数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 35-51

エネルギー法の多成分化とその応用

都立大理　片岡清臣 (Kiyômi Kataoka)

本稿では講演の際，不備のため発表できなかったエネルギー法の多成分化理論も含めて擬微分方程式への応用について述べる。なお，詳細については [4], [5] を見られたい。

§1. エルミート半正定値性の超局所化．

X を任意の集合，$K(x,w)$ を $\mathbb{C}$ 値の $X\times X$ 上のエルミート核とする。そのとき K が半正定値であることは

$$\sum_{i,j=1}^{N} K(x_i, x_j)\lambda_i\overline{\lambda_j} \geq 0 \quad \text{for } \forall N,\ \forall x_1,\dots,x_N\in X,\ \forall \lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C}$$

によって定義される。以下ではこの様な核 K を単に正値核と呼び，"$K \gg 0$" によって表わすことにする。この正値性により $X\times X$ 上のエルミート核全体は順序構造をもつが，積についても

$$K_1 \gg 0 \text{ かつ } K_2 \gg 0 \implies K_1\cdot K_2 \equiv K_1(x,w)K_2(x,w) \gg 0$$

などの性質があることもよく知られている。

我々の理論にとっては X が複素領域，$K(z,w)$ $(z,w\in X)$ が $z,\bar{w}$ について正則な場合が重要であるが，これについては既に[6]において解説済みなのでここでは省略する。ただその中でも基礎となった重要な事実

「正値性は解析接続によって保たれる」

を注意しておく。

さて次に核 K が佐藤超関数，又はマイクロ関数の時はどうなるかをみる。今 $f_1(x),\ldots,f_N(x)$ を $0\in\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された超関数とする。そのとき $E(x,u)=\sum_{j=1}^N f_j(x)\overline{f_j(u)}$ は当然正値核と呼ぶべきものであるが対角線 $\{x=u\}$ 上の値などは一般には超関数としても定義できない。従って正値性に関する上の条件はこの場合全く適用できない。ところが E を反対角集合

$$\Delta^a(iS^*\mathbb{R}^{n+n})=\{(x,u;i\xi dx+i\eta du);\ x=u,\ \xi=-\eta\neq 0\}$$

上の一点 $p_0=(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ におけるマイクロ関数と考えると見通しがよくなる。今各 $f_j(x)$ を次の様に分解する。

$$f_j(x)=F_j(x+i0\Gamma)+g_j(x), \tag{1}$$

ここで $g_j(x)$ は $0\in\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された超関数で $(x_0;i\xi_0dx)$ でミクロ解析的，又十分小さな正数 r に対して

$$\Gamma = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \langle y, \xi_0 \rangle > r(|y|^2 - \langle y, \xi_0 \rangle^2)^{1/2} \}, \qquad (2)$$

$$V = \{ z \in \mathbb{C}^n ; \ |z - x_0| < r, \quad \mathrm{Im}\, z \in \Gamma \} \qquad (3)$$

とおくとき，$F_j(z)$はVで正則な関数である。このとき，

$$E(x, u) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i0\Gamma) \cdot F_j^*(u - i0\Gamma) + R(x, u)$$

となる。但し $F_j^*(w) = \overline{F_j(\overline{w})}$，$SS(R(x, u)) \not\ni p_0$． このことから$E(x, u)$は超局所的には正値エルミートな解析核

$$K(z, w) = \sum_{j=1}^{N} F_j(z) \overline{F_j(w)}$$

の境界値として表わせることがわかる。従って次の定義を自然に導入することができる。

<u>定義1</u>　$p_0 = (x_0, x_0 ; i\xi_0(dx - du)) \in iS^*\mathbb{R}^{n+n}$とする。$k(x, u)$を$p_0$の近傍で定義されたマイクロ関数とする。そのとき$k(x, u)$がHermiteマイクロ核であるとは

$$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad k(x, u) = \overline{k(u, x)}.$$

又，$k(x, u)$が正値(Hermite)核であるとは，十分小な$r > 0$に対して(3)で定義されるVに対し$V \times V^c$で正則な関数$G(z, w)$で$G(z, \overline{w})$が$V \times V$で正値核になるものが存在して

$$k(x, u) = [\, G(x + i0\Gamma, u - i0\Gamma) \,] \qquad \text{at } p_0$$

とかけることとする。さらに2つのHermiteマイクロ核k_1, k_2に対し

$$k_1 \gg k_2 \text{ at } p_0 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} k_1 - k_2 \text{は} p_0 \text{で正値}$$

と定義する。

定理2.（[4] §2） 関係"$k_1 \gg k_2$ at p_0"は $p_0 \in \Delta^a(iS^*\mathbb{R}^{n+n})$ におけるHermiteマイクロ核に対する順序関係を定める。すなわち

$$k \gg 0 \text{ かつ } -k \gg 0 \text{ at } p_0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ at } p_0$$

$$k_1 \gg 0 \text{ かつ } k_2 \gg 0 \text{ at } p_0 \Rightarrow k_1 + k_2 \gg 0 \text{ at } p_0$$

が成立する。

正値マイクロ核の重要な例はデルタ核 $\delta(x-u)$ である。実際

$$\delta(x-u) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma(\xi)}{(\langle x-u, \xi\rangle + i0)^n}$$

（平面波分解公式：$d\sigma(\xi)$ は単位球面上の体積素）

と表わせるが定義関数は

$$(n-1)! \{ i/2\pi(\langle z, \xi\rangle - \langle \overline{w}, \xi\rangle) \}^n = (2\pi)^{-n} \int_0^\infty t^{n-1} e^{it\langle z,\xi\rangle} \cdot \overline{e^{it\langle w,\xi\rangle}}\, dt$$

となって明らかに $\xi \in S^{n-1}$ をパラメータとする $\{\langle \mathrm{Im}\, z, \xi\rangle > 0\} \times \{\langle \mathrm{Im}\, w, \xi\rangle > 0\}$ における正値核である。この様な正値核のパラメータについての積分として表される正値核は応用上も重要である。例えば $f(t,x)$ を実解析パラメータ t をもつ超関数，$P(t,x,u,D_x,D_u)$ を t について実解析的な x, u に関する正値擬微分作用素（§2で述べる）とすると，

$$\int_T P(t,x,u,D_x,D_u)[f(t,x)\overline{f(t,u)}]\,dt$$

の形のマイクロ核は典型的な正値マイクロ核の例である。これらについては次の2つの基本的な定理が得られている。

定理3（[4] §2）. $f(t,x)$ を $\{(t,x)\in\mathbb{R}^{m+n};\ |t-t_0|<r,\ |x-x_0|<r\}$ で定義された t を実解析的パラメータとする超関数とする。そのとき $f(t,x)\overline{f(t,u)}$ は $p_0=(t_0,x_0,x_0;\ i\xi_0(dx-du))\in\mathbb{R}^m\times\sqrt{-1}(iS^*\mathbb{R}^{n+n})$ （$\xi_0\in S^{n-1}$ は任意）における，t を実解析パラメータとする正マイクロ核である。さらに $f(t,x)$ が

$\{(t,x;\ i\tau,i\xi)\in iS^*\mathbb{R}^{m+n};\ t=t_0,\ x=x_0,\ \xi=\xi_0,\ \tau\in\mathbb{R}^m\}$

でミクロ解析的であることと $f(t,x)\overline{f(t,u)}$ が

$\{(t,x,u;\ i\tau dt+i\xi dx+i\eta du)\in iS^*\mathbb{R}^{m+2n};\ t=t_0,\ x=u=x_0,\ \xi=-\eta=\xi_0,\ \tau\in\mathbb{R}^m\}$

でミクロ解析的であることは同値。

注意. 実解析的パラメータをもつ正マイクロ核の定義も同様に定義関数を用いて与えられるが詳細は略した。また t_0 がパラメータ空間の境界上の点である時もマイルド超関数の理論を使って t についての実解析的依存性の定義，及び定理3の拡張が得られる。

定理4（[4] §2） $T\subset\mathbb{R}^m$ を有界開集合，∂T は実解析的境界であるとする。又，$k(t,x,u)$ を $T\times\{(x,u)\in\mathbb{R}^{n+n};\ |x-x_0|<r,\ |u-x_0|<r\}$ で定義され，$\partial T\times\{|x-x_0|<r,\ |u-x_0|<r\}$ 上でマイルドな超関数であるとし $\mathrm{ext}(k(t,x,u))$ を $\{t\in\partial T\}$ を横切る自然な

拡張とする。今マイクロ核 $[\mathrm{ext}(k(t,x,u))]$ は $t\in T$ を実解析パラメータにもつ $\bar{T}\times\{(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))\}$ 上の正マイクロ核であると仮定する($\bar{T}$ は T の閉包)。そのとき $\bar{T}$ の近傍で解析的であって $\rho(t)\geqq 0$ on T, $\rho(t)\not\equiv 0$ (各連結成分上)を満たす関数 $\rho(t)$ に対して

$$E(x,u)=\int_T k(t,x,u)\rho(t)dt$$

は $p_0=(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ における正マイクロ核となる($\xi_0\in S^{n-1}$ は任意)。さらに $SS(E(x,u))\ni p_0$ ならば $\mathrm{ext}(k(t,x,u))$ は

$$\{(t,x,u;i\tau dt+i\xi dx+i\eta du);\ t\in\bar{T},\ x=u=x_0,\ \xi=-\eta=\xi_0,\ \tau\in\mathbb{R}^m\}$$

でミクロ解析的。

§2. 擬微分作用素に対する正値性。

エルミートマイクロ核に順序 $\ll$ を保つように作用する擬微分作用素について考察する。最初に Boutet de Monvel [3] 及び青木 [1], [2] による解析的擬微分作用素(無限階も含む)に対する表象理論を復習する。$p_0=(z_0,\xi_0dz)\in T^*\mathbb{C}^n$ $(|\xi_0|=1)$ の $T^*\mathbb{C}^n$ における錐状近傍とは次の形の開集合である:

$$\{(z;\xi dz)\in\mathbb{C}^{n+n};\ |z-z_0|<r,\ |(\xi/|\xi|)-\xi_0|<r,\ |\xi|>r^{-1}\}. \quad (4)$$

このとき p_0 の錐状近傍 V で正則な関数 $P(z,\xi)$ が p_0 における単表象であるとは $\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists C_\varepsilon$ が存在して

$$|P(z,\xi)|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|} \quad \text{on } V \quad (5)$$

を満たすことである。このような単表象の同値類として擬微分作用素 $P(z, D_z)$（但し $D_z = \partial/\partial z$）が定義される。すなわち2つの単表象 P_1, P_2 が p_0 における擬微分作用素として等価であるとは $^\exists C, \delta > 0$ が存在して

$$|p_1(z,\zeta) - p_2(z,\zeta)| \leq Ce^{-\delta|\zeta|} \tag{6}$$

が p_0 のある錐状近傍上で成立することである。

<u>定義5.</u> $p_0 = (z_0, \bar{z}_0 ; \zeta_0 dz + \bar{\zeta}_0 dw) \in T^*\mathbb{C}^{n+n}$ ($|\zeta_0| = 1$) とする。p_0 における擬微分作用素 $P(z, w, D_z, D_w)$ がエルミートであるとはその単表象 $P(z, w, \zeta, \eta)$ が $\overline{P(\bar{w}, \bar{z}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})}$ と等価であること。そのとき特に単表象自体もエルミート核 $(P(z, w, \zeta, \eta) + \overline{P(\bar{w}, \bar{z}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})})/2$ としてとれる。エルミートな擬微分作用素は $\Delta^a(iS^*R^{n+n})$ 上では層準同型としてエルミートマイクロ核に作用する。

次に正値なエルミート擬微分作用素を考えるのであるがここで一つ難点が現われる。実際，今 $P(z, w, \zeta, \eta)$ を $p_0 = (z_0, \bar{z}_0 ; \zeta_0, \bar{\zeta}_0)$ の錐状近傍で定義された単表象で同時にエルミート正値性をもつものとする。すると解析性と正値性とがからんで結局 P は直積型の開集合 $V \times V^c$ まで解析接続できることになる。ここで V は $(z_0 ; \zeta_0 dz)$ の $T^*\mathbb{C}^n$ における錐状近傍である。従ってエルミート擬微分作用素より狭い，直積型エルミート擬微分作用素のクラスを導入しなければならない。

<u>定義6.</u> p_0 を同上の点とする。p_0 における単表象 $P(z, w, \zeta, \eta)$

が p_0 における直積型表象（エルミート）であるとは次の i)〜iii) を満たす事。

i) $V=\{(z;\zeta)\in\mathbb{C}^{n+n};\ |z-z_0|<r,\ |(\zeta/|\zeta|)-\zeta_0|<r,\ |\zeta|>r^{-1}\}$ (7)

とおくとき P は十分小な $r>0$ に対して $V\times V^c$ で正則である。

ii) $\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists C_\varepsilon>0$ が存在して次の不等式を満たす。

$$|p(z,w,\zeta,\eta)|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon(|\zeta|+|\eta|)} \quad \text{on } V\times V^c \tag{8}$$

iii) $P(z,w,\zeta,\eta)=\overline{P(\overline{w},\overline{z},\overline{\eta},\overline{\zeta})}$ on $V\times V^c$。

さらに P が正値(エルミート型)表象であるとは i)〜iii) を満たしかつ $P(z,\overline{w},\zeta,\overline{\eta})$ が $V\times V$ 上正値核であることと定義する。

又，p_0 における直積エルミート型表象 P が O クラスに属する事を，$\exists\delta>0$, $\exists V'$ ((7)の様な錐状近傍) に対し $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$ が存在して

$$|p(z,w,\zeta,\eta)|=|P(\overline{w},\overline{z},\overline{\eta},\overline{\zeta})|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|-\delta|\eta|}$$

が $V'\times V'^c\cap\{|\zeta|\geqq|\eta|\}$ で成立することとして定義する。

注意　これらの概念は[3], [1], [2]の中でのいわゆる形式表象の理論まで自然に拡張され演算子積をライプニッツ法則で導入することにより環をなすことが確められる。但しその際形式表象とは二重級数 $\sum_{j,k=0}^{\infty}P_{jk}(z,w,\zeta,\eta)$ を考えることになる。正値性については例えば２つの正値形式表象の演算子積は再び正値であるなどの事がわかる。又，直積エルミー

ト型形式表象は単化化可能，すなわちある直積エルミート型表象と等価であって特に$\Delta^a(\sqrt{-1}S^*R^{n+m})$上ではエルミートマイクロ核に層準同型として作用する。正値形式表象についても同様でこの場合さらに順序≪を保つように作用する。

例7. $P(z,\xi)$を$(z_0;\xi_0 dz)$の$T^*\mathbb{C}^n$における錐状近傍Vで定義された表象とし$P^*(w;\eta)=\overline{P(\bar{w},\bar{\eta})}$とおく。そのとき

$$P(z,\xi)+P^*(w,\eta) \quad 及び \quad P(z,\xi)P^*(w,\eta) \tag{9}$$

は$p_0=(z_0,\bar{z}_0;\xi_0 dz+\bar{\xi}_0 dw)$における，それぞれ直積エルミート型及び正値エルミート型表象である。さらに$\exists C>0$, $\exists m\geqq 0$に対して$P(z,\xi)$が不等式

$$C|\xi|^m \leqq \mathrm{Re}\, P(z,\xi) \leqq C^{-1}|\xi|^m \quad \text{on } V \tag{10}$$

を満たすならば$P(z,D_z)+P^*(w,D_w)$の逆作用素

$$(P(z,D_z)+P^*(w,D_w))^{-1} \tag{11}$$

はp_0で正値エルミート型擬微分作用素になる。

多くの問題で実は$P(z,D_z)+P^*(w,D_w)$の形の作用素が現われるのであるがこれらは正値ではない。しかし(11)で見たように正値作用素と深いつながりを持っている。事実次の様な意味で準正値ともいえる性質を持っている。すなわち(10)の条件下であるp_0で定義された可逆かつ正値な擬微分作用素Qが存在して

$$Q(z,w,D_z,D_w)(P(z,D_z)+P^*(w,D_w))$$

が正値になるようにできるというわけである。しかもその際いくつかのPに対し共通のQを用いて一斉に正値にできる。従って正値性より一段弱い順序関係である準正値性というべき性質が導入できるのである。一方ここに現われる可逆正値作用素Qは一般に無限階の直積エルミート型作用素のある特殊なクラスの中から選び出されるのであるが、青木[1],[2](cf.[3])による無限階擬微分作用素に対する指数法則の理論と関連していてそれ自体興味深い。

定義8. $p_0=(z_0,\bar{z}_0;\xi_0 dz+\bar{\xi}_0 dw)\in T^*\mathbb{C}^{n+n}$ とする。($|\xi_0|=1$)。そのとき表象 $\exp(P(z,w,\xi,\eta))$ が p_0 における制限エルミート型表象であるとは、$P(z,w,\xi,\eta)$ が $\exists r>0$ に対して

$$V(r)=\{(z,w;\xi,\eta)\in\mathbb{C}^{4n};\ |z-z_0|<r,\ |w-\bar{z}_0|<r,$$
$$|(\xi/|\xi|)-\xi_0|<r,\ |(\eta/|\eta|)-\bar{\xi}_0|<r,\ |\xi|>r^{-1},\ |\eta|>r^{-1}\} \qquad (12)$$

で正則で次を満たすときをいう。

$$\begin{cases} P(z,w,\xi,\eta)=\overline{P(\bar{w},\bar{z},\bar{\eta},\bar{\xi})} \\ |\mathrm{grad}_{(z,w)}P|\leqq C\cdot\min\{|\xi|^{\sigma},|\eta|^{\sigma}\} \qquad \text{on } V(r) \\ |\mathrm{grad}_{(\xi,\eta)}P|\leqq C(|\xi|+|\eta|)^{\sigma-1} \end{cases} \qquad (13)$$

但し、$C>0$, $0<\sigma<1/2$ は定数。特に不等式を積分して

$$|P(z,w,\xi,\eta)|\leqq M(|\xi|+|\eta|)^{\sigma} \qquad \text{on } V(r) \qquad (14)$$

なる評価が得られることにより $\exp P$ は直積エルミート型表象であることがわかる。

定理 9 ([4])。p_0, $V(r)$, σ, C は同上とする。$\exp(P(z,w,\xi,\eta))$, 及び $\exp(Q(z,w,\xi,\eta))$ を p_0 における制限エルミート型表象で特に P, Q は (13) を満たしているとする。そのとき $0<r'<r$ なる任意の r' に対して r, r', σ 及び C のみによる定数 $B(>r'^{-1})$ と $V'=V(r')\cap\{|\xi|>B, |\eta|>B\}$ で定義された正則関数 $S_l(z, w,\xi,\eta)$ $(l=1,2)$ が存在して次を満たす。

i) $S_l(z,w,\xi,\eta)=\overline{S_l(\bar{w},\bar{z},\bar{\eta},\bar{\xi})}$ on V' for $l=1,2$. (15)

ii) $|S_l(z,w,\xi,\eta)|\leqq B(|\xi|+|\eta|)^{2\sigma-1}$ 〃 〃 (16)

iii) $:\exp(P)::\exp(Q):=:\exp(P+Q+S_1):$ (17)

$:\exp(P):^{-1}=:\exp(-P+S_2):$ (18)

ここで $:R(z,w,\xi,\eta):$ は $R(z,w,\xi,\eta)$ を表象とする擬微分作用素を表している。

正値かつ制限エルミート型表象の典型的な例は次の通りである。

$$\exp(P)=\exp\left\{K(z,\bar{w})\frac{(\xi\eta)^{N+\frac{\sigma}{2}}}{(\xi^N+\eta^N)^2}\right\} \tag{19}$$

但し定義域は

$$\{(z,w;\xi,\eta)\in\mathbb{C}^4;\ |z|<r,\ |w|<r,\ |\arg(\xi-r^{-1})|<\pi/4N,\ |\arg(\eta-r^{-1})|<\pi/4N\} \tag{20}$$

であり, $r>0$, $0<\sigma<1/2$, $N=2,3,4,\ldots$ 及び $K(z,w)$ は z, w の正値解析核である。(19)の指数の肩にある核は(20)に対す

るある重み付 Bergman 核になっているのであるが，この様な型の表象を用いる事により次の定理が得られる。

<u>定理10.</u>（[4]）。 p_0, $V(r)$ は同上のものとする。今 $\{Q_\lambda(z,w,\zeta,\eta)\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ を p_0 における直積エルミート型表象の族で次の条件を満たすものとする。

i) $\lambda\in\Lambda$ によらない $r>0$ が存在して各 Q_λ は $V(r)$ で正則。

ii) 準正値性：$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し $V(r)$ 上で $Q_\lambda(z,w,\zeta,\eta)\notin\{x\in\mathbb{R};\ x\leq 0\}$。

iii) 楕円性：$\lambda\in\Lambda$ によらない定数 $A, \sigma>0$ $(0<\sigma<1)$ と λ による定数 $l_\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して次の不等式を満たす。

$$\begin{cases} |l_\lambda|\leqq A, & \forall\lambda\in\Lambda \\ A^{-1}\leqq |Q_\lambda(z,w,\zeta,\eta)|/(|\zeta|+|\eta|)^{l_\lambda}\leqq A, & \text{on } V(r) \text{ for } \forall\lambda\in\Lambda \\ |\mathrm{grad}_{(\zeta,\eta)}Q_\lambda|\leqq A(|\zeta|+|\eta|)^{l_\lambda+\sigma-1} & \end{cases} \tag{21}$$

そのとき $\lambda\in\Lambda$ によらない正数 $r'(<r)$ と p_0 における制限エルミート型表象 $\exp(P(z,w,\zeta,\eta))$ が存在して，$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し，$:\exp P:$ 及び $:\exp P::Q_\lambda:$ がともに $V(r')$ で正値エルミート型擬微分作用素になるようにできる。

$p_0=(x_0,x_0;i\zeta_0(dx-du))\in\Delta^a(iS^*\mathbb{R}^{n+n})$ として定理10をマイクロ核の問題に応用する事を考える。今 T_j を $\mathbb{R}^{m_j}$ 内の C^ω-境界をもつ有界領域 $(j=1,\dots,N)$ とする。さらに $Q_j(t_j,z,\zeta)$ を実解析パラメータ t_j をもつ単表象で

$$X_j=\{(t_j,z,\zeta)\in\mathbb{C}^{m_j+n+n};\ t_j\in U_j,\ |z-x_0|<r,\ |(\zeta/|\zeta|)-i\zeta_0|<r,\ |\zeta|>r^{-1}\}$$

で正則で

$$C^{-1}|\xi|^{l_j} \leqq \mathrm{Re}\, Q_j \leqq |Q_j| \leqq C|\xi|^{l_j} \quad \text{on } X_j \tag{22}$$

を満たしているとする。ここで C, r, 及び l_j は正の定数で U_j は T_j の $\mathbb{C}^{m_j}$ における複素近傍である。

$$Q_j^*(t_j, z, \xi) \equiv \overline{Q_j(\bar{t}_j, \bar{z}, \bar{\xi})} \tag{23}$$

と置き，直積型擬微分作用素 $Q_j(t_j, z, D_z)+Q_j^*(t_j, z, D_z)$ を考える。

定理11.（[4]）。 $j=1,\dots,N$ に対して $f_j(t_j, x)$ を $T_j\times\{x\in\mathbb{R}^n; |x-x_0|<r\}$ で定義された超関数で T_j は同上とする。又，f_j は $T_j\times\{x_0\}$ の各点で $t_j\in T_j$ に実解析的に依存しているとする。$\rho_j(t_j)$ を T_j の近傍で実解析的な関数で $\rho_j(t_j)\geqq 0$ on T_j, かつ $\rho_j \not\equiv 0$（各連結成分上）を満たすものとし，エネルギー形式

$$E=\sum_{j=1}^{N}\int_{T_j}\{Q_j(t_j, x, D_x)+Q_j^*(t_j, u, D_u)\}\{f_j(t_j, x)\overline{f_j(t_j, u)}\}\rho_j(t_j)\,dt_j$$

を考える。そのとき E は同上の p_0 において準正値である。すなわち p_0 における制限エルミート型表象 $\exp P(z, w; \xi, \eta)$ が存在して $:e^P:$ は正値擬微分作用素，及び $:e^P: E(x, u)$ は p_0 において正値マイクロ核となる。特に，$E(x, u)\ll 0$ at p_0 ならば各 f_j の $\{t_j\in T_j\}$ への自然拡張 $\mathrm{ext}(f_j(t_j, x))$ は

$$\{(t_j, x; i\tau_j dt_j + i\xi dx);\ t_j\in T_j,\ \tau_j\in\mathbb{R}^{m_j},\ x=x_0,\ \xi=\xi_0\}$$

上でミクロ解析的となる。

§3. エネルギー法の多成分化と応用。

最後に定理11の多成分化を解説の形で述べ、簡単な応用についてふれる。まず多成分化として考えるべきエネルギー形式は次の形のものである。

$$E(x,u)=\sum_{j,k=1}^{N}\int_T \{Q_{jk}(t,x,D_x)+Q_{kj}^*(t,u,D_u)\}\left(f_j(t,x)\overline{f_k(t,u)}\right)\rho(t)\,dt \qquad (24)$$

ここで Q_{jk} は簡単のため m 階 $(\geqq 0)$ 擬微分作用素，$T, \rho, f_j(t,x)$ 等は定理11と同様とする。今 $(Q_{jk}(t,z,\zeta))_{jk}$ はほぼ対角行列に近く，$\exists C>0$ に対して

$$\mathrm{Re}\, Q_{jj}(t,z,\zeta)\geqq C|\zeta|^m \qquad \forall j=1\ldots N \qquad (25)$$

が $T\times(x_0;i\xi_0dx)$ の錐状近傍で成立しているとして E の準正値性を示す。内積に関する中線定理にならって

$$\begin{aligned} f_j(t,x)\cdot\overline{f_k(t,u)} = \frac{1}{4}\{&(f_j(t,x)+f_k(t,x))\overline{(f_j(t,u)+f_k(t,u))} \\ &-(f_j(t,x)-f_k(t,x))\overline{(f_j(t,u)-f_k(t,u))}\} \\ +\frac{i}{4}\{&(f_j(t,x)+if_k(t,x))\overline{(f_j(t,u)+if_k(t,u))} \\ &-(f_j(t,x)-if_k(t,x))\overline{(f_j(t,u)-if_k(t,u))}\} \end{aligned} \qquad (26)$$

に注意する。非対角要素に対しては十分小な $\varepsilon>0$ に対して

$$|Q_{jk}(t,z,\zeta)|\leqq \varepsilon|\zeta|^m \qquad \forall j\neq k \qquad (27)$$

を(25)と同様に仮定すると，

$$\sum_{j,k=1}^{N} Q_{jk}(t,x,D_x) f_j(t,x)\overline{f_k(t,u)} = \sum_{j=1}^{N} Q_{jj}(t,x,D_x) f_j(t,x)\overline{f_j(t,u)}$$

$$+ \sum_{j\neq k}\Big[\frac{1}{4}\big(2\varepsilon(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}} + Q_{jk}(t,x,D_x)\big)\big\{(f_j(t,x)+f_k(t,x))(\overline{f_j(t,u)+f_k(t,u)})\big\}$$

$$+\frac{1}{4}\big(2\varepsilon(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}} - Q_{jk}(t,x,D_x)\big)\big\{(f_j(t,x)-f_k(t,x))(\overline{f_j(t,u)-f_k(t,u)})\big\}$$

$$+\frac{1}{4}\big(2\varepsilon(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}} + i\,Q_{jk}(t,x,D_x)\big)\big\{(f_j(t,x)+if_k(t,x))(\overline{f_j(t,u)+if_k(t,u)})\big\}$$

$$+\frac{1}{4}\big(2\varepsilon(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}} - i\,Q_{jk}(t,x,D_x)\big)\big\{(f_j(t,x)-if_k(t,x))(\overline{f_j(t,u)-if_k(t,u)})\big\}$$

$$-\sum_{j\neq k} 2\varepsilon(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}}\big(f_j(t,x)\overline{f_j(t,u)} + f_k(t,x)\overline{f_k(t,u)}\big)$$

と変形される。ここで $\Delta_x = D_1^2+\cdots+D_n^2$。 オ1項＋オ6項

$$= \sum_{j=1}^{N}\big(Q_{jj}(t,x,D_x) - 4\varepsilon(N-1)(-\Delta_x)^{\frac{m}{2}}\big) f_j(t,x)\overline{f_j(t,u)}$$

であって Q^*_{kj} --- の部分と合わせると(27)によってオ2~5項は定理11により準正値部分を与える。又，オ1＋オ6項は(25)により

$$C > 4\varepsilon(N-1) \tag{28}$$

ならば準正値部分となる。これらを合わせれば結局 $E(x,u)$ は準正値であることがいえる。条件(25),(27),(28)は必らずしも最終的な条件ではないが，$\{f_j(t,x)\}_j$ 等の線形変換によって行列 $\{Q_{jk}\}$ をこの様な形にもっていければ同様の議論が成立すると考えられる。

例　$A_1(t,x)$, $A_2(t,x)$ を $(t_1,t_2,x)=0\in\mathbb{R}^3$ の近傍で定義された実解析関数で $\mathrm{Re}\,A_1(0)>0$, $\mathrm{Re}\,A_2(0)>0$ を満たすとする。又，m_1, m_2 を正整数とすると，

$$P(t,x,D_t,D_x)=D_{t_1}^2+D_{t_2}^2+(A_1(t,x)t_1^{2m_1}+A_2(t,x)t_2^{2m_2})D_x^2$$

は原点で C^ω-hypoelliptic.

この結果は Trèves, Tartakoff, Metivier, 大鍛治 の結果に含まれない，さらに退化した場合も含んでいる（例えば $m_1>m_2>1$）。証明は解 $f(t,x)$ が $t=(t_1,t_2)$ に実解析的に依存し，

$$SS(f(t,x))\subset\{t_1=t_2=0,\ \xi_{t_1}=\xi_{t_2}=0\}$$

である事に注意して $(0;\pm i\,dx)$ において

$$0\ll E(x,u)=\int_{|t|<r}\mathrm{grad}_t f(t,x)\cdot\overline{\mathrm{grad}_t f(t,u)}\,dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{|t|<r}t_j^{2m_j}(A_j(t,x)D_x^2+A_j^*(t,u)D_u^2)(f(t,x)\overline{f(t,u)})\,dt$$

となることを見れば $A_j(t,x)$ に対する仮定と定理11により f の原点における解析性がわかる。

その他回折現象における J. Sjöstrand の結果の一例に対する別証明などがあるがこれは [5] に詳しく述べられているので省略する。又，上の例なども多成分理論を使うことによりかなり一般化できるであろう。

文献

[1]. Aoki, T.; Invertibility for microdifferential operators of

Infinite order. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 18, 1-29 (1982).

[2] Aoki, T.; The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order II, Proc. Japan Acad., 58, 154-157 (1982).

[3] Boutet de Monvel, L.; Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22, 229-268 (1972).

[4] Kataoka, K.; Microlocal energy methods and pseudo-differential operators. To appear in Inventiones Math.

[5] Kataoka, K.; Quasi-positivity for pseudodifferential operators and microlocal energy methods. 谷口シンポジウム「双曲型方程式とその応用」のProceedingsに掲載予定。1984, 9月.

[6] 片岡清臣;代数解析におけるエネルギー法。数理研講究録 431, 207-235 (1981).