数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 5-16



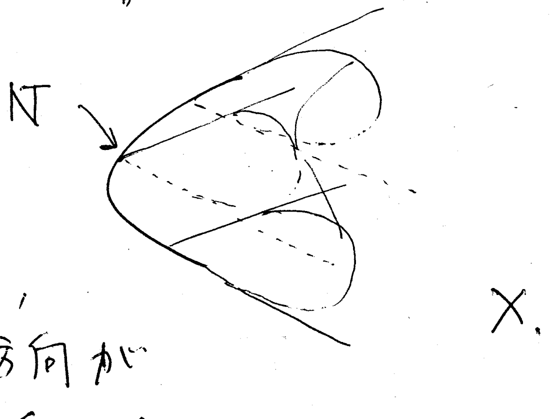
# H. Lewy's extension problem と接CR方程式系

新潟大・教養
田島 慎一 ( Shinichi TAJIMA )

H. Lewy方程式と積分核について報告します。

## §1. CR microfunction と H. Lewy 現象

N を複素多様体 X 内の実解析的で generic な CR 多様体とする。N の上の全ての CR-hyperfunctions (の germ ) が ある一定の方向からの 正則函数の境界値として表示できるとき, H. Lewy 現象が起こるという。




注。microlocal に考えて,
N の pseudoconcave な方向が
充分多いと H. Lewy 現象が起こる。

この現象はN上の接CR方程式系 $\mathfrak{M}_N$ の microfunction 解の構造と関係がある。

今，Nの複素化をYと置くと $Ch(\mathfrak{M}_N) \cap T^*_N Y = T^*_N X$ となり次が成立する。

定理1．[9]．$\mathrm{supp}\, \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{M}_N, \mathcal{C}_N)$ の凸包が proper（これを $\Gamma$ とおく）ならば，$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}_N, \mathcal{B}_N)$ は $\Gamma^\circ$ 方向からの（X上の）正則函数の境界値として表わせる。

証明 …… SKKの Chap I を読み直す。

さて，H. Lewy 現象が起こるとき，CR microfunction に対して定義函数となる正則函数を再生する積分変換を求め，その性質を調べるのは基本的問題である。

すなわち

$$f(x') \longrightarrow \int K(z, x') f(x')\, dx'$$

の形の積分作用素で，次の条件をみたすものを micro-local に構成したい。（注．簡単の為 fiber 方向の変数は省略した）

1) $x' \in N$ のとき $K(z, x')$ は $z$ について $\Gamma^\circ$ に対応する適当な領域において正則

2) CR microfunction $f$ に対して $\int K(z, x') f(x') dx'$ は $f$ を定義する正則函数となる。すなわち、$\int K(z, x') f(x') dx'$ の $N$ への境界値を $\int K(x, x') f(x') dx'$ で表わすことにすれば

$$f(x) = \int K(x, x') f(x') dx'$$

が microfunction として成立する。

3) $f(x') \longrightarrow \int K(x, x') f(x') dx'$ の値域は $\mathrm{Ker}\, \overline{\partial}_N$ と一致したまま、定義域を可能な限り広くとる。

注。$\overline{\partial}_N$ の解に特異性の伝播が起こるときは local operator ではなくなるので 2) 等は注意が必要。

次が成立する。

定理2 [10]。

Microlocal な意味で強擬凸な場所では、上の様な積分核が多変数函数論的方法で構成できる。

## §2　H. Lewy 方程式の基本解

H. Lewy 方程式の microlocal な基本解は SKK で既に天下り的に導入されている。又河合先生の東大セミナリーノート「線型偏微分方程式論序説」では complex phase の方法で構成されている。ここでは H. Lewy の方程式が接 Cauchy-Riemann 方程式という幾何的な方程式であることを利用した基本解の構成法を報告する。この方法は他の接CR方程式系に対しても一般化が可能と思われる。

まず、H. Lewy 方程式が接CR方程式となることを示そう。

$N = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \rho = x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\}$ と置く。

$$[N]^{0,1} = \delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2)\,[2x_1 dx_1 + 2y_1 dy_1 + dx_2]^{0,1}$$

$$= \delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2)\left(z_1 d\bar{z}_1 + \frac{1}{2} d\bar{z}_2\right)$$ となる。

N上の函数 $h(x_1, y_1, y_2)$ に対して $\mathbb{C}^2$ 上の $(0,1)$ form $i_* h$ を次で定める

$$i_* h = h(x_1, y_1, y_2)\,\delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2)(z_1 d\bar{z}_1 + \tfrac{1}{2} d\bar{z}_2)$$

定義　$h$ が CR 函数とは $\bar{\partial}(i_* h) = 0$ を満たすこと。

$$\bar{\partial}(i_* h) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(h \cdot \delta)\, d\bar{z}_1 \wedge (z_1 d\bar{z}_1 + \tfrac{1}{2} d\bar{z}_2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}(h \cdot \delta)\, d\bar{z}_2 \wedge (z_1 d\bar{z}_1 + \tfrac{1}{2} d\bar{z}_2)$$

を計算すると

$$\bar{\partial}(i_* h) = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial y_1}\right) - i(x_1 + iy_1)\frac{\partial}{\partial y_2}\right] h\right\} \delta\, d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$$

となる。従って $h$ が CR 函数となる条件は

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial y_1}\right) - i(x_1 + iy_1)\frac{\partial}{\partial y_2}\right] h = 0$$

であるが，これは H. Lewy の方程式そのものである。
しかし，この方程式の形から N の幾何的様子を直接考察するのは困難であるから，座標系を取りかえたい。その為に次の一般的結果を使おう。

定理3 [8]。

$N^{2n-k}$ が $X^n$ の generic CR 多様体とする。
$Y$ を $N$ の複素化とすると $Y^{2n-k} \longrightarrow X^n$ なる holomorphic map が自然に導かれるが

1) $Y^{2n-k} \longrightarrow X^n$ は submersion.

2) fiber方向の holomorphic なベクトル場 (一次独立なものは $(2n-k)-n = n-k$ 個) 達は接CR方程式系 $\overline{\partial}_N$ (の $Y$ への複素化) に一致する。

H. Lewy 方程式の場合に上の主張が正しいことを確かめよう。

$N = \{(z_1, z_2) \mid x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\}$ の媒介変数表示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & N \\ \Psi & & \Psi \\ (u_1, u_2, u_3) & & (x_1, y_1, x_2, y_2) \end{array}$$

を $x_1 = u_1,\ y_1 = u_2,\ x_2 = -u_1^2 - u_2^2,\ y_2 = u_3$

で定める。

$\mathbb{R}^3 \ni (u_1, u_2, u_3)$ の複素化を $\mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3)$ と置く。この時

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

の複素化

$$\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

は　$z_1 = w_1 + i w_2$,　$z_2 = -w_1^2 - w_2^2 + i w_3$　となる。

これは明らかに submersion となるが，その fiber 方向のベクトル場 $a\frac{\partial}{\partial w_1} + b\frac{\partial}{\partial w_2} + c\frac{\partial}{\partial w_3}$ を求めてみる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -2w_1 & -2w_2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を求めると，$a = \frac{1}{2}$ のとき $b = \frac{1}{2} i$, $c = -i(w_1 + i w_2)$ となるので，求めるベクトル場は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1} + i\frac{\partial}{\partial w_2}\right) - i(w_1 + i w_2)\frac{\partial}{\partial w_3}$$

となり，確かに H. Lewy 方程式が得られた。

さて，先の定理は $\bar{\partial}_H$ は複素領域で partial de Rham 型であることを意味している。従って fiber 方向を座標にとれば $\bar{\partial}_H$ は定数係数の作用素になるから，その様な座標系を求めてみよう。

$Y = \mathbb{C}^3 = \{(z_1, w, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$ とおく。

$\chi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow Y$ を次で定める。

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + i w_2 \\ w = w_1 - i w_2 \\ z_2 = -w_1^2 - w_2^2 + i w_3 \end{cases}$$

$\chi$ は biholomorphic で次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & (z_1, w, z_2) \in Y \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \arrow[r, equal] & (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

写像 proj の fiber 方向のベクトル場は $\frac{\partial}{\partial w}$ であるが、Lewy の作用素 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1} + i\frac{\partial}{\partial w_2}\right) - i(w_1 + i w_2)\frac{\partial}{\partial w_3}$ は $\chi$ で $\frac{\partial}{\partial w}$ に移ることも確かめられる。

従って

<u>補題</u> $Y = \{(z_1, w, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$ において $D_N$ は $\frac{\partial}{\partial w}$ と等しい。

そこで，$\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ の基本解を（複素の世界で）Radon の方法で形式的に求めると

$$E = \mathrm{const}\int \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\omega(\zeta_1, \xi, \zeta_2)}{\{(z_1 - z_1')\zeta_1 + (w - w')\xi + (z_2 - z_2')\zeta_2\}^2}$$

となる。但し $(z_1, w, z_2)$ と dual な変数を $(\zeta_1, \xi, \zeta_2)$ とおいた。

命題。$(w_1, w_2, w_3)$ 座標で $E$ を表わすと SKK において，H.Lewy 方程式の基本解として与えられたものを複素化したものと一致する。

実際 $T^*\mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3 ; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と $T^*Y \ni (z_1, w, z_2 ; \zeta_1, \xi, \zeta_2)$ とは

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}w \\ w_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}w \\ w_3 = -iz_1 w - iz_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 = \zeta_1 + \xi - 2w_1\zeta_2 \\ \xi_2 = i\zeta_1 - i\xi - 2w_2\zeta_2 \\ \xi_3 = i\zeta_2 \end{cases}$$

なる関係があるので

$$(z_1 - z_1')\zeta_1 + (w - w')\xi + (z_2 - z_2')\zeta_2$$
$$= (w_1 - w_1')\xi_1 + (w_2 - w_2')\xi_2 + (w_3 - w_3')\xi_3$$
$$+ i\xi_3\{(w_1 - w_1')^2 + (w_2 - w_2')^2\}$$

及び

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2) - i(w_1' + i w_2')\xi_3$$

等が容易に確かめられる。

従って $E$ を実領域に境界値を取って microlocal に正しく意味付けられれば、求める基本解が構成できたことになる。さて $Y$ も $N$ の複素化であるが、$N$ は $\chi(\mathbb{R}^3)$ として $Y$ に埋め込まれているのだから、$\chi(\mathbb{R}^3)$ を求めると

<u>補題</u> $\chi(\mathbb{R}^3) = \{(z_1, w, z_2) \mid \bar{z}_1 = w,\ x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\}$

を得る。従って $E$ を意味付けるには $\bar{z}_1 = w$ に境界値をとり、更に $x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0$ に境界値をとる必要がある。

さて、$E$ は $\frac{\partial}{\partial w}$ の基本解だったから $w = \bar{z}_1$ とすれば $E$ は $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$ の基本解となる。従って

$$E = \text{const}\,\frac{1}{z_1 - z_1'} \times (\text{残りの変数に関する}\,\delta\text{-函数})$$

となるが、空間 $x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0$ が曲がっている為普通の $\delta$-函数の形ではなく定理2で述べたものになる。今の場合

$$\frac{1}{z_2 - z_2' + 2(z_1 - z_1')\overline{z_1'}}$$

となる。実際 Cauchy-Fantappiè 核の因子 $(z_1 - z_1')\zeta_1 + (z_2 - z_2')\zeta_2$ において $\zeta_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1'} = \overline{z_1'}$ $\zeta_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2'} = \frac{1}{2}$ を代入すれば上の形が得られる。

結局

$$E = \text{const}\,\frac{1}{z_1 - z_1'} \cdot \frac{1}{z_2 - z_2' + 2(z_1 - z_1')\overline{z_1'}}$$

の形が得られるが、$x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0$ が強擬凸境界面であることから、第2の因子には microlocal な意味付けが自然に入る。

この様にして得られた $E$ は SKK で構成してある H. Lewy 方程式の基本解と一致する。

以上。

# 文献


1. Р.А. Айрапетян, Г.М. Хенкин  Интегральные представления дифф-ренциальных форм на многообразиях Коши-Римана и теория CR-Функций, Успехи Мат. Наук. т. 39 (1984) pp. 39 - 106
2. M.S. Baouendi, C.H. Chang and F. Treves  Microlocal hypo-analyticity and extension of CR-functions, J. Diff. Geom., 18 (1983), pp. 331 - 391
3. L. Fantappié  Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones, Barcelona 1943
4. H. Lewy  An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math., 66 (1957) pp.155 - 158
5. ——— On hulls of holomorphy, Comm. Pure and Appl. Math. 13 (1960), pp. 587 - 591
6. P. Schapira  Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), pp. 121 - 139
7. J. Sjöstrand  Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982), pp. 1 - 166
8. S. Tajima  Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Publ. RIMS, 18 (1982) pp. 911 - 945
9. ——— Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème de Lewy pour les solutions hyperfonctions à paraitre
10. ——— H. Lewy 現象と再生核, 京都大学数理解析研究所講究録「偏微分方程式系の局所・非局所変換理論」