的閉包）

4) $\rho(a^{-}) = \{(t,s) \mid (s,t) \in \rho(a)\}$

5) $\rho(T) = \left(\bigcup_{Ai \in LG} \rho(Ai \cup Ai^{-})\right)^{*}$

6) $\rho(p?) = \{(s,s) \mid s \in \pi(p)\}$

7) $\pi(\sim p) = S - \pi(p)$

8) $\pi(p \wedge q) = \pi(p) \cap \pi(q)$

9) $\pi(\langle a \rangle p) = \{s \in S \mid \exists t((s, t) \in \rho(a), t \in \pi(p))\}$

10) $\pi(\llbracket vi \rrbracket p) = \{s \in S \mid \phi(s) = vi, s \in \pi(p)\}$　■

以下$s \in \pi(p)$ を　M．s⊨pで，適宜略記していく．さて　M．s⊨ <a>pは，世界sからリンクaで連結し，かつその上で論理式pが成り立つある世界tが存在する，ことを意味する．M．s⊨〚vi〛pは，世界sの空間座標は節点viであり，かつその上でpが成り立っている事を意味する．

さらにETSLモデルを格子状のものに制限し，時空間のモデルと整合させる．その条件11）～13）を与える．

【定義】　性質11）とは次のもの．

11）任意の$s \in S$に対して，$(s, t) \in \rho(N)$ かつ$\phi(s) = \phi(t)$ なる唯一の$t \in S$が存在する．　■

上のtは，sの“次時刻”にあると言う．以上より同じ空間座標を持つ世界の集合は，疑似的線形順序$\rho(N^{*})$ を持つ．ところで，条件5)より$(s, t) \in \rho(T)$ であれば，sとtは時間リンクNを経ず，空間リンクのみで連結出来るので，“同時刻”にあると考えられる．よってsと同時刻にある世界の集合$\lambda(s)$ を，$\lambda(s) = \{t \in S \mid (s, t) \in \rho(T)\}$と定義する．以上の準備のもとで次の条件を考える．

【定義】　性質12),13）とは次のもの．

12）任意の$s \in S$に対して，$\phi \mid \lambda(s)$ が全単射であり，かつ任意のt，$u \in \lambda(s)$，A

$\in LG$ に対して，$(t, u)\in\rho(A)$ ならば，　$(\phi(t), \phi(u))\in EG(A)$

13) 任意のs，s´，t，t´∈S，及びA∈LG に対して，$(s,s')\in\rho(N)$，$(t,t')\in\rho(N)$，$(s,t)\in\rho(A)$ ならば，　$(s', t')\in\rho(A)$　■

12) より $\lambda(s)$ 中の空間リンクによる結合関係は，空間グラフGと同形になり，13) より，時間の流れの一様性が保証される．

通常のように論理式pに対して，M．s⊨pなるETSLモデルMと世界sが存在する時，pは充足可能と定義し，～pが充足不能の時，pは恒真と言う．

4　有限空間グラフに付随するETSLの公理系

空間グラフ $G=\langle VG, LG, EG\rangle$ に付随するETSLに対して，次に公理系を示す．

［公理］

1)　任意の恒真な命題論理式はETSLの公理．

2)　$\langle a\rangle p\wedge[a]q\supset\langle a\rangle(p\wedge q)$

3)　$\langle a;b\rangle p\equiv\langle a\rangle\langle b\rangle p$

4)　$\langle a\cup b\rangle p\equiv\langle a\rangle p\vee\langle b\rangle p$

5)　$\langle a\rangle(p\vee q)\equiv\langle a\rangle p\vee\langle a\rangle q$

6)　$\langle a^{*}\rangle p\equiv p\vee\langle a\rangle\langle a^{*}\rangle p$

7)　$\langle a^{*}\rangle p\supset p\vee\langle a^{*}\rangle(\sim p\wedge\langle a\rangle p)$

8)　$\langle p?\rangle q\equiv p\wedge q$

9)　$\langle (a;b)^{-}\rangle p\equiv\langle b^{-};a^{-}\rangle p$

10)　$\langle (a\cup b)^{-}\rangle p\equiv\langle a^{-}\cup b^{-}\rangle p$

11)　$\langle (a^{*})^{-}\rangle p\equiv\langle (a^{-})^{*}\rangle p$

12)　$\langle (p?)^{-}\rangle p\equiv p\wedge q$

13)　$\langle (a^{-})^{-}\rangle p\equiv\langle a\rangle p$

14)　$p\supset[a]\langle a^{-}\rangle p$

15)　$\bigvee$ (〚vi〛True)　（空間グラフGの節点viに関する選言）

　$vi\in VG$

16)　〚vi〛$p\equiv$〚vi〛True$\wedge p$

17) $v_i \neq v_j$ の時

$$[\![v_i]\!]\,True \supset \sim [\![v_j]\!]\,True$$

18) $\langle N\rangle p \equiv [N]p$

19) $[\![v_i]\!]\,True \equiv \langle N\rangle [\![v_i]\!]\,True$

20) $\langle N\rangle [\![v_i]\!]\,True \equiv [\![v_i]\!]\ \langle N\rangle True$

21) $\langle N\rangle\langle a\rangle p \equiv \langle a\rangle\langle N\rangle p$

22) $\langle T\rangle p \equiv \langle (\bigcup_{A_i \in LG} (A_i \cup A_i^{-}))^{*}\rangle\ p$

23) $[T]p \supset p$

24) $[N^{*}]([\![v_i]\!]\,True \supset p) \supset \langle T\rangle [\![v_i]\!]\ p$

リンクｃとｄ中に時間リンクＮが出現しないとき，

25) $\langle c\rangle [\![v_i]\!] \sim p \supset \sim \langle c\rangle [\![v_i]\!]\ p$

26) $\langle c\rangle [\![v_i]\!]\ p \wedge \langle d\rangle [\![v_i]\!]\ q \equiv \langle c\rangle [\![v_i]\!]\,(p \wedge q) \wedge \langle d\rangle [\![v_i]\!]\,(p \wedge q)$

27) $\langle c\rangle p \wedge \langle T\rangle q \equiv \langle c\rangle (p \wedge \langle T\rangle q)$

28) $\langle C\rangle\langle T\rangle p \equiv \langle T\rangle p$

29) $[c]\langle T\rangle p \equiv \langle T\rangle p$

30) $\langle T\rangle [\![v_i]\!]\ \langle c\rangle [\![v_j]\!]\ p \equiv \langle T\rangle [\![v_j]\!]\,(p \wedge \langle c^{-}\rangle\ [\![v_i]\!]\,True)$

31) $[\![v_i]\!]\,True \supset (\bigwedge_{(v_i,v_k)\in EG(A_j)} \langle A_j\rangle [\![v_k]\!]\,True) \wedge (\bigwedge_{(v_i,v_k)\in EG(A_j)} \sim\langle A_j\rangle [\![v_k]\!]\,True)$

［推論規則］

Modus Ponens (MP)　　　　Generalization Rule(GR)

$$\frac{p,\ p \supset q}{q} \qquad\qquad \frac{p}{[a]p}$$

■

公理1)～14) と推論規則は，通常のＰＤＬの公理系である．15) ～31) がＥＴＳＬに固有な公理である．31) は対象としている空間グラフＧに付随して決まり，Ｇの形状を特性化している．即ち，この公理系は空間グラフに対するスキーマでもある．

15) ～17) は世界（状態）の空間座標について特性化を行っている．例えば15) は，各

世界の空間座標はグラフＧの節点のどれかであることを主張している．

18）～21）は時間の特性化を行っている．18),19）は，次の時刻の世界は必ず１つあり，空間座標は同じであること，21）は時間の流れの一様性を主張している．

22）～24）は空間全リンクＴの特性化，即ち“同時刻”の特性化を行う．23）は，ある時刻において任意の場所でｐが成り立つなら，その時刻で（空間を眺めている）もとの場所でもｐが成り立つことを主張している．

同様に，27）～32）はＮを含まないリンクを用いて“同時刻”を特性化する．29）の左辺から右辺の含意を例にとる．ある世界からリンクｃで行った先が同時刻（ｃ中にＮが出現しないから）の節点viの世界ｓであり，そこでｐが成り立ち，同様にｄで行った先も節点viの世界ｔでありｑが成り立つとする．ある時刻においては，１つの空間座標に１つの世界しかないから，２つの世界ｓとｔは同じものである．従って，そこではｐとｑが両方成りたつ．以上を29）は主張している．

さて通常のように，論理式ｐがこの公理系で証明可能であることを　⊢ｐ　と記す．また　⊢～ｐ　でない論理式ｐは，無矛盾であると定義する．

５　公理系の完全性と無矛盾性

前述の公理系が恒真であることは，容易に証明出来る．

【定理１】　有限な空間グラフＧに付随するＥＴＳＬ(G）に対して，前述の公理系は無矛盾である．　■

完全性に関して次が成り立つ．

【定理２】　有限な空間グラフＧに付随するＥＴＳＬ(G）に対して，前述の公理系は完全である．　■

（証明）　任意の無矛盾論理式ｐが充足可能であることを示せば十分である．ところでＥＴＳＬに於いては，定理３の有限モデルの存在定理から，充足可能性と有限な疑似モデルの存在が同値となる．従って公理系の完全性を示すには，無矛盾論理式ｐに対して，必ずその疑似モデルが構築出来ることを示せばよい．以下まずその有限モデルの存在定理について略説する．本稿では紙面の都合上，証明は行わない．

まずFischer-Ladner Closure[1,5]を定義する．（以下，FLと略）

【定義】 論理式 p_0 の $FL(p_0)$ とは，p_0 を含み次の条件を満す集合Fのうち最小のものである．

1) $\sim p \in F$ ⇨ $p \in F$

2) $p \wedge q \in F$ ⇨ $p, q \in F$

3) $\langle a\rangle p \in F$ ⇨ $p \in F$

4) $\langle a;b\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a\rangle\langle b\rangle p \in F$

5) $\langle a \cup b\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a\rangle p, \langle b\rangle p \in F$

6) $\langle a^*\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a\rangle\langle a^*\rangle p \in F$

7) $\langle P?\rangle p \in F$ ⇨ $p, q \in F$

8) $\langle (a;b)^-\rangle p \in F$ ⇨ $\langle b^-\rangle\langle a^-\rangle p \in F$

9) $\langle (a \cup b)^-\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a^-\rangle p, \langle b^-\rangle p \in F$

10) $\langle (a^*)^-\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a^-\rangle\langle (a^-)^*\rangle p \in F$

11) $\langle (p?)^-\rangle q \in F$ ⇨ $p, q \in F$

12) $\langle (a^-)^-\rangle p \in F$ ⇨ $\langle a\rangle p \in F$

13) 〖vi〗$p \in F$ ⇨ $p \in F$ ■

この時，FL(po)の濃度は，有限であることが容易に示される[1,2,3,5]．

【定義】 性質1)～5),12),13)，及び次の 6')～11')，を満し，かつ $\pi(p) \neq \phi$ である構造Mを，pの疑似モデルと呼ぶ．

6') $p \in FL(p_0)$ ⇨ pに対して性質6)が成り立つ．

7') $\sim p \in FL(p_0)$ ⇨ $\sim p$ に対して性質7)が成り立つ．

8') $p \wedge q \in FL(p_0)$ ⇨ $p \wedge q$ に対して性質8)が成り立つ．

9') $\langle a\rangle p \in FL(p_0)$ ⇨ $\langle a\rangle p$ に対して性質9)が成り立つ．

10') 〖vi〗$p \in FL(p_0)$ ⇨ 〖vi〗pに対して性質10) が成り立つ．

11'-a) 任意の $s \in S$ に対して，$(s, t) \in \rho(N)$，かつ $\phi(s) = \phi(t)$ なる $t \in S$ が幾つか存在する．

b) 任意の $\langle N\rangle p \in FL(p_0)$ に対して，$M, s \models \langle N\rangle p$ ならば，$(s, t) \in \rho(N)$ なる任意の $t \in S$ において，$M, t \models p$ ■

このとき，次の定理が成り立つ．

【定理３】　(有限モデルの存在定理)

有限な空間グラフＧが与えられている場合，ＥＴＳＬ(G) の任意の論理式ｐに対して次の条件は同値である．

1)　ｐが充足可能．

2)　ｐの疑似モデルＭが存在する．　但しＭの世界集合Ｓの濃度は有限　■

(証明)

[2,3] を参照して戴きたい．類似の証明としては[1,5] がある．基本的アイデアは．FL(po)中の論理式の真偽に関する同値関係による商構造の生成である[1,3,5] ．　■

以上の定理のもとで完全性の証明を行う．

【定義】　p_0 を無矛盾論理式，FL(po)＝｛p_1 ，…，p_k ｝であるとする．このとき，FL(po)，空間グラフＧの節点viに対するvi－Atomとは，〖vi〗(q_1 ∧…∧q_k)なる形をした論理式のことである．但し，各q_i はp_i または～p_i である．FL(po)，ＧのL-Atomとは，任意のvi－Atomを言う．vi－Atom，L-Atomの集合を，それぞれvi－ATOM(po)，L-ATOM(G,po)であらわす．またＧ，p_0 が明らかな時は省略する．　■

このとき，まずL-ATOMから世界集合λを次のように定義する．

【定義】　位数ｄの空間グラフＧ，FL(po)に対して，世界集合λとは，直積

Ｚ(G,po)＝ｖ1 －ATOM×ｖ2 －ATOM×…×ｖd －ATOM　(但し，ｖi はＧの節点)

の元である．またＧ，p_0 が明らかな時は省略する．　■

λの定義は順序対であるが，順序は無視しても混乱は生じないので，以下では適宜，集合として考える．さて同一のL-AtomがＺ中の複数の世界集合に出現する．ここではこの出現を区別したい．そこで混乱防止のため，Ｚの元，及びλの元をそれぞれ番号付けしておく．まずＺは有限個の元しか持たないので，自然数で番号付ける．番号ｍを持つλをλm と記す．さてλの元の番号付けであるが，Ｚの番号の集合をμとし，直積S_Z＝μ×{1,…，d}(但しｄは空間グラフの位数）を考える．この上で関数δ；S_Z→L-ATOMを次のように定義し，<m,i> ∈ＳｚにL-Atomを付加させる．

$\delta(<m,i>) = \delta i\ (\lambda m)$ (但しδi ; $Z \to vi$ -ATOM は，直積Zの標準射影．)

以上でλm に出現するvi -atom を，順序対$<m,i> \in S_Z$で番号付けした．この時λm は， $\lambda m = \{<m,1>, <m,2>, \cdots, <m,d>\}$ と書ける．また$\delta(<m,i>)$ を$[\![vi]\!]\alpha mi$と略記する．

さて次に世界集合λm をETSLの論理式で特性化することを考える．$\lambda m = \{<m,1>, <m,2>, \cdots, <m,d>\}$ であるとき，次の連言Θm をλm の特性式と言う．

$$\Theta m = \bigwedge_{vi \in VG} <T>[\![vi]\!](\alpha mi \wedge (\bigwedge_{(vi,vk) \in EG(Aj)} <Aj>[\![vk]\!]\alpha mk))$$

【定義】 その特性式Θm が無矛盾である世界集合λm を，同時刻世界集合と言う．同時刻世界集合λm の集合をZ_λとあらわす． ■

この時，$S_{Z\lambda} \subseteq S_Z$を， $S_{Z\lambda} = \{<m,i> \in S_Z \mid \lambda m$ は同時刻世界集合$\}$ と定義しておく． 更に，S_Zの元$<m,i>$ に対してもその特性式βmiを，

$$\beta mi = [\![vi]\!]\alpha mi \wedge \Theta m$$

と定義しておく．これにより，S_Zの元はETSL論理式で一意に区別出来る．このとき，次の補題が成り立つ．

【補題1】 任意の$<m,i> \in S_Z$に対して，次の条件は同値である．

1) $<m,i> \in S_{Z\lambda}$

2) その特性式βmiは無矛盾である． ■

(証明) 1)から2)の証明は，Θm の定義と公理 26,29から背理法で行える．容易なので省略する．次に2)を仮定したとき，βmiの定義からΘm は無矛盾である．従って定義より，$<m,i> \in S_{Z\lambda}$． ■

補題2より$<m,i> \in S_{Z\lambda}$の特性式βmiは無矛盾である．従って$[\![vi]\!]\alpha mi$ ($= [\![vi]\!](q_1 \wedge \cdots \wedge q_n)$)も無矛盾となるので，任意の$p \in FL(po)$に対して， $\beta mi \leqslant p$，もしくは $\beta mi \leqslant \sim p$ どちらか一方が必ず成り立つ．

po に対する疑似モデルMを構成するため，更に同時刻世界集合λm，λn 間の時間関係ρ_N を以下のように定義する．

【定義】 関係$\rho N \subseteq Z\lambda \times Z\lambda$は次の条件を満たす最小のものである．

λm, $\lambda n \in Z_\lambda$の特性式Θm, Θn に対して, $\Omega mn = \Theta m \wedge \langle N\rangle \Theta n$ が無矛盾であるならば, $(\lambda m, \lambda n) \in \rho_N$ ■

注) 以下, $(s, t) \in \rho(a)$ を$s \to^a t$と略記する.

以上の準備のもとで無矛盾論理式p_0 に対して構造$M = \langle S, \models, \to, \psi \rangle$を次のように構成する. まず Sと$\psi$は次のもの.

$$S = S_{Z\lambda}$$

$$\psi ; S \to VG, \ \psi(\langle m, i\rangle) = v_i$$

また, $\models$, $\to$ (即ちπ, ρ) は, 次のようにΦo, $\Sigma 1$ に対して定義したものものを, 性質1)〜5), 6')〜10')を満たすように拡張したものである.

a) $P \in \Sigma o$ に対して $\beta mi \leqslant P$ならば, $M, \langle m, i\rangle \models P$

b) $A \in LG$ に対して $m = n$, かつ$(v_i, v_j) \in EG(A)$ ならば, $\langle m, i\rangle \to^A \langle n, j\rangle$

Nに対して $i = j$, かつ$(\lambda m, \lambda n) \in \rho_N$ ならば, $\langle m, i\rangle \to^N \langle n, j\rangle$

このとき上記のように構成した構造Mが, 無矛盾論理式p_0 の疑似モデルとなることを次の方針で証明する.

まず一般に任意の$p \in FL(p_0)$に対して, S_Zが有限, 各βmiが有限長であることから, 次が構成的に証明出来る.

$$\vdash p \equiv \bigvee_{\substack{\langle m, i\rangle \in S_Z \\ \text{かつ} \beta mi \leqslant p}} \beta mi$$

従ってpが無矛盾ならば, 少なくとも1つ無矛盾かつ$\beta mi \leqslant p$なる, ある$\langle m, i\rangle \in S_Z$の特性式が存在する. 補題1から, これは$S_{Z\lambda}$の元の特性式となる.

以上この事実を用いれば, p_0 は無矛盾であるから, 少なくとも1つ$\beta mi \leqslant p_0$ なる, ある$\langle m, i\rangle \in S_{Z\lambda}$の特性式が存在することがわかる. 定義より, この$\langle m, i\rangle$ は構造Mの世界集合Sの元となる. 更に次のことを示す.

【補題2】 任意の$p \in FL(p_0)$と$\langle n, j\rangle \in S$に対して次は同値である.

1) $M, \langle n, j\rangle \models p$

2)　$\beta nj \leqslant p$　■

これより前述した$\langle m,i\rangle$ に於いて，M．$\langle m,i\rangle \vDash p_0$ となることが保証される．

またMが性質1)～5),6')～10')，12),13) を満たすことは定義より明らかである．従って11')を満たすことを示せば，Mが疑似モデルであることが示される．

以上で，Mはp_0 に対する疑似モデルとなることが保証され，有限モデルの存在定理から無矛盾論理式po の充足可能性が保証されることになる．

まず補題２の証明のため，構造Mの定義の性質を調べておく．

【補題３】　任意の$A \in \Sigma 1$ に対して，次の条件は同値である．

1)　$\langle m,i\rangle \to^{A} \langle n,j\rangle$

2)　$\beta mi \wedge \langle A\rangle \beta nj$が無矛盾　■

（証明）　証明は割愛させて戴く．[2] を参照して戴きたい．　■

更に次の補題を証明する．

【補題４】　任意の$a \in \Sigma$，および$\langle m,i\rangle$，$\langle n,j\rangle \in S$に対して，$\beta mi \wedge \langle a\rangle \beta nj$が無矛盾ならば，　$\langle m,i\rangle \to^{a} \langle n,j\rangle$　■

（証明）　証明は[1] と同様に出来る．詳細は[2] を参照して戴きたい．　■

次に補題４を用いて次を証明する．

【補題５】　任意の無矛盾論理式 $\langle a\rangle p \in FL(po)$，$\langle m,i\rangle \in S$に対して，次は同値である．

1)　$\beta mi \leqslant \langle a\rangle p$

2)　ある$\langle n,j\rangle \in S$が存在して，$\langle m,i\rangle \to^{a} \langle n,j\rangle$，$\beta nj \leqslant p$　■

（証明）　この証明も[1] と同様であり割愛させて戴く．[2] を参照して戴きたい．■

以上の準備のもとで補題２は次のように論理式pの構造に関する帰納法で証明出来る．

$p=Q$の時，構造Mの定義より明らか．

$p=q \wedge r$，$\sim q$の時も明らか．

$p=〚vj〛q$の場合，まずM．$\langle m,i\rangle \vDash 〚vj〛q$と仮定する．構造Mの定義より，

$vi=vj$ であり，かつM．$\langle m,i\rangle \vDash q$．よって，

①　$\vdash \beta mi \supset q$　　　　　　　（帰納の仮定）

② $\vdash \beta mi \supset [\![vi]\!]\, q$　　（①,·公理16, MP）

従って，$\beta mi \leqslant [\![vj]\!]\, q$.

逆に，$\beta mi \leqslant [\![vj]\!]\, q$とする．この時，公理16より$\beta mi \leqslant q$．従って帰納の仮定より，$M.\langle m,i\rangle \vDash q$．同様に$\beta mi \leqslant [\![vj]\!]\,\mathrm{True}$．このとき$vi \neq vj$ならば，公理17より，$\beta mi \leqslant \sim [\![vj]\!]\,\mathrm{True}$となるから$\beta mi$の無矛盾性に反する．従って，$vi = vj$．以上より，$M.\langle m,i\rangle \vDash [\![vj]\!]\, q$.

$p = \langle a\rangle q$の場合，

① $\beta mi \leqslant \langle a\rangle q$，であることと，

② ある$\langle n,j\rangle \in S$が存在して，　$\langle m,i\rangle \xrightarrow{a} \langle n,j\rangle$，　$\beta nj \leqslant \langle a\rangle q$

であることは，補題５より同値である．更に，②と

③ ある$\langle n,j\rangle \in S$が存在して，　$\langle m,i\rangle \xrightarrow{a} \langle n,j\rangle$，　$M.\langle n,j\rangle \vDash q$

となることは帰納の仮定より同値である．③と

④ $M.\langle m,i\rangle \vDash \langle a\rangle q$

は明らかに同値である．従って，①と④は同値であり，補題２は証明出来た．

次に構造Mが性質11')を満たすことを証明する．

（証明）

11')-a) に関しては，任意の$\lambda m \in Z_\lambda$に対して，Ωmnが無矛盾となる$\lambda n \in Z_\lambda$が必ず存在することを示せばよい．存在しないと仮定する．任意の$\lambda n \in Z_\lambda$に関して，そのΩmnが矛盾するから，次の連言が証明出来る．

① $\vdash \bigwedge_{\lambda m \in Z_\lambda} \sim(\Theta m \wedge \langle N\rangle \Theta n)$

② $\vdash \sim(\Theta m \wedge \langle N\rangle (\bigvee_{\lambda m \in Z_\lambda} \Theta n))$　　（①，公理５）

$\bigvee_{\lambda m \in Z\lambda} \Theta m = \mathrm{True}$であるので公理 15,19より，$\vdash \sim\Theta m$ となり，

$\lambda m \in Z_\lambda$に反するので矛盾が導けた．

11')-b) に関しては次のように証明出来る．

<m,i> →N <n,j> ，　Ｍ．<m,i> ⊨ <N>ｐであるとする．補題３よりβmi∧<N> βnjが無矛盾．このとき補題２より①⊢βmi⊃ <N>ｐである．この時，Ｍ．<n,j> ⊨～ｐであると仮定すると，

② ⊢βnj⊃～ｐ　(①，補題２)

③ ⊢ <N>ｐ⊃～[N](〚vj〛α_{nj}∧Θn)　(②，GR)

④ ⊢βmi⊃～[N](〚vj〛α_{nj}∧Θn)　(①，③，MP)

⑤ ⊢～βmi∨～<N> βnj　(④，公理18)

となり矛盾する．　■

以上で構造Ｍがｐo に対する疑似モデルであることが証明された．以上で公理系の完全性が証明が終了した．

6　まとめ　本稿では時空間様相論理ＥＴＳＬを示し，完全無矛盾な公理系を示した．ＥＴＳＬのモデル論的考察は本稿では割愛する[2,3]．今後，実際のシステムの記述，検証によりＥＴＳＬの有用性を確認したい．また時間の流れの非一様性を仮定した場合の論理体系，変数を含んだ体系の研究が大きな問題として残っている．

参考文献

[１] D.Kozen, R.Prikh: An Elementary Proof of the Completeness of PDL, Theoret. Comput.Sci.14, pp.113-118, 1981

[２] 岩沼，原尾，野口： 時空間様相論理の完全・無矛盾な公理系，信学技報，AL84-52, 1984

[３] 岩沼，原尾，野口： 時空間論理論理ETSLとその決定問題，発表予定

[４] J.Reif, A.P.Sistla: A Multiprocess Network Logic with Temporal and Spatial Modalities, Lect Notes in Comp Sci. 154, pp.629-639, 1983

[５] M.J.Fischer, R.E.Ladner: Propositional Dynamic Logic of Regular Programs, J.Comput.System Sci. 18, pp.194-211,1979