数理解析研究所講究録
第557巻 1985年 46-64

Nonzero-sum stopped game について
— Equilibria in noncooperative Dynkin games —

高知大・理 大坪義夫 (Yoshio Ohtsubo)

§1. 序

Zero-sum stopped game の研究は、Dynkin [3] によって最初に行なわれ（従って、"Dynkin game" と呼ばれることもある）、その後多くの人々によって研究されている — 例えば、離散時間に関しては、Elbakidze [4], Kifer [5], Neveu [8], 連続時間に関しては、Bismut [1], Krylov [6], Stettner [10] などがある。

また、p-person noncooperative stopped game は、Kurano et al. [7], Yasuda et. al. [11], Sakaguchi [9] などで議論されている。

この報告では、[8] の拡張として、2-person noncooperative Dynkin game を扱う。これは、[7] の拡張（p = 2 のとき）にもなっている。まずその問題を定式化し、2つの場合について、Nash 均衡点及びそれに対応する Nash 均衡値を求める。

§2. 問題の定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{\mathcal{F}_n, n\geq 0\}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の増加列とする。$\{X_n^i, n\geq 0\}$, $\{W_n^i, n\geq 0\}$, $\{Y_n^i, n\geq 0\}$ $(i=1,2)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数の6つの列とし、いずれも $\{\mathcal{F}_n, n\geq 0\}$ に適合(adapted)しているものとする。

この報告を通して、次の仮定をする;

仮定

(i) $\min(X_n^i, Y_n^i) \leqq W_n^i \leqq \max(X_n^i, Y_n^i)$, $\forall n\geq 0$, $\forall i=1,2$.

(ii) $E[\sup_n |X_n^i|] < \infty$, $E[\sup_n |Y_n^i|] < \infty$, $\forall i=1,2$.

player I, II が各々 stopping time τ, σ を用いたとき、player I が得る利得は、

$$g_1(\tau,\sigma) \equiv W_\tau^1 I_{(\tau=\sigma<\infty)} + X_\tau^1 I_{(\tau<\sigma)} + Y_\sigma^1 I_{(\sigma<\tau)} + \limsup_n W_n^1 I_{(\tau=\sigma=\infty)},$$

player II が得る利得は、

$$g_2(\tau,\sigma) \equiv W_\tau^2 I_{(\tau=\sigma<\infty)} + X_\tau^2 I_{(\tau<\sigma)} + Y_\sigma^2 I_{(\sigma<\tau)} + \limsup_n W_n^2 I_{(\tau=\sigma=\infty)}$$

であるものとする。但し、I_A は $A\in\mathcal{F}$ の indicator である。このとき、player I (resp. II)の目的は、$g_1(\tau,\sigma)$ を τ に関して (resp. $g_2(\tau,\sigma)$ を σ に関して) 最大にすることである。

Λ_n を、$\tau \geq n$ a.s. をみたす（$\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ に関する）stopping time τ の全体とする。

Def. 2.1.

$$(2.1)\quad \begin{cases} (\tau^*, \sigma^*) \in \Lambda_n \times \Lambda_n \\ E[g_1(\tau^*, \sigma^*)] \geq E[g_1(\tau, \sigma^*)], & \forall \tau \in \Lambda_n \\ E[g_2(\tau^*, \sigma^*)] \geq E[g_2(\tau^*, \sigma)], & \forall \sigma \in \Lambda_n \end{cases}$$

であるとき、(τ^*, σ^*) を n でのNash均衡点であるという。また、すべての $n \geq 0$ に対して (2.1) が成立するとき、単に Nash 均衡点ということにする。

この報告では、次の２つの場合について述べる；

Case (I): $Y_n^1 \leqq X_n^1$, $X_n^2 \leqq Y_n^2$, $\forall n \geq 0$.

Case (II): $X_n^1 \leqq Y_n^1$, $Y_n^2 \leqq X_n^2$, $\forall n \geq 0$.

Case (II) では finite stage のみを扱う。

Remarks.

(i) $X_n^i = Y_n^i$ ($\forall n \geq 0$, $\forall i = 1, 2$) のときは、Kurano et al. [7] の特別な場合；$(p, r) = (2, 1)$ である。

(ii) Case (II) において、$Y_n^2 < W_n^2 = X_n^2 = +\infty$ ($\forall n$) のときは、1-player による optimal stopping problem である (cf. Chow et al. [2])。

(iii) Case (II) において、$X_n^1 = -X_n^2$, $Y_n^1 = -Y_n^2$, $W_n^1 = -W_n^2$ $(\forall n)$ のときは、zero-sum Dynkin game である (e.g. [4], [8])。

Case (I), (II) の各々に対して、次のことを目的とする；

(i) Nash 均衡値を求めるために一つの value iteration を与えること、

(ii) Nash 均衡点の存在を示し、それを与えること。

記号について：$(a_1, b_1) \geqq (a_2, b_2)$ とは、$a_1 \geqq a_2$ かつ $b_1 \geqq b_2$ のことを意味する。また、$\leqq$, $>$, $<$, $=$ についても同様に定めることとする。

§3. Case (I)：$Y_n^1 \leqq X_n^1$, $X_n^2 \leqq Y_n^2$, $n \geq 0$

$N > 0$ を任意に固定した整数とする。このとき、次のように $\{(\beta_n^N, \gamma_n^N),\ n=0,1,\cdots,N\}$ を定める；

$$(\beta_N^N, \gamma_N^N) = (W_N^1, W_N^2)$$

$$(\beta_n^N, \gamma_n^N) = \begin{cases} (E[\beta_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n]) \\ \quad \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n]) \\ (W_n^1, W_n^2) \qquad \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1.$$

(3.1) は、strategies として "stop", "continue" をもつ

bimatrix game

$$H_n^1 = \begin{bmatrix} (W_n^1, W_n^2) & (X_n^1, X_n^2) \\ (Y_n^1, Y_n^2) & (E[\beta_{n+1}^N | \mathfrak{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N | \mathfrak{F}_n]) \end{bmatrix}$$

における一つの Nash 均衡値になっている。

そこで、(β_n^N, γ_n^N) についていくつかの性質がわかる。

<u>Lemma 3.1.</u>（単調性）各 n, N $(N \geqq n)$ に対して、

$$W_n^1 = \beta_n^n \leqq \beta_n^N \leqq \beta_n^{N+1}$$

$$W_n^2 = \gamma_n^n \leqq \gamma_n^N \leqq \gamma_n^{N+1}$$

（証明）　$A_n^k = \{(X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1}^{n+k} | \mathfrak{F}_n], E[\gamma_{n+1}^{n+k} | \mathfrak{F}_n])\}$

とおくと、各 $n \geqq 0$ に対して、

$$(\beta_n^{n+1}, \gamma_n^{n+1}) = \begin{cases} (E[W_{n+1}^1 | \mathfrak{F}_n], E[W_{n+1}^2 | \mathfrak{F}_n]) & \text{on } A_n^1 \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n^1 \end{cases}$$

$$\geqq \begin{cases} (X_n^1, Y_n^2) & \text{on } A_n^1 \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n^1 \end{cases}$$

$$\geqq (W_n^1, W_n^2)$$

$$= (\beta_n^n, \gamma_n^n).$$

次に、各 $m \geqq 0$ とある $k \geqq 1$ に対して、

$$(\beta_m^{m+k-1}, \gamma_m^{m+k-1}) \leqq (\beta_m^{m+k}, \gamma_m^{m+k})$$

と仮定すると、明らかにすべての $n \geqq 0$ に対して、$A_n^k \subset A_n^{k+1}$

である。また、$A_n^{k+1} - A_n^k$ 上では、$W_n^1 \leqq X_n^1 < E[\beta_{n+1}^{n+k+1} | \mathfrak{F}_n]$

である。従って、各$n \geqq 0$に対して、

$$\beta_n^{n+k} = \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+1+k-1} \mid \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^k \\ W_n^1 & \text{off } A_n^k \end{cases}$$

$$\leqq \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^k \\ W_n^1 & \text{off } A_n^k \end{cases}$$

$$\leqq \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^{k+1} \\ W_n^1 & \text{off } A_n^{k+1} \end{cases}$$

$$= \beta_n^{n+k+1} .$$

となる。同様にして、$\gamma_n^{n+k} \leqq \gamma_n^{n+k+1}$が成り立つ。故にinductionにより、単調増加であることが示された。□

上のlemmaにより、$\bar{\beta}_n \equiv \lim_{N\to\infty} \beta_n^N$, $\bar{\gamma}_n \equiv \lim_{N\to\infty} \gamma_n^N$ が定義できる。

<u>Lemma 3.2.</u> $\{(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n), n \geqq 0\}$は次をみたす；各$n \geqq 0$に対して

$$(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n) = \begin{cases} (E[\bar{\beta}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\bar{\gamma}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) & \text{on } A_n \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n \end{cases}$$

但し、$A_n \equiv \{ (X_n^1, Y_n^2) < (E[\bar{\beta}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\bar{\gamma}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])\}$.

（証明）　(3.1)式において、$N \to \infty$とすると、Lemma 3.1から簡単に結論を得る。□

<u>Lemma 3.3.</u> (($\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$) の最小性)　任意に $m \geq 0$ を固定する。$\{\delta_n, n \geq m\}$, $\{\xi_n, n \geq m\}$ を $\{\mathcal{F}_n, n \geq m\}$ に適合していて次をみたす確率変数の2つの列とする；　各 $n \geq m$ に対して、

$$(3.2)\quad (\delta_n, \xi_n) \geq \begin{cases} (E[\delta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \\ \qquad \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\delta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \\ (W_n^1, W_n^2) \qquad \text{otherwise}. \end{cases}$$

このとき、任意の $n \geq m$ に対して

$$(\delta_n, \xi_n) \geq (\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n)。$$

（証明）　各 $n \geq m$ に対して　明らかに

$$(\beta_n^n, \gamma_n^n) = (W_n^1, W_n^2) \leqq (\delta_n, \xi_n)$$

である。今、任意の $n \geq m$ とある $k \geq 1$ に対して、

$$(\beta_n^{n+k-1}, \gamma_n^{n+k-1}) \leqq (\delta_n, \xi_n)$$

と仮定すると Lemma 3.1 の証明と類似な方法により、各 $n \geq m$ に対して

$$(3.3)\qquad (\beta_n^{n+k}, \gamma_n^{n+k}) \leqq (\delta_n, \xi_n)$$

を得る。従って、induction により (3.3) はすべての n, k に対して成立するから、$k \to \infty$ として、各 $n \geq m$ に対して

$$(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n) \leqq (\delta_n, \xi_n)$$

を得る。□

<u>Lemma 3.4.</u>

$$\limsup_n \bar{\beta}_n = \limsup_n W_n^1, \quad \limsup_n \bar{\gamma}_n = \limsup_n W_n^2 \quad \text{a.s.}$$

(証明)　$m \geq 0$ を任意に固定すると、

$$\{(E[\sup_{k\geq m} W^1_k \mid \mathcal{F}_n],\ E[\sup_{k\geq m} W^2_k \mid \mathcal{F}_n]),\ n \geq m\}$$

は明らかに (3.2) 式をみたす。従って、Lemma 3.3 から

$$E[\sup_{k\geq m} W^1_k \mid \mathcal{F}_n] \geq \bar{\beta}_n, \quad \forall n \geq m$$

となる。また、$\{E[\sup_{k\geq m} W^1_k \mid \mathcal{F}_n],\ n\geq m\}$ は martingale であるから、martingale の性質により、

$$\limsup_n \bar{\beta}_n \leq \lim_{n\to\infty} E[\sup_{k\geq m} W^1_k \mid \mathcal{F}_n]$$
$$= E[\sup_{k\geq m} W^1_k \mid \mathcal{F}_\infty]$$

となる。但し、$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ である。$\sup_{k\geq m} W^1_k$ は $\mathcal{F}_\infty$-可測であるから、

$$\limsup_n \bar{\beta}_n \leq \sup_{k\geq m} W^1_k$$

となる。m は任意であるから $m\to\infty$ として、

$$\limsup_n \bar{\beta}_n \leq \limsup_n W^1_n$$

を得る。逆の不等式は、$\bar{\beta}_n \geq W^1_n$ ($\forall n$) であることより明らかである。$\bar{\gamma}_n$ についても同様にして示すことができる。□

<u>Def. 3.1.</u>　各 $n \geq 0$ に対して、

$$\tau_0 \equiv \tau_0(n) \equiv \inf\{k \geq n \mid \bar{\beta}_k = W^1_k\}$$

$$\sigma_0 \equiv \sigma_0(n) \equiv \inf\{k \geq n \mid \bar{\gamma}_k = W^2_k\}$$

とおく。但し、$\{\}$ が空集合のときは $+\infty$ と定める。

<u>Lemma 3.5.</u> (i) 各 $n \geq 0$ に対して、 a.s. に

(イ) $\bar{\beta}_n = W_n^1 \Leftrightarrow \bar{\beta}_n \leqq X_n^1 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n \leqq Y_n^2 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n = W_n^2$

(ロ) $\bar{\beta}_n > X_n^1 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n > Y_n^2$

(ii) $\tau_0 = \sigma_0$ a.s.

(証明) (i) は Lemma 3.2 からすぐにわかる。(ii) は (i) から明らかである。□

以下、$\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$ の代わりに、$\bar{\beta}(n)$, $\bar{\gamma}(n)$ とかくこともある。また、$\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$ とおき、$\tau \wedge \sigma = +\infty$ のとき、$\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma) = \limsup_n \bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}(\tau \wedge \sigma) = \limsup_n \bar{\gamma}_n$ と定める。このとき、次の重要な lemma を得る。

<u>Lemma 3.6.</u> 各 $n \geq 0$ に対して、

(i) $\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau_0, \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n]$

$\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n] \geqq E[g_1(\tau, \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n], \ ^\forall \tau \in \Lambda_n$

(ii) $\bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau_0 \wedge \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau_0, \sigma_0) \mid \mathcal{F}_n]$

$\bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau_0 \wedge \sigma) \mid \mathcal{F}_n] \geqq E[g_2(\tau_0, \sigma) \mid \mathcal{F}_n], \ ^\forall \sigma \in \Lambda_n$

(証明) (i) のみを示す。Lemma 3.2 から 各 $n \geq 0$ に対して、

$$\bar{\beta}(k) = E[\bar{\beta}(k+1) \mid \mathcal{F}_k], \quad n \leqq {}^\forall k < \sigma_0 \equiv \sigma_0(n)$$

であることは明らかである。従って、$\{\bar{\beta}(k \wedge \sigma_0) ; k \geq n\}$ は regular martingale となり、[8] の Prop. IV-5-24 と 25

から、任意の $\tau \in \Delta_n$ に対して、

$$\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

が成り立つ。また、$\sigma_0 < \infty$ のとき $\bar{\beta}(\sigma_0) = W'_{\sigma_0}$ であり、更に $\sigma_0 > k$ のとき $\bar{\beta}(k) > X'_k$ である。従って、$W'_m \geq Y'_m$ であることより Lemma 3.4 を用いて、

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}(n) &= E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] \\
&= E[\bar{\beta}(\tau) I_{(\tau < \sigma_0)} + \bar{\beta}(\sigma_0) I_{(\sigma_0 < \tau)} \\
&\qquad + \bar{\beta}(\sigma_0) I_{(\tau = \sigma_0 < \infty)} + \limsup_n \bar{\beta}_n I_{(\tau = \sigma_0 = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\
&\geq E[X'_\tau I_{(\tau < \sigma_0)} + Y'_{\sigma_0} I_{(\sigma_0 < \tau)} \\
&\qquad + W'_{\sigma_0} I_{(\tau = \sigma_0 < \infty)} + \limsup_n W'_n I_{(\tau = \sigma_0 = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\
&= E[g_1(\tau, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]
\end{aligned}$$

となる。また、Lemma 3.5 − (ii) より、

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] &= E[W'_{\sigma_0} | \mathcal{F}_n] \\
&= E[g_1(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]
\end{aligned}$$

である。故に、(i) が示された。□

<u>Theorem 3.1.</u> (τ_0, σ_0) は Nash 均衡点であり、また、それに対応する Nash 均衡値は、

$$\left(E[g_1(\tau_0, \sigma_0)],\ E[g_2(\tau_0, \sigma_0)]\right) = \left(E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \sigma_0)],\ E[\bar{\gamma}(\tau_0 \wedge \sigma_0)]\right)$$

$$\left\langle \begin{array}{l} = (E[\bar{\beta}_n],\ E[\bar{\gamma}_n]) \\ \text{for the starting time } n \end{array} \right\rangle$$

.

（証明） Lemma 3.6 から明らかである。□

次に別の Nash 均衡点を求めてみよう。その前に下の条件を導入する；

(A.1) $X_n^1 = W_n^1$, $Y_n^2 = W_n^2$, $\forall n \geq 0$.

<u>Lemma 3.7.</u> (A.1) のもとで、Lemma 3.2 の結果は次の (i)(ii) と同値である；

(i) 各 $n \geq 0$ に対して、

$$\bar{\beta}_n = \begin{cases} \max(X_n^1, E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{if } Y_n^2 < E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ X_n^1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_n = \begin{cases} \max(Y_n^2, E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{if } X_n^1 < E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ Y_n^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(ii) 各 $n \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_n = & (X_n^1 - E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I(Y_n^2 < E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ & + (X_n^1 - E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I(Y_n^2 \geq E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ & + E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_n = & (Y_n^2 - E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I(X_n^1 < E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ & + (Y_n^2 - E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I(X_n^1 \geq E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ & + E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

証明は明らかである。

Def. 3.2. 各 $n \geqq 0$ に対して

$$\tau^* \equiv \tau^*(n) \equiv \inf\{k \geqq n \mid X_k^1 \geqq E[\bar{\beta}_{k+1} \mid \mathcal{F}_k]\}$$

$$\sigma^* \equiv \sigma^*(n) \equiv \inf\{k \geqq n \mid Y_k^2 \geqq E[\bar{\gamma}_{k+1} \mid \mathcal{F}_k]\}$$

とおく。但し、$\{\}$が空のときは $+\infty$ とする。

このとき、必らずしも $\tau^* = \sigma^*$ ではないが、次の性質をもつ；

Lemma 3.8.

(i) $\tau_0 \leqq \tau^*$, $\sigma_0 \leqq \sigma^*$ a.s.

(ii) $\tau_0 \wedge \sigma_0 = \tau^* \wedge \sigma^* = \tau^* \wedge \sigma_0 = \tau_0 \wedge \sigma^* = \tau_0 = \sigma_0$ a.s.

（証明） 定義と Lemma 3.2 と 3.7 から簡単にわかる。□

Lemma 3.9. (A.1) をみたすものとすると、各 $n \geqq 0$ に対し、

(i) $\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau^* \wedge \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau^*, \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n]$

$\bar{\beta}(n) \geqq E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau, \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n]$, $\forall \tau \in \Lambda_n$

(ii) $\bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau^* \wedge \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau^*, \sigma^*) \mid \mathcal{F}_n]$

$\bar{\gamma}(n) \geqq E[\bar{\gamma}(\tau^* \wedge \sigma) \mid \mathcal{F}_n] \geqq E[g_2(\tau^*, \sigma) \mid \mathcal{F}_n]$, $\forall \sigma \in \Lambda_n$

（証明） Lemma 3.8 より、$\tau^* \wedge \sigma^* = \tau_0 \wedge \sigma_0$ であるから、Lemma 3.6−(i), (ii) の上式によって、この lemma (i) (ii) の上式も（条件 (A.1) なしで）成立する。

以下、(i) の下式を示す。Lemma 3.7−(i) より、各 $n \geqq 0$ に対

して、$n \leqq k < \sigma^* = \sigma^*(n)$ のとき、

$$\bar{\beta}(k) = \max(X'_k, E[\bar{\beta}(k+1) | \mathcal{F}_k]) \geqq E[\bar{\beta}(k+1) | \mathcal{F}_k]$$

である。従って、$\{\bar{\beta}(k \wedge \sigma^*), k \geqq n\}$ は、regular supermartingale となり、[8] より 各 $n \geqq 0$ と任意の $\tau \in \Lambda_n$ に対して、

$$\bar{\beta}(n) \geqq E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*) | \mathcal{F}_n]$$

が成立する。さらに、

$$\begin{aligned} E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*) | \mathcal{F}_n] &= E[\bar{\beta}(\tau) I_{(\tau \leqq \sigma^*)} + \bar{\beta}(\sigma^*) I_{(\sigma^* < \tau)} \\ &\qquad + \limsup_n \bar{\beta}_n I_{(\tau = \sigma^* = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &\geqq E[X'_\tau I_{(\tau \leqq \sigma^*)} + Y'_{\sigma^*} I_{(\sigma^* < \tau)} \\ &\qquad + \limsup_n X'_n I_{(\tau = \sigma^* = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[g_1(\tau, \sigma^*) | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

が成り立つ。これで証明は十分である。□

<u>Theorem 3.2.</u>　(A.1) のもとで、

(i)　(τ^*, σ^*) は Nash 均衡点である。

(ii)　2つの Nash 均衡点 (τ_0, σ_0), (τ^*, σ^*) は交換可能である。即ち、(τ_0, σ^*), (τ^*, σ_0) も Nash 均衡点である。更に、上の4つの Nash 均衡点は同じ均衡値をもつ。

(証明)　(i)　Lemma 3.9 からすぐわかる。

(ii)　(i) と Lemma 3.6, 3.9 と Theorem 3.1 から簡単に証明できる。□

§4. Case (II) : $X_n^1 \leqq Y_n^1$, $Y_n^2 \leqq X_n^2$, $n \geqq 0$

この節では、finite stage (N-stage とする) を扱かう。

今、$\Lambda_n^N \equiv \{\tau \in \Lambda_n \mid \tau \leqq N \text{ a.s.}\}$ とおく。

$\{(\beta_n, \gamma_n), n=0,1,2,\cdots,N\}$ を次のように定める；

$$(\beta_N, \gamma_N) = (W_N^1, W_N^2)$$

$$(4.1)\quad (\beta_n, \gamma_n) = \begin{cases} (E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \\ \qquad \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \\ (Y_n^1, Y_n^2) \\ \qquad \text{if } X_n^1 < E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ \& \ Y_n^2 \geqq E[\gamma_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ (X_n^1, X_n^2) \qquad \text{if } X_n^1 \geqq E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

これは、§3 と同様に、bimatrix game

$$H_n^2 \equiv \begin{bmatrix} (W_n^1, W_n^2) & (X_n^1, X_n^2) \\ (Y_n^1, Y_n^2) & (E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \end{bmatrix}$$

における一つの Nash 均衡値になっている。 注意として、$(X_n^1, Y_n^2) \geqq (E[\beta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])$ のときは、均衡値は (X_n^1, X_n^2) と (Y_n^1, Y_n^2) の2つあるが、この報告では、すべての $n \geqq 0$ に対して、(X_n^1, X_n^2) に統一する。そうでないように定めたときは、以下と同様な議論をすることができ、従って、N-stage game であることを考慮すると、このような方法によって求められる Nash 均衡値 (stopped game にお

ける）は、2^N 個あることになる。

明らかに、各 $n \leqq N$ に対して、

$$(\beta_n, \gamma_n) \geqq (X_n^1, Y_n^2)$$

であり、また、(4.1) と同値な表現として、次を得る；

$$A_n \equiv \{X_n^1 < E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n] \ \&\ Y_n^2 \geqq E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

$$B_n \equiv \{X_n^1 \geqq E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

とおくと、各 $n \leqq N-1$ に対して、

(i)
$$\beta_n = \begin{cases} \max(X_n^1, E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{off } A_n \\ Y_n^1 & \text{on } A_n \end{cases}$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \max(Y_n^2, E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{off } B_n \\ X_n^2 & \text{on } B_n \end{cases}$$

(ii)
$$\beta_n = (X_n^1 - E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I_{A_n^c} + (Y_n^1 - E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I_{A_n} + E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

$$\gamma_n = (Y_n^2 - E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I_{B_n^c} + (X_n^2 - E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I_{B_n} + E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

<u>Def. 4.1.</u> 各 $n \geqq 0$ に対して、

$$\tau_0 \equiv \tau_0(n) \equiv \inf\{k \mid \beta_k = X_k^1,\ n \leqq k \leqq N\}$$

$$\sigma_0 \equiv \sigma_0(n) \equiv \inf\{k \mid \gamma_k = Y_k^2,\ n \leqq k \leqq N\}$$

とおく。但し、そのような k が存在しないときは N とする。

次の条件を導入する；

$(C.1)$; $(\forall n)\ (X_n^2 = Y_n^2 \Rightarrow X_n^1 = Y_n^1)$

$(C.2)$; $(\forall n)\ (X_n^1 = Y_n^1 \Rightarrow X_n^2 = Y_n^2)$

<u>Lemma 4.1.</u>

(i) $(C.1)$ のもとで、$\sigma_0 < N \Rightarrow \beta_{\sigma_0} = Y_{\sigma_0}^1$ a.s.

(ii) $(C.2)$ のもとで、$\tau_0 < N \Rightarrow \gamma_{\tau_0} = X_{\tau_0}^2$ a.s.

(iii) $\tau_0 = \sigma_0 = k < N \Rightarrow X_k^1 = Y_k^1$ or $X_k^2 = Y_k^2$ a.s.

（証明） τ_0, σ_0 の定義と (4.1) 式から簡単に証明できる。□

以下、$\beta_n = \beta(n)$, $\gamma_n = \gamma(n)$ とかくこともある。

<u>Lemma 4.2.</u>

(i) $(C.1)$ のもとで、各 $n \leqq N$ に対して、

$$\beta(n) = E[\beta(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\beta(n) \geqq E[\beta(\tau \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] \geqq E[g_1(\tau, \sigma_0) | \mathcal{F}_n],\ \forall \tau \in \Lambda_n^N$$

(ii) $(C.2)$ のもとで、各 $n \leqq N$ に対して、

$$\gamma(n) = E[\gamma(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\gamma(n) \geqq E[\gamma(\tau_0 \wedge \sigma) | \mathcal{F}_n] \geqq E[g_2(\tau_0, \sigma) | \mathcal{F}_n],\ \forall \sigma \in \Lambda_n^N$$

（証明） Lemma 4.1 を用いて、Lemma 3.6 または、Lemma 3.9 と同様な方法によって証明することができる。□

<u>Theorem 4.1.</u>　(C.1), (C.2) のもとで、(τ_0, σ_0) は Nash 均衡点である。

証明は Lemma 4.2 から明らかである。

<u>Def. 4.2.</u>　各 $n \geqq 0$ に対して、

$$\tau^* \equiv \tau^*(n) \equiv \inf\{k \mid X^1_k \geqq E[\beta_{k+1} \mid \mathcal{F}_k],\ n \leqq k < N\}$$

$$\sigma^* \equiv \sigma^*(n) \equiv \inf\{k \mid X^1_k < E[\beta_{k+1} \mid \mathcal{F}_k]\ \&\ Y^2_k \geqq E[\gamma_{k+1} \mid \mathcal{F}_k],\ n \leqq k < N\}$$

とおく、但し、そのような k が存在しないときは N とおく。

<u>Lemma 4.3.</u>　(i) $\tau_0 \leqq \tau^*$, $\sigma_0 \leqq \sigma^*$, $\tau_0 \wedge \sigma_0 = \tau^* \wedge \sigma^* = \tau_0 \wedge \sigma^* = \tau^* \wedge \sigma_0$　a.s.

(ii)　$\tau^* = \sigma^* \Rightarrow \tau^* = \sigma^* = N$

(iii)　$\tau^* < N \Rightarrow \beta_{\tau^*} = X^1_{\tau^*}$,　$\gamma_{\tau^*} = X^2_{\tau^*}$

(iv)　$\sigma^* < N \Rightarrow \beta_{\sigma^*} = Y^1_{\sigma^*}$,　$\gamma_{\sigma^*} = Y^2_{\sigma^*}$

証明は (4.1) 式を用いれば簡単にできる。

<u>Lemma 4.4.</u>　τ_0, σ_0 を τ^*, σ^* におきかえることによって、Lemma 4.2 の結果が、(C.1), (C.2) の条件なしで成立する。

証明は、Lemma 4.1 と 4.3 の違いを考慮して、Lemma 4.2 と同様にしてできる。

<u>Theorem 4.2</u> (i) (τ^*, σ^*) は Nash 均衡点である。

(ii) (C.1) のもとで、(τ^*, σ_0) は Nash 均衡点である。

(iii) (C.2) のもとで、(τ_0, σ^*) は Nash 均衡点である。

(iv) (C.1) と (C.2) のもとで、4つの Nash 均衡点 (τ_0, σ_0), (τ^*, σ^*), (τ^*, σ_0), (τ_0, σ^*) は、同じ均衡値をもつ。

(証明) Lemma 4.2 と 4.4 から明らかである。□

参考文献

[1] Bismut,J.-M. (1977). Sur un probleme de Dynkin. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 39, 31-53

[2] Chow,Y.S., Robbins,H. and Siegmund,D. (1971). Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton Mifflin, Boston.

[3] Dynkin,E.B. (1969). Game variant of a problem on optimal stopping. Soviet Math. Dokl. 10, 270-274.

[4] Elbakidze,N.V. (1976). The construction of the cost and optimal policies in a game problem of stopping a Markov process. Theor. Probability Appl. 21, 163-168.

[5] Kifer, Yu.I. (1971). Optimal stopped games. Theor. Probability Appl. 16, 185-189.

[6] Krylov,N.V. (1971). Control of Markov processes and W-spaces. Math. USSR-Isv. 5,233-266.

[7] Kurano,M., Yasuda,M. and Nakagami,J. (1980). Multi-variate stopping problem with a majority rule. J. Oper. Res. Japan, 23, 205-222.

[8] Neveu,J. (1975). Discrete-Parameter Martingales. North-Holland, Amsterdom.

[9] Sakaguchi,M. (1980). Non-zero-sum games related to the secretary problem. J. Oper. Res. Japan, 23, 287-293.

[10] Stettner,Ł. (1982). Zero-sum Markov games with stopping and impulsive strategies. Appl. Math. Optim. 9, 1-24.

[11] Yasuda,M., Nakagami,J. and Kurano,M. (1982). Multi-variate stopping problems with a monotone rule. J. Oper. Res. Japan, 25, 334-350.