

逐次手法における停止時間について

新潟大 理 磯貝英一 (Eiichi Isogai)

1. はじめに

近年，無作為標本に基づいた，ノンパラメトリックな確率密度関数の推定問題が広く研究され，パターン認識問題，識別機械における学習理論等への応用が議論されている。特に電子計算機の発展とともに，計算のわずらわしさを少なくするために逐次推定量が提案された。(たとえば Devroye [6], 著者 [8], [10], Wolverton and Wagner [14])

一方，実際問題において標本の大きさが確率変数に依存する場合があります。たとえばある道路のある地点を通過する車の速度の分布を知りたい時， t 時刻までに通過した N_t 台の車の速度は実際に記録できる。この場合 N_t は確率変数に依存する。また，ある推定問題において要求された精度を得るまでに抽出される標本の大きさが確率変数に依存することもある。特に，Chow and Robbins [4] は母平均に対する逐次的な信頼区間につ

いて論じている。すなわち、与えられた信頼係数をもつ信頼区間を得るために標本抽出をいつ停止し、それまでに得られた標本に基づいてどのように信頼区間を作ればよいか。この問題に対して彼等は停止時間と信頼区間を具体的に与えた。

そして、ここで得られた信頼区間の性質を「信頼区間の漸近的一致性」と呼んだ。このような発想をノンパラメトリックな確率密度関数の推定問題に適用したものとして Carroll [3], 著者 [9], Stute [13] などがある。以上のことについては Prakasa Rao [11] でまとめられている。

一方、信頼区間の漸近的一致性を議論するときに用いられる理論として random indices に関する理論がある。これは次のような問題に関する理論である：

Y_1, Y_2, \dots を確率空間 (Ω, \mathcal{A}, P) 上で定義された確率変数列で、 τ_1, τ_2, \dots を (Ω, \mathcal{A}, P) 上で定義された正の整数値をとる確率変数列とする。このときもし

$$Y_n \xrightarrow{L} Y \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (\text{法則収束})$$

ならば、いかなる条件の下で

$$Y_{\tau_k} \xrightarrow{L} Y \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

が成り立つであろうか。この問題に関する理論は古くから研究されている。Anscombe [2] はいわゆる Anscombe の条件と呼ばれている十分条件を与えた。Csörgö and Fischeler [5] はより

一般の場合について論じている。さらに Aldous [1] は必要十分条件について議論している。最近では Govindarajulu [2] がこの理論について研究している。

さて、本報告の目的は著者 [9] で得られた停止時間についての十分条件がより一般化できることを示すことである。

2. 準備

本節では本報告で使用される逐次推定量を定義し、また次節で使用されるいくつかの結果を与える。

$f(x)$ は R^p 上のルベーグ測度に関する確率密度関数 (p.d.f.) で未知とする。また X_1, X_2, \dots は共通の p.d.f. $f(x)$ をもった独立で同一分布に従う、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された p 次元確率ベクトル列とする。

著者 [9] で定義された次の逐次推定量 $f_n(x)$ を用いる：

$$(2.1) \quad f_0(x) \equiv K(x)$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + a_n \{K_n(x, X_n) - f_{n-1}(x)\} \quad n \geq 1$$

ここで

$$(2.2) \quad a_n = \frac{a}{n} \quad (0 < a \leq 1)$$

$$K_n(x, y) = h_n^{-p} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right) \quad x, y \in R^p$$

$\{h_n\}$ は正数列で $h_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) をみたすとする。

$K: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ は有界かつ可積分なボレル可測関数
 次の条件をみたすとする:

条件 K

$$\int_{\mathbb{R}^p} K(y) dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^p} \|y\|^2 |K(y)| dy < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} y_i K(y) dy = 0 \quad \forall i=1, \dots, p, \quad \|y\|^p |K(y)| \rightarrow 0 \text{ as } \|y\|_p \rightarrow \infty$$

ただし $\|\cdot\|_p$ は \mathbb{R}^p 上のユークリッドノルムを表わす。

$\{h_n\}$ について下のいくつかの条件を与える:

(H1) $nh_n^p \uparrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$;

及び $a (a > 0)$ に対して

(H2) $n^{1-2a} h_n^p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

(H3) 及び正定数 β が存在して

$$n^{1-2a} h_n^p \sum_{j=1}^n j^{2(a-1)} h_j^{-p} \rightarrow \beta \text{ as } n \rightarrow \infty$$

(H4) $n^{\frac{3}{2}-3a} h_n^{\frac{3}{2}p} \sum_{j=1}^n j^{2(a-1)} h_j^{-2p} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

(H5) $n^{\frac{1}{2}-a} h_n^{\frac{1}{2}p} \sum_{j=1}^n j^{a-1} h_j^2 \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$;

(H6) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \delta > 0$ such that

$$\left| \frac{n}{m} - 1 \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h_n}{h_m} - 1 \right| < \varepsilon.$$

例

条件 K をみたす例

$$K(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}p} \exp\left\{-\frac{1}{2} \|x\|_p^2\right\}$$

(H1) ~ (H6) をみたす例

$$h_n = n^{-\frac{r}{p}}, \quad \max\left\{\frac{p}{p+r}, 1-2a\right\} < r < 1, \quad 0 < a \leq 1$$

さて 停止時間 $N(t)$ についての条件を与えよ。 $\forall t \in (0, \infty)$ に対して

$N(t)$ は (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された正の整数値をとる確率変数,

$\pi(t)$ は正数で $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \infty$ をみたす,

θ は (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された正数値をとる離散型確率変数, すなわち

$\exists l_k \in (0, \infty) \quad k=1, 2, \dots$ (k は有限または無限)

such that $P_k = P\{\theta = l_k\} > 0 \quad k=1, 2, \dots$

かつ

$$(2.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1.$$

$N(t)$ に関して次の条件を考へよ。

条件 T

上で与えられた性質をもつ $\pi(t), \theta$ に対して

$$\frac{N(x)}{\pi(x)} \xrightarrow{P} \theta \text{ as } x \rightarrow \infty \text{ (確率収束)}$$

が成り立つ。

$$\gamma_0 = \gamma_1 = 1, \quad \gamma_n = \prod_{j=2}^n (1 - q_j) \quad n \geq 2$$

$$\beta_{mn} = \begin{cases} \prod_{j=m+1}^n (1 - q_j) & \text{if } n > m \geq 0 \\ 1 & \text{if } n = m \geq 0 \end{cases}$$

$$f \in \mathcal{L} \quad a_n = \frac{a}{n} \quad (a > 0)$$

とおく。

本報告中では C, C_1, C_2, \dots は適当な正定数を表わし,
 $[b]$ ($b \in \mathbb{R}$) は b を越えない最大の整数を表わすとす。

容易に次のことがわかる。

$$(2.4) \quad \beta_{mn} = \gamma_n \gamma_m^{-1} \quad n \geq m \geq 1$$

$$(2.5) \quad C_1 n^{-a} \leq \gamma_n \leq C_2 n^{-a} \quad n \geq 1$$

さて次の記号を導入する。

$$S_0 = V_0 \equiv 0$$

$$\begin{aligned} S_n &= (f_n(x) - f(x)) - \beta_{0n} (f_0(x) - f(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n q_j \beta_{jn} \{K_j(x, X_j) - f(x)\} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n &= \sqrt{n h_n^p} S_n \\ &= \sqrt{n h_n^p \gamma_n^2} \sum_{j=1}^n q_j \gamma_j^{-1} \{K_j(x, X_j) - f(x)\} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

このとき $n \geq 1$ に対して

$$(2.6) \quad \sqrt{nh_n^p} (f_n(x) - f(x)) = V_n + \sqrt{nh_n^p} \beta_{0n} (f_0(x) - f(x))$$

Lemma 2.1

$g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ は有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

($i, j = 1, \dots, p$) をもつとする, すると

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \infty.$$

$k: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ は次をみたすボレル可測関数とする:

$$\int_{\mathbb{R}^p} y_i k(y) dy = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad \text{かつ} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \|y\|^2 |k(y)| dy < \infty.$$

h を正数とする。このとき

$$\left| \int_{\mathbb{R}^p} h^{-p} k\left(\frac{x-y}{h}\right) g(y) dy - g(x) \int_{\mathbb{R}^p} k(y) dy \right| \leq C \cdot h^2$$

が成り立つ。

(証明)

テイラーの定理と仮定より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^p} h^{-p} k\left(\frac{x-y}{h}\right) g(y) dy - g(x) \int_{\mathbb{R}^p} k(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^p} k(y) \{g(x-hy) - g(x)\} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} h^2 \int_{\mathbb{R}^p} |k(y)| |y|^2 H(x-\xi hy) |y| dy \quad (0 < \xi < 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{C_1}{2} h^2 \int_{\mathbb{R}^p} \|y\|^2 |k(y)| dy \leq C \cdot h^2$$

∴ $H(x) = \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ は x における g の Λ ヲセ行列.

(証終)

Lemma 2.2 (漸近正規性)

(2.2) の a に対して (H2) ~ (H5) が成り立つとす.

もし $f(x)$ が有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

($i, j = 1, \dots, p$) をもてば $f(x) > 0$ なる点 x に対して

$$\sqrt{nh_n^p} (f_n(x) - f(x)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ。ただし

$$(2.7) \quad \sigma^2(x) = a^2 \beta \int_{\mathbb{R}^p} k^2(y) dy f(x)$$

(証明略)

Lemma 2.3

Lemma 2.2 の仮定の下で

$$V_{[0, \pi(x)]} \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明)

Lemma 2.2, (2.5), (H2) より

$$V_n \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

また

$$V_n = \frac{\sum_{j=1}^n a_j \delta_j \{K_j(x, x_j) - f(x)\}}{\sqrt{(nh_n^p \gamma_n^2)^{-1}}}$$

$$(nh_n^p \gamma_n^2)^{-1} \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty$$

従って Rényi [12] の Lemma 4 より

任意に固定した $k \geq 1$ に対して

$$(2.8) \quad P\{V_n < y \mid A_k\} \rightarrow F(y) \text{ as } n \rightarrow \infty \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

存在し $F(y)$ は $N(0, \sigma^2(x))$ の分布関数で A_k は事象

$[0 = I_k]$ を表わす。

$\forall \varepsilon > 0$ を固定する。(2.3) より

$\exists k_0 \geq 1$ such that

$$(2.9) \quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} P_k < \varepsilon$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ を固定する。(2.9) より

$\forall \delta \in (0, \infty)$ に対して

$$\begin{aligned} & |P\{V_{[0, \pi(x)]} < y\} - F(y)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (P\{V_{[I_k, \pi(x)]} < y \mid A_k\} - F(y)) P_k \right| \end{aligned}$$

$$< \sum_{k=1}^{k_0} |P\{V_{[l_k \pi(x)]} < y | A_k\} - F(y)| + \varepsilon$$

$l_k > 0$, $\pi(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) より $[l_k \pi(x)] \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$)

よ, τ (2.8) を用いて

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |P\{V_{[l_k \pi(x)]} < y\} - F(y)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

従って

$$P\{V_{[l_k \pi(x)]} < y\} \rightarrow F(y) \text{ as } x \rightarrow \infty \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

(証終)

Lemma 2.4

$\{h_n\}$ は $h_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とする正数列で (H1) ~ (H5)

をみたすとする。 $\{\delta_n\}$ は実数列で

$$|\delta_n| \leq C_1 h_n^2 \quad \forall n \geq 1$$

をみたすとする。

$\{Z_n\}$ は次をみたす独立な, (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数

列とする:

$$E[Z_n] = 0, \quad h_n^p E[Z_n^2] \leq C_2 \quad \forall n \geq 1$$

$$n h_n^p \sum_{j=1}^n a_j^2 \beta_{jn}^2 E[Z_j^2] \leq C_2 \quad \forall n \geq 1.$$

$$W_n = \sum_{j=1}^n a_j \beta_{jn} Z_j + \sum_{j=1}^n a_j \beta_{jn} \delta_j \quad (n \geq 1) \text{ とする.}$$

$$\text{ただし } a_n = \frac{a}{n} \quad (a > 0).$$

このとき条件 T の下で

$$\sqrt{N(t) h_{N(t)}^p} (W_{N(t)} - W_{[0, \pi(t)]}) \xrightarrow{P} 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明略)

3. 結果

本節では random indices の問題も考えよう。Theorem 3.1 の応用として $f(x)$ の信頼区間を与えその漸近的一致性を示す。

Theorem 3.1

(2.2) の Q に対して (H1) ~ (H6) が満たされるとし、条件 T を仮定する。

もし $f(x)$ が有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

($i, j = 1, \dots, p$) をもてば $f(x) > 0$ の点 x に対して

$$\sqrt{N(t) h_{N(t)}^p} (f_{N(t)}(x) - f(x)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。ここには $\sigma^2(x)$ は (2.7) で与えられたものである。

(証明)

(2.6) より

$$(3.1) \quad \sqrt{N(t) h_{N(t)}^P} (f_{N(t)}(x) - f(x)) = V_{N(t)} + \sqrt{N(t) h_{N(t)}^P} \beta_{0N(t)} (f_0(x) - f(x))$$

条件 T より

$$N(t) \xrightarrow{P} \infty \text{ as } t \rightarrow \infty$$

よ, z (2.5), (H2) より

$$(3.2) \quad \sqrt{N(t) h_{N(t)}^P} \beta_{0N(t)} (f_0(x) - f(x)) \xrightarrow{P} 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

また 条件 T より

$$\frac{N(t)}{[\theta\pi(t)]} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

従, z (H6) より

$$\frac{h_{N(t)}}{h_{[\theta\pi(t)]}} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

故に

$$\frac{N(t) h_{N(t)}^P}{[\theta\pi(t)] h_{[\theta\pi(t)]}^P} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

よ, z Lemma 2.3 を用いて

$$(3.3) \quad V_{[\theta\pi(t)]} \left\{ \left(\frac{N(t) h_{N(t)}^P}{[\theta\pi(t)] h_{[\theta\pi(t)]}^P} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \xrightarrow{P} 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

$$U_n^{(1)} = K_n(x, X_n) - E[K_n(x, X_n)], \quad U_n^{(2)} = E[K_n(x, X_n)] - f(x)$$

よお ε S_n は

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j \beta_{jn} U_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n a_j \beta_{jn} U_j^{(2)}$$

と表わす。 Lemma 2.1 より

$$|U_n^{(1)}| \leq C_3 h_n^2 \quad \forall n \geq 1$$

明か $\{U_n^{(1)}\}$ は独立で

$$E[U_n^{(1)}] = 0 \quad \forall n \geq 1$$

よ、著者 [8] の Proposition 2.5 より

$$(3.4) \quad h_n^p E[(U_n^{(1)})^2] \leq C_4 \quad \forall n \geq 1$$

(H3) より

$$n^{1-2\alpha} h_n^p \sum_{j=1}^n j^{-2(\alpha-1)} h_j^{-p} \leq C_5 \quad \forall n \geq 1$$

よ、(3.4), (2.4), (2.5) を用いて

$$\begin{aligned} & n h_n^p \sum_{j=1}^n a_j^2 \beta_{jn}^2 E[(U_j^{(1)})^2] \\ & \leq C_4 n h_n^p \sum_{j=1}^n j^{-2} \beta_{jn}^2 h_j^{-p} \leq C_6 \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

従って Lemma 2.4 の条件が満たされたから

$$(3.5) \quad \sqrt{N(t) h_{N(t)}^p} (S_{N(t)} - S_{[0\pi(t)]}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。一方

$$V_{N(t)} = V_{[\theta\pi(t)]} + \sqrt{N(t)h_{N(t)}^p} (S_{N(t)} - S_{[\theta\pi(t)]}) \\ + V_{[\theta\pi(t)]} \left\{ \left(\frac{N(t)h_{N(t)}^p}{[\theta\pi(t)]h_{[\theta\pi(t)]}^p} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}$$

よって (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) と Lemma 2.3 より

$$\sqrt{N(t)h_{N(t)}^p} (f_{N(t)}(x) - f(x)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

(証明終)

Theorem 3.1 より次が成り立つ。

Corollary 3.1

$\forall \alpha \in (0, 1)$ が与えられたとし, $D = D_\alpha > 0$ は $\Phi(D) - \Phi(-D) = \alpha$ を満たすとする。ただし Φ は $N(0, 1)$ の分布関数である。(2.2) の Q に対して (H1) ~ (H6) が満たされるとする。

$\theta \equiv 1$ とし条件 T が成り立つと仮定する。

$f(x)$ は有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

($i, j = 1, \dots, p$) をもつとする。

$t \in (0, \infty)$ に対しても $d(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$ である

す正数列とし

$$I_{n,t}(x) = [f_n(x) - d(t), f_n(x) + d(t)]$$

とおく。 $t \in \mathbb{C}$

$$d^2(t) [\pi(t)] h_{[\pi(t)]}^p \xrightarrow{P} D^2 \sigma^2(x) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

存すは $f(x) > 0$ なる点 x に対しても

$$P\{f(x) \in I_{N(t),t}(x)\} \rightarrow \alpha \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明)

条件 T より

$$(3.6) \quad \frac{N(t)}{[\pi(t)]} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

よって (H6) より

$$\frac{h_{N(t)}}{h_{[\pi(t)]}} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

従って (3.6) より

$$(3.7) \quad \frac{N(t) h_{N(t)}^p}{[\pi(t)] h_{[\pi(t)]}^p} \xrightarrow{P} 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

(3.7) と仮定より

$$d^2(t) N(t) h_{N(t)}^P \xrightarrow{P} D^2 \sigma^2(x) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

よって

$$(3.8) \quad \frac{d(t) \sqrt{N(t) h_{N(t)}^P}}{D \sigma(x)} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

従って Theorem 3.1 より

$$\frac{\sqrt{N(t) h_{N(t)}^P} (f_{N(t)}(x) - f(x))}{\sigma(x)} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

よって (3.8) より

$$\frac{D (f_{N(t)}(x) - f(x))}{d(t)} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

故に

$$\begin{aligned} & P \{ |f_{N(t)}(x) - f(x)| \leq d(t) \} \\ &= P \left\{ \frac{D |f_{N(t)}(x) - f(x)|}{d(t)} \leq D \right\} \\ &\rightarrow \Phi(D) - \Phi(-D) = \alpha \quad \text{as } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(証終)

Corollary 3.2

$$h_n = n^{-\frac{r}{p}}, \quad \max\left\{ \frac{p}{p+r}, 1-2a \right\} < r < 1, \quad 0 < a \leq 1$$

とす。 $f(x)$ は有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

$(i, j = 1, \dots, p)$ をもつて仮定する。

$t \in (0, \infty)$ に対して

$d(t)$ は正数で $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$ をみたし

$N(t)$ は (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された正の整数値をとる確率変数で

$$\frac{N(t)}{(d(t))^{2/(r-1)}} \xrightarrow{P} (D\sigma(x))^{\frac{2}{1-r}} \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

をみたすとする。ここには D は Corollary 3.1 にあつて
のである。このとき $f(x) > 0$ なる点 x に対して

$$P\{f(x) \in I_{N(t), t}(x)\} \rightarrow \alpha \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明)

2 節の例より (H1) ~ (H6) がみたされる。

$$(3.9) \quad \pi(t) = (D\sigma(x)/d(t))^{\frac{2}{1-r}}$$

とかくと仮定より

$$N(t)/\pi(t) \xrightarrow{P} 1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$(3.10) \quad \pi(t) \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

よって $\theta \equiv 1$ として条件 T が成り立つ。

(3.9), (3.10) より

$$d^2(t) [\pi(t)] h_{[\pi(t)]}^P \rightarrow D^2 \sigma^2(x) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

よ、て Corollary 3.1 の条件が成り立たないから
Corollary 3.1 より Corollary 3.2 が成り立つ。

(証明終)

参 考 文 献

- [1] Aldous, D. J. (1978). Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 83, 117-126.
- [2] Anscombe, F. J. (1952). Large-sample theory of sequential estimation. Proc. Camb. Philos. Soc., 48, 600-607.
- [3] Carroll, R. J. (1976). On sequential density estimation. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 36, 137-151.
- [4] Chow, Y. S., and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math. Statist., 36, 457-462.
- [5] Csörgő, M., and Fischeler, R. (1973). Some examples and results in the theory of mixing and random-sum central limit theorems. Periodica Math. Hungar., 3, 41-57.
- [6] Devroye, P. (1979). On the pointwise and the integral convergence of recursive kernel estimates of probability densities. Util. Math., 15, 113-128.
- [7] Govindarajulu, Z. (1983). An extension of Anscombe-Rényi theorem with applications. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 28, 587-592.
- [8] Isogai, E. (1980). Strong consistency and optimality of a sequential density estimator. Bull. Math. Statist., 19, No. 1~2, 55-69.
- [9] Isogai, E. (1981). Stopping rules for sequential density estimation. Bull. Math. Statist., 19, No. 3~4, 53-67.

- [10] Isogai, E. (1984). Joint asymptotic normality of nonparametric recursive density estimators at a finite number of distinct points. *J. Japan Statist. Soc.*, 14, 125-135.
- [11] Prakasa Rao, B. L. S. (1983). *Nonparametric functional estimation*. Academic Press.
- [12] Rényi, A. (1960). On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Acta Math. Acad, Sci. Hungar.*, 11, 97-102.
- [13] Stute, W. (1983). Sequential fixed-width confidence intervals for a nonparametric density function. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 62, 113-123.
- [14] Wolverton, C. T., and Wagner, T. J. (1969). Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-15, 258-265.